

간단한 평면 오실레이터의 위상 천이의 시변 분산에 대한 기존 3개 모델의 추정 정확도 비교

Accuracy Comparison of Existing 3 Models in Estimating Time-Varying Variance of Phase Deviation of a Simple Planar Oscillator

전 만 영**

Man-Young Jeon**

Abstract

Through Montecarlo simulation, this study compares how accurately the existing three phase deviation models estimate the time-varying variance of a planar oscillator perturbed by Gaussian noises. The comparison reveals that Kaertner model estimates the time-varying variance with about 1000 times higher accuracy than ISF or PP model exhibits. Additionally, it finds that the estimation accuracy of PP model is somewhat higher than that of ISF model.

요 약

본 연구에서는, 가우시안 잡음에 의해 교란된 평면 오실레이터의 위상 천이의 시변 분산을, 기존 3개 위상천이 모델이 얼마나 정확하게 추정할 수 있는지를 몬테카를로 시뮬레이션을 통하여 비교한다. 비교 결과, Kaertner 모델이 ISF 모델이나 PP 모델 보다 약 1000배 높은 정확도를 가지고 위상 천이의 시변 분산을 추정한다는 것을 알 수 있다. 또한, PP 모델의 추정 정확도는 ISF 모델 보다 다소 높다는 것을 알 수 있다.

Key words : Phase Deviation, Phase Shift, Timing Shift, Jitter, Phase Noise, Planar Oscillator

1. 서론

오실레이터 위상잡음 이론은 위상천이 모델 (phase deviation model)로부터 시작하여 정립된

* Dept. of Inform & Comm. Eng., Dongyang Univ.

★ Corresponding Author:

e-mail: myjeon@dyu.ac.kr, phone: 054-630-1158.

※ Acknowledgment:

This study was supported by grant form Dong Yang University in 2014.

Manuscript received Nov 6, 2015; revised Nov 24, 2015; accepted Nov 27, 2015

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

다[1]-[4]. 지금까지 알려진 위상천이 모델은 perturbation projection-based model(이하, PP 모델) projection-based ISF model(이하, ISF 모델), Kaertner model(이하, Kaertner 모델)등 3가지가 있다[1]-[4]. 시간 영역에서 전개된 모든 위상잡음 이론은 이 3개의 모델을 기초로 하고 있으며, 최근에 임펄스와 임펄스 열 형태의 잡음에 대하여 오실레이터가 나타내는 위상 천이의 시변(時變) 궤적을 상기 모델이 어떠한 정확도를 가지고 추정하는지에 대한 연구[5]-[7]가 있었다. 그러나 실제 상황과 유사하게 오실레이터에 가우시안 잡음이 입력되었을 때 오실레이터가 나타내는 위상 천이의 시변 궤적과 시변 분산을 상기 모델이 얼마나 정확하게 추정하는지에 대한 연구는 지금까지 없었다. 특히, 시변 분산을 얼마나 정확하게 추정하는지의 여부를 조사하는 것은 매

우 중요하다. 왜냐하면 시변 분산의 기울기(확산 계수)는 잡음에 의해 교란된 오실레이터 위상의 확산속도(교란속도)를 나타내는 척도로서 위상잡음 식과 타이밍 지터 식에 존재하는 계수이기 때문이다[3],[4],[8],[9].

본 논문에서는 가우시안 잡음이 입력되었을 때 오실레이터가 나타내는 위상 천이의 시변 궤적과 시변 분산을 3개 모델이 얼마나 정확하게 추정(모델링)할 수 있는지에 대한 연구를 수행한다. 이를 위해, 500가지 독립된 가우시안 잡음에 의해 교란된 평면 오실레이터가 나타내는 위상 천이의 시변 궤적과 시변 분산을 몬테카를로 시뮬레이션을 통하여 얻고 이를 상기 3개 모델이 예측하는 것들과 비교한다.

본 논문에서 사용하는 오실레이터는 물리적 회로로 이루어진 실제 오실레이터가 아니라 van der Pol 오실레이터처럼 수학적으로 개념화한 간단한 평면 오실레이터이다[10]. 이 오실레이터는 실제 오실레이터로부터 해석적으로 얻기가 거의 불가능한 Floquet 벡터를 해석적으로 얻을 수 있으며 이로부터 상기 3가지 모델의 임펄스 응답을 손쉽게 얻을 수 있기 때문에 사용한다[5],[6].

II. 기존 3개 위상천이 모델의 가우시안 잡음에 대한 평면 오실레이터의 위상천이 응답 추정

외부잡음 $b(t)$ 에 의해 교란된 평면 오실레이터의 행동을 극좌표계로 기술하는 상태 방정식은

$$\begin{bmatrix} \frac{dr(t)}{dt} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t) - r(t)^2 \\ 1 + r(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}(\mathbf{X}_s(\theta_o(t) + \phi(t)))b(t) \tag{1}$$

이다[6],[10]. 여기서 $\theta(t)$ 는 외부잡음 $b(t)$ 에 의해 교란된 발진 신호의 위상을 나타내고, $\theta_o(t)$ 는 외부잡음이 없을 때($b(t)=0$) 발진 신호의 위상을 나타낸다. $\phi(t)$ 는 교란된 발진 신호의 위상이 교란되지 않은 발진 신호의 위상에 비해 얼마나 천이 되어 있는지를 나타내며 아래 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$\phi(t) = \theta(t) - \theta_o(t). \tag{2}$$

$\mathbf{B}(\mathbf{X}_s(\theta_o(t) + \phi(t)))$ 는 외부잡음 $b(t)$ 가 오실레이터의 상태벡터에 의해 변조되는 것을 모델링하기 위해 도입된 잡음 변조벡터로서

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}_s(\theta_o(t) + \phi(t))) = \begin{bmatrix} \kappa_1(\theta_o(t) + \phi(t)) \\ \kappa_2(\theta_o(t) + \phi(t)) \end{bmatrix} \tag{3}$$

의 형태를 갖는다. $\mathbf{X}_s(\theta_o(t) + \phi(t))$ 는 외부잡음에 의해 교란되지 않은 오실레이터가 정상상태에 도달한 후 위상 $\theta_o(t) + \phi(t)$ 에서 평가된 상태벡터로서

$$\mathbf{X}_s(\theta_o(t) + \phi(t)) = \begin{bmatrix} r_s(\theta_o(t) + \phi(t)) \\ \theta_s(\theta_o(t) + \phi(t)) \end{bmatrix} \tag{4}$$

가 된다.

평면 오실레이터의 가우시안 잡음 $b(t)$ 에 대한 위상천이 $\phi(t)$ 는 다음과 같이 구한다. 우선 임의의 시간 t 에 평균 0과 분산 1의 정규분포를 갖는 임의의 수 발생기에서 생성되는 $b(t)$ 를 식 (1)에 대입한 후 식 (1)을 수치 해석적으로 풀어서 가우시안 잡음에 의해 교란된 $\theta(t)$ 를 구한다.(본 연구에서 사용한 $\mathbf{B}(\mathbf{X}_s(\theta_o(t) + \phi(t)))$ 의 구체적 형태는 3장에서 주어진다.) 다음으로 $b(t)=0$ 으로 둔 후 식 (1)을 수치 해석적으로 풀어 외부잡음에 교란되지 않은 $\theta_o(t)$ 를 구한다. 그러면 구하고자 하는 위상 천이 $\phi(t)$ 는 식 (2)에 의해 구해진다.

참고문헌[5],[6]에 의하면, 본 연구에서 사용하는 평면 오실레이터가 $t = \tau$ 에서 가해지는 임펄스 $b(t) = \delta(t - \tau)$ 에 대하여 반응하는 위상천이 임펄스 응답은 ISF, PP, Kaertner 모델에 의해 아래의 식 (5), (6), (7)로 각각 모델링 된다.

$$h_{ISF}(t, \tau) = \kappa_2(\theta_o(\tau) + \phi(\tau))u(t - \tau) \tag{5}$$

$$h_{PP}(t, \tau) = (\kappa_1(\theta_o(\tau) + \phi(\tau)) + \kappa_2(\theta_o(\tau) + \phi(\tau)))u(t - \tau) \tag{6}$$

$$h_K(t, \tau) = \left(\begin{array}{c} \kappa_1(\theta_o(\tau) + \phi(\tau))(1 - e^{-(t-\tau)}) \\ + \kappa_2(\theta_o(\tau) + \phi(\tau)) \end{array} \right) u(t-\tau). \quad (7)$$

따라서 3개 모델은 가우시안 잡음 $b(t)$ 에 대해서 평면 오실레이터가 나타내는 위상천이 $\phi(t)$ 를 아래 상승(相乘)적분 (8)을 계산함으로써 추정한다.

$$\phi_i(t) = \int_0^t h_i(t, \tau) b(\tau) d\tau \quad (i = ISF, PP, K). \quad (8)$$

식 (8)은 매순간 입력되는 가우시안 잡음에 대해 수치 해석적으로 계산한다.

다음 장에서는 가우시안 잡음에 의해 교란된 평면 오실레이터의 운동 방정식 (1)을 수치 해석적으로 적분함으로써 얻는 $\phi(t)$ 의 시변궤적과 기존 3개 모델이 식 (8)에 의하여 계산하는 $\phi(t)$ 의 시변궤적을 500개 서로 독립된 가우시안 잡음에 대해 몬테카를로 시뮬레이션에 의해 얻는다. 동시에 이들로부터 평면 오실레이터 $\phi(t)$ 의 시변분산과 3개 모델이 추정하는 $\phi(t)$ 의 시변분산을 비교한다.

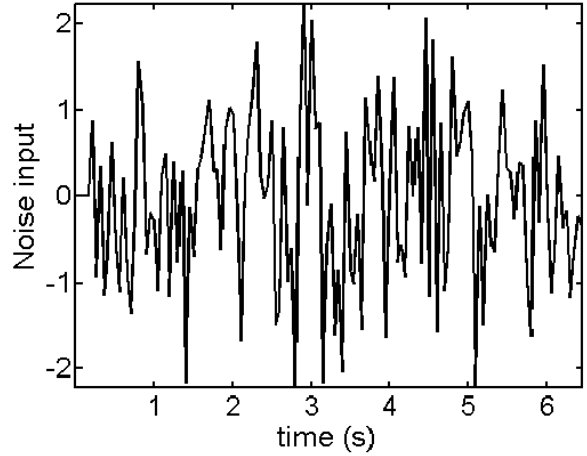
III 위상천이 시변 분산특성에 대한 3가지 모델의 추정 정확도 비교

1. 시불변 변조벡터의 사용

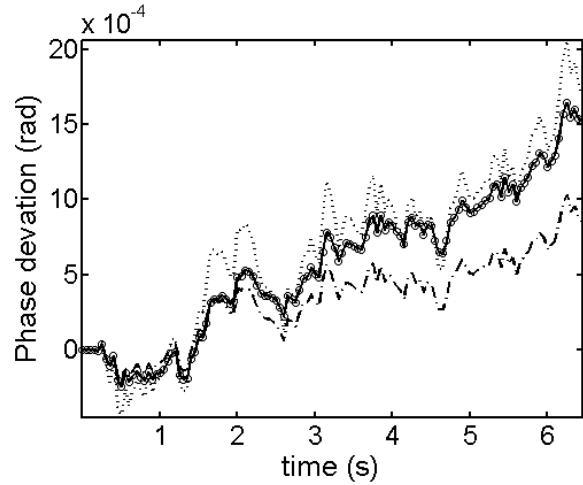
변조 벡터식 (3)이 식 (9)와 같이 시간에 관계없이 일정한 경우, 그림 1(a)와 같은 500번째 가우시안 잡음 $b(t)$ 에 의해 유발되는 평면 오실레이터의 위상천이 $\phi(t)$ 의 시변궤적과 기존 3개 모델이 추정하는 궤적을 시뮬레이션에 의해 얻으면 그림 1(b)과 같다.

그림 1(b)에서 볼 수 있듯이, 가우시안 잡음에 의해 교란된 평면 오실레이터의 위상 천이 $\phi(t)$ ('o'로 표시)의 시변 궤적을 가장 정확하게 추정

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}_s(\theta_o(t) + \phi(t))) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix} \quad (9)$$



(a)



(b)

Fig. 1. (a) Gaussian noise, (b) Time evolutions of the phase deviations of planar oscillator(o), Kaertner model(solid line), PP model(··), and ISF model(- -) for the use of time-invariant noise modulation vector

그림 1. (a) 가우시안 잡음, (b) 시불변 잡음변조 벡터 사용에 대한 평면 오실레이터(o), Kaertner 모델(실선), PP 모델(··), ISF 모델(- -) 이 나타내는 위상천이의 시간에 따른 궤적

하는 모델은 Kaertner 모델('실선' 표시)이며 그 다음이 PP 모델('··'로 표시)이다. 가장 부정확하게 추정하는 모델은 ISF 모델('-'로 표시)임을 알 수 있다. 나머지 499개의 가우시안 잡음에 대해서도 오실레이터 $\phi(t)$ 를 3개 모델이 추정하는 양상은 동일했다.

그림 1(a)와 같은 500개 서로 독립된 가우시안 잡음의 각각에 대하여 그림 1(b)과 같은 $\phi(t)$ 의

시변 궤적을 얻는다. 얻어진 500개 $\phi(t)$ 로부터 $\phi^2(t)$ 의 앙상블 평균 $E[\phi^2(t)]$ 와 $\phi(t)$ 의 앙상블 평균의 제곱 $E^2[\phi(t)]$ 를 얻는다. 이들 사이의 차로 부터 평면 오실레이터와 3개 모델이 나타내는 $\phi(t)$ 의 분산 $Var[\phi(t)]$ 를 그림 2와 같이 얻는다. 그림으로부터 평면 오실레이터의 시변 분산('o'로 표시)을 가장 정확하게 추정하는 모델은 Kaertner 모델('실선' 표시)이며 그 다음이 PP 모델('··'로 표시)이다. 가장 부정확하게 추정하는 모델은 ISF 모델('·-'로 표시)임을 알 수 있다.

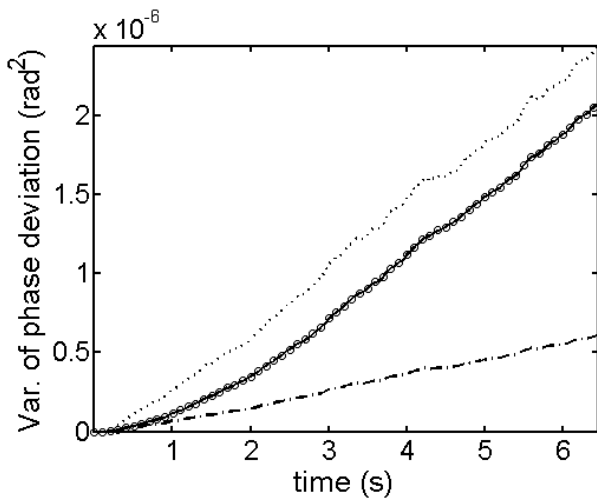


Fig. 2. Time-varying variances of the phase deviations of planar oscillator(o), Kaertner model(solid line), PP model (··), and ISF model (·-) for the use of time-invariant noise modulation vector

그림 2. 시불변 잡음변조 벡터 사용에 대한 평면 오실레이터(o), Kaertner 모델(실선), PP 모델(··), ISF 모델(·-) 이 나타내는 위상 천이의 시변 분산

2. 시변 변조벡터의 사용

변조 벡터식 (3)이 아래의 식 (10)과 같이 시간에 따라 변하는 경우, 그림 1(a)와 같은 500번째

$$B(X_s(\theta_o(t)+\phi(t)))= \begin{bmatrix} 0.01\cos(\theta_o(t)+\phi(t)) \\ 0.01\sin(\theta_o(t)+\phi(t)) \end{bmatrix} \quad (10)$$

가우시안 잡음 $b(t)$ 에 의해 교란되는 평면 오실레이터의 위상천이 $\phi(t)$ 의 시변궤적과 기존 3개 모델이 추정하는 시변궤적을 시뮬레이션을 통해 찾아낸 결과는 그림 3과 같다.

그림 3 에서 볼 수 있듯이, 가우시안 잡음에 의해 교란된 평면 오실레이터의 위상 천이 $\phi(t)$ 의 시변 궤적을 가장 정확하게 추정하는 모델은, 시불변 변조벡터를 사용하는 경우와 동일하게 Kaertner 모델이며 그 다음이 PP 모델이다.

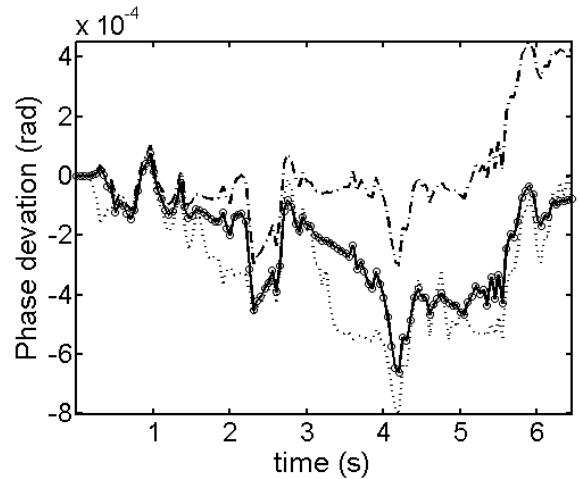


Fig. 3. Time evolutions of the phase deviations of planar oscillator(o), Kaertner model(solid line), PP model(··), and ISF model(·-) for the use of time-variant noise modulation vector

그림 3. 시변 잡음변조 벡터 사용에 대한 평면 오실레이터(o), Kaertner 모델(실선), PP 모델(··), ISF 모델(·-)이 보이는 위상 천이의 시간에 따른 궤적

가장 부정확하게 추적하는 모델은 ISF 모델임을 알 수 있다. 나머지 499개의 가우시안 잡음에 대해서도 오실레이터 $\phi(t)$ 를 3개 모델이 추정하는 양상은 동일함을 보였다.

그림 1(a)와 같은 500개 서로 독립된 가우시안 잡음을 사용하여 평면 오실레이터가 나타내는 위상천이 $\phi(t)$ 의 시변 분산과 3개 모델이 추정하는 시변 분산을 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 찾아낸 결과는 그림 4와 같다. 그림으로부터 평면 오실레이터의 시변 분산을 가장 정확하게 추정하는 모델은 시 불변 변조벡터를 사용한 경우와 동일하게 Kaertner 모델이며 그 다음이 PP 모델이다. 가장 부정확하게 추정하는 모델은 ISF 모델임을 알 수 있다.

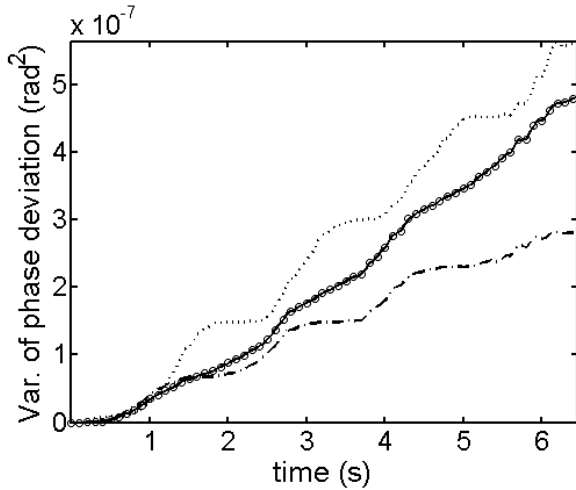


Fig. 4. Time-varying variances of the phase deviations of planar oscillator(o), Kaertner model(solid line), PP model (··), and ISF model (·-) for the use of time-variant noise modulation vector
 그림 4. 시변 잡음변조 벡터 사용에 대한 평면 오실레이터(o), Kaertner 모델(실선), PP 모델(··), ISF 모델(·-) 이 나타내는 위상 천이의 시변 분산

표 1은 오실레이터의 2 주기(약 6.84 s)동안 그림 2와 4에 표시된 평면 오실레이터의 시변 분산과 3개 모델이 추정하는 시변 분산과의 오차의 평균을 요약한 것이다. 시변 또는 시 불변 변조 벡터의 사용에 상관없이, 평면 오실레이터의 시변 분산과 Kaertner 모델이 추정하는 시변 분산 사이의 평균 오차는, 평면 오실레이터의 시변 분산과 다른 2개 모델이 추정하는 시변 분산 사이의 평균 오차보다 약 1000배 이상 작다. 이처럼 Kaertner 모델이 다른 2개 모델에 비해 극단적으로 정확한 추정을 하는 이유는 식 (7)에서 보는 바와 같이 Kaertner 모델의 위상 천이 임펄스 응답에는 지수 함수적으로 표현되는 과도응답 특성이 포함되어 있으나 식 (5)와 식 (6)으로 표현되는 ISF 모델과 PP 모델의 임펄스 응답에는 그러한 과도응답 특성이 포함되어 있지 않기 때문이다. 사실상, 식 (1)의 평면 오실레이터에 $b(t) = \delta(t - \tau)$ 를 가한 후 평면 오실레이터가 실제 보이는 위상천이 임펄스 응답을 수치 해석적으로 구해보면 식 (7)의 Kaertner 모델이 예측하는 임펄스 응답처럼 과도현상을 나타냄과 동시에 식 (7)의 예측과 정확히 일치하는 특성을 보인다 [6]. 반면, 식 (5)와 (6)을 살펴보면, ISF 모델은

Kaertner 모델의 임펄스 응답의 초기치를 전체 임펄스 응답으로, PP 모델은 Kaertner 모델의 임펄스 응답의 최종치를 전체 임펄스 응답으로 각각 지나치게 단순화 하여 모델링하고 있음을 알 수 있다.

Table 1. Average errors between the time-varying variances of the planar oscillator and the existing 3 models

표 1. 평면 오실레이터와 기존 3개 모델이 나타내는 시변 분산 사이의 평균 오차

	Average errors (rad ²)		
	Kaertner model	PP model	ISF model
Time-invariant noise modulation vector	$1.58 \cdot 10^{-10}$	$2.71 \cdot 10^{-7}$	$5.81 \cdot 10^{-7}$
Time-variant noise modulation vector	$2.72 \cdot 10^{-11}$	$5.30 \cdot 10^{-8}$	$6.44 \cdot 10^{-8}$

III 결론

본 연구에서는 가우시안 잡음이 입력되었을 때 평면 오실레이터가 나타내는 위상 천이의 시변 궤적과 분산을 기존 3개 모델이 얼마나 정확하게 추정할 수 있는지에 대한 연구를 수행하였다. 그 결과, Kaertner 모델이 다른 두 모델에 비해 극히 높은 추정 정확도를 보였고 PP 모델은 ISF 모델보다 다소 높은 추정 정확도를 보였다. 따라서 위상천이 모델로서 Kaertner 모델을 선택하여 오실레이터 위상잡음 이론을 전개할 때 가장 정확한 오실레이터 위상잡음 식을 얻을 수 있음을 예상할 수 있다.

References

[1] F. X. Kaertner, "Determination of the correlation spectrum of oscillators with low noise," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-37, pp. 90-101, Jan. 1989.
 [2] F. X. Kaertner, "Analysis of white f^a noise

in oscillators," *Int J. of Circuit Theory and Applications*, vol. 18, pp. 485-519, 1990.

[3] A. Hajimiri and T. H. Lee, "A general theory of phase noise in electrical oscillators," *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. SC-33, pp. 179-194, Feb. 1998.

[4] A. Demir, A. Mehrotra, and J. Roychowdhury, "Phase noise in oscillators: a unifying theory and numerical methods for characterization," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*, vol. 47, pp. 655-674, May 2000.

[5] M.-Y. Jeon, D.-R. Lee, "Roles and limitations of two widely publicized equations in predicting phase shift impulse response of a simple 2-D oscillator," *Proc. of IEEE ISCAS 2010*, pp. 4277-4280, Paris, May 2010.

[6] M.-Y. Jeon, "Analytical investigation of phase shift impulse response of three existing phase shift models using a simple planar oscillator," *IEICE Electronics Express*, vol. 11, no. 12, pp. 1-11, May 2014.

[7] M.-Y. Jeon, "Evaluations of three phase shift models in describing phase shift impulse train response of a simple planar oscillator," *J. of The Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 9, no. 8, pp. 861-866, Aug. 2014.

[8] D. Ham and A. Hajimiri, "Virtual damping and Einstein relation in oscillators," *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. SC-38, pp. 407-418, March 2003.

[9] A. Hajimiri and T. H. Lee, *The Design of Low Noise Oscillators*. Boston, MA: Kluwer Academic, 1999.

[10] G. J. Coram, "A simple 2-D oscillator to determine the correct decomposition of perturbations into amplitude and phase noise," *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*, vol. 48, pp. 896-898, July 2001.

BIOGRAPHY

Man-Young Jeon (Member)



1987 : B. S. degree in Electronics Engineering, Kyungpook National University.

1991 : M. S. degree in Electronics Engineering, Kyungpook National University.

2000 : Ph. D. degree in Electronics and Electrical Engineering, POSTECH.

1987~1997 : Senior Research Engineer, ETRI, and Samsung Electronics.

2000~2001 : Principal Research Engineer, Samsung Advanced Institute of Technology(SAIT)

2001~ : Professor, Dept. of Inform. and Communications Eng., Dongyang University