Journal for History of Mathematics
Vol. 28 No. 6 (Dec. 2015), 321–332
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2015.28.6.321

On $L^p(T^2)$-Convergence and Móricz

$L^p(T^2)$-수렴성과 모리츠에 관하여

Lee Jung Oh 이정오

This paper is concerned with the convergence of double trigonometric series and Fourier series. Since the beginning of the 20th century, many authors have studied on those series. Also, Ferenc Móricz has studied the convergence of double trigonometric series and double Fourier series so far. We consider $L^p(T^2)$-convergence results focused on the Ferenc Móricz's studies from the second half of the 20th century up to now. In section 2, we reintroduce some of Ferenc Móricz's remarkable theorems. Also we investigate his several important results. In conclusion, we investigate his research trends and the simple minor genealogy from J. B. Joseph Fourier to Ferenc Móricz. In addition, we present the research minor lineage of his study on $L^p(T^2)$-convergence.

Keywords: double Fourier series, summability of double Fourier series, convergence of Fourier series, double trigonometric series; 이중 푸리에 급수, 이중 푸리에 급수의 총합가능성, 푸리에 급수의 수렴성, 이중 삼각계 급수.

MSC: 42A20, 42A32

1 서론

헝가리 수도 부다페스트에서 자동차를 타고 2시간 정도 남쪽으로 달리면 헝가리에서 3번째로 큰 세게드(Szeged)라는 대도시가 나타난다. 세게드는 세르비아와 루마니아 국경지역과 가까운 곳에 위치해 있으면서 15세기 고딕 건축물이 많은 유서 깊은 도시이다. 특히, 이곳에는 거대한 대성당 광장을 독특하게 둘러싸고 세워진 유럽의 명문 세게드대학(University of Szeged)이 있다. 이 대학 명예전당에는 1937년 비타민 C의 관계성을 연구하여 노벨상을 수상한 알베르트 센트 죠르쥬(Albert Szent Gyorgyi)를 비롯하여 우리

Lee Jung Oh: Dept. of liberal arts, Chosun College of Science and Technology
E-mail: `jolee@cst.ac.kr`
Received on Oct. 27, 2015, revised on Nov. 22, 2015, accepted on Dec. 11, 2015.

에게 익숙한 수학자 레오폴드 페에르(Lipót Fejér)[1], 알프레드 하르(Alfréd Haar)[2], 프리제시 리츠(Frigyes Riesz)[3]등이 있다. 세게드대학의 자랑은 세계 최고수준의 수학연구소 보여이(Bolyai)[4]를 가지고 있는 것이다. 이 연구소는 권위있는 수학저널 'Acta Scientiarum Mathematicarum' 등을 출판하고 있으며 해석학 수치응용등 6개 분야에 걸쳐 매우 활발한 연구 활동으로 세계적으로 유명하다. 바로 이곳 수치수학 응용학과에 국제적 명성이 높은 페렌츠 모리츠(Ferenc Móricz) 명예교수가 있다. 다음 절에서 필요한 몇 가지 정의와 기호를 먼저 소개한다.

L^p-공간의 르베그 적분가능한 모든 복소함수를 $f(t,u)\ \big(\in L^p(T^2)\big)$ 라 하자. 여기서 $0 < p \le 1$ 이고 2차원 토러스(torus) T^2 상에서 정의된 함수 $f(t,u)$는 2π-주기를 가진 복소함수이다. 단,

$$T^2 = \{(t,u) \in \mathbb{R}^2 | -\pi \le t, u \le \pi\} \tag{1}$$

이다.

주어진 임의의 함수 $f(t,u)$의 이중 푸리에 급수(double Fourier series)는

$$S[f(t,u)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn}e^{i(mt+nu)} \qquad (m,n \in \mathbb{Z}) \tag{2}$$

로 표현하고 함수 $f(t,u)$에 관한 이중 푸리에 급수의 계수는

$$a_{mn} = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{T^2} f(t,u)e^{-i(mt+nu)}dtdu, \quad (m,n \in \mathbb{Z})$$

이다. 또한 주어진 함수에 대한 놈(norm)은

$$||f||_{L^p(T^2)} = \left\{\int\int_{T^2} |f(t,u)|^p dtdu\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\pi}^{\pi} |f(t,u)|^p dtdu\right\}^{\frac{1}{p}}$$

이고 급수의 직사각형 부분합은

$$S_{mn}[f(t,u)] = S_{mn}(t,u) = \sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n} a_{kl}e^{i(kt+lu)} \qquad (m,n \in \mathbb{Z}) \tag{3}$$

이다. 직사각형 부분합은 이중 푸리에 급수의 수렴성을 살피는 데 중요한 총합가능성 방법에 필요한 도구이다. 특히 $m = n$ 경우는 정사각형 부분합이 된다. (1)의 노르룬드 평균(Nörlund means)은

$$t_{mn}(t,u) = \frac{1}{P_{mn}}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{m-k,n}S_{kl}(t,u) \qquad (m,n = 0,1,2,\cdots) \tag{4}$$

---

1) Lipót Fejér(1880–1959) : 헝가리 수학자. 조화해석과 푸리에 급수를 주로 연구. 푸리에 급수 이론 중 페에르 핵(Fejér kernel) 페에르 정리(Fejér's theorem)로 잘 알려져 있으며 존 폰 노이만의 논문 지도교수.

2) Alfréd Haar(1885–1933) : 헝가리 수학자. 힐버트 제자. 하르측도(Haar measure), 하르 웨이블릿(Haar wavelet), 하르변환(Haar transform)으로 잘 알려짐. 프리제시 리츠(Frigyes Riesz)와 공동으로 'Acta Scientiarum Mathematicarum journal' 의 창시자.

3) Frigyes Riesz (1880–1956) : 헝가리 수학자. 함수해석을 주로 연구. 리츠 피셔의 정리(Riesz-Fischer theorem)등으로 잘 알려짐. 해석학을 연구한 동생 머르첼 리츠(Marcel Riesz)와 함께 프리제시와 머르첼 리츠 정리(F. and M. Riesz theorem) 발표.

4) János Bolyai(1802–1860) : '절대적으로 정확한 공간의 과학' 의 저서로 비(非) 유클리드 기하학의 창시자가 됨. 평행선 공리를 연구한 헝가리의 수학자. 그의 이름을 딴 수학 연구소.

이고

$$P_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} p_{kl} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

는 임의의 음수가 아닌 이중수열이다.

한편, $\alpha, \beta > -1$ 일때 이중 푸리에 급수 (1) 에 관한 차수가 α, β 인 세자로 평균 (Cesàro means) 은

$$\sigma_{mn}^{\alpha,\beta}[f(t,u)] = \left(A_m^{\alpha} A_n^{\beta}\right)^{-1} \sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n} A_{m-r}^{\alpha-1} A_{n-s}^{\beta-1} S_{rs}[f(t,u)] \tag{5}$$

이다. 이때

$$A_m^{\alpha} = \binom{\alpha+m}{m} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)}{m!} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

이고 $A_0^{\alpha} = 1$ 이다 [4, 5].

다음 절에서는 1986 년 이후부터 최근까지 $L^p(T^2)$-수렴성에 관한 모리츠 연구들을 주목하여 살펴본다.

2 1986 년부터 2014 년까지 모리츠의 $L^p(T^2)$-수렴성 연구에 관하여

이 절에서는 모리츠 중심의 이중 푸리에 급수와 이중 삼각계 급수의 수렴성에 관한 대표적인 연구들을 조사하고 몇가지 결과를 중심으로 살펴본다. 1967 년 모리츠는 세게드대학에서 학위를 받고 연구를 계속하여 2 년뒤인 1968 년 "직교 급수의 총합 가능성의 문제에 관하여"[5] 를 소개한다. 한편 그는 1986 년 이후부터 이중 푸리에 급수 (double Fourier series) 에 관한 연구결과를 소개하기 시작한다. 그는 인디아나 대학의 로즈교수와 같이 2 년간 공동 연구를 통해 소개한 "립쉬츠 (Lipschitz) 함수에 대하여 이중 푸리에 급수의 노르룬드 방법에 의한 근사" [13] 를 우선 주목하여 살펴본다. 이중 푸리에 급수의 직사각형 부분합 (3) 과 노르룬드 평균 (Nörlund means) (4) 를 이용하여 $0 < \alpha, \beta < 1$ 인 α, β 차수의 립쉬츠 함수족을 $f(t,u) \in \text{Lip}(\alpha,\beta)$ 이라 할때 항등 근사비율을 (1) 상에서 보인다. 또한 1987 년 중국 항저우 (Hangzhou) 대학의 쉬 치안리앙 (Shi, Xianliang) 과 함께 소개한 "이중 푸리에 급수와 공액 급수의 세자로 평균에 의한 연속함수 근사" [14] 에서 세자로 평균 (Cesàro means) (5) 를 이용하여 주정리를 증명한다. 이어서 1988 년에 소개된 "유계변동 계수를 가진 이중 삼각계 급수의 적분가능성과 수렴성" [6] 을 좀더 살펴보면 유계변동 복소계수를 가진 이중 삼각계 급수

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mt+nu)} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}) \tag{6}$$

에 관하여 논한다. 그는 이중 복소계수 수열 $\{c_{mn}\}$ 의 차

$$\triangle_{11} c_{mn} = c_{mn} - c_{m+1,n} - c_{m,n+1} + c_{m+1,n+1}$$

5) F. Móricz and K. Tandori, On a problem of summability of orthogonal series, Acta Sci. Math., 29(1968), 331-350.

를 이용하는데,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\triangle_{11}c_{mn}|<\infty \qquad (m,n=1,2,3,\cdots)$$

를 만족하면 복소계수가 유계변동임을 소개한 후 주정리에서 유계변동인 이중 복소계수가

$$\lim_{\max(|m|,|n|)\to\infty} c_{mn}=0$$

이면 이중 삼각계 급수 (6)이 수렴함을 보인다. 1990년 이후 그는 열정적인 연구 의욕을 보이며 많은 양의 연구결과를 발표한다. 주목되는 몇개의 연구들을 살펴보면 1991년 그는 "이중 코사인과 사인 급수의 적분가능성에 관하여1" [7]과 "이중 코사인과 사인 급수의 적분가능성에 관하여2" [8]를 소개하며 이목을 집중시킨다. 즉 유계변동이고 영(null) 계수들을 가진 임의의 이중 코사인 또는 사인 급수의 합이 르베그 적분가능이면 이중 코사인과 사인 급수는 푸리에 급수임을 보인다. 먼저 2차원 토러스

$$T^2=\{(t,u)\in\mathbb{R}^2|0<t,u\leq\pi\}$$

상에서 이중 실수 수열 $\{a_{mn}\}$이 중요한 두 조건

$$\lim_{m+n\to\infty} a_{mn}=0 \qquad (m,n=0,1,2\cdots), \tag{7}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\triangle_{11}a_{mn}|<\infty \qquad (m,n=1,2,3,\cdots) \tag{8}$$

모두를 만족할 때 함수$f(t,u)$는 이중 코사인 급수

$$f(t,u)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_m\lambda_n a_{mn}\cos mt\cos nu \tag{9}$$

에 수렴하고 $g(t,u)$는 이중 사인 급수

$$g(t,u)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin mt\sin nu \tag{10}$$

에 각각 수렴함을 보인다. (9)에서 $m\geq 0$ 일때 $\lambda_0=\frac{1}{2}$이고$\lambda_m=1$ 이다. 또한 (10)에서 실계수 a_{mn} 은

$$b_{mn}=\frac{a_{mn}}{mn}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}mn\,|\triangle_{11}b_{mn}|<\infty$$

을 만족하고 $m,n\geq 1$ 이다. 더 나아가 $f(t,u),g(t,u)\in L^1(T^2)$ 일때 함수가 조건 (7)과 (8)을 만족하면 리이만 특이적분 의미로 이 함수들이 적분가능임을 보인다. 결국 이중 사인 급수 (10)에서 이중 실계수 a_{mn}이

$$a_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\int\int_{T^2}f(t,u)\cos mt\cos nu\,dtdu \quad (m,n=1,2,3,\cdots)$$

이면 이중 사인 급수는 $g(t,u)$의 푸리에 급수가 된다. 이중 코사인 급수 (9)도 마찬가지로 $f(t,u)$의 푸리에 급수가 된다. 특히 [8]에서 그는 함수 $g(t,u)$의 적분가능성 문제를 더욱 일반화한다. 즉 조건 (8)을 변형하여

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\triangle_{11}a_{mn}|\ln(\max(m,n)+1)<\infty \qquad (m,n=1,2,3,\cdots)$$

로 제시한다. 이어서 1994년 "이중 푸리에 급수의 L^1-수렴성" [9]을 연구한다. 간략하게 살펴보면 식 (1)상에서 정의된 제한된 조건을 만족하는 계수를 가진 이중 푸리에 급수(2)에 대하여 조건 (7)과 직사각형 부분합(3) 그리고 페에르 평균(Fejér means)

$$\sigma_{jk}(f;t,u)=\frac{1}{(j+1)(k+1)}\sum_{m=0}^{j}\sum_{n=0}^{k}S_{mn}(f;t,u)$$

을 이용한다. 한편 1995년 "하디 공간에서 정의된 함수의 이중 푸리에 급수 대한 페에르 연산자 상한에 관하여" [10]를 발표한다. 여기서 2차원 하이브리드 하디 공간

$$H^{(1,0)}(T^2)=\{f(t,u)\in L^1(T^2):\tilde{f}^{(1,0)}(t,u)\in L^1(T^2)\}$$

과 놈(norm)

$$||f(t,u)||_{H^{(1,0)}}=||f(t,u)||_{L^1}+||\tilde{f}^{(1,0)}(t,u)||_{L^1}$$

을 정의한다. 여기서

$$\tilde{f}^{(1,0)}(t,u)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(t+s,u)-f(t-s,u)]\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}sds$$

는 $f(t,u)$에 대응되는 공액함수들이다. 그리고 페에르 연산자 상한

$$\sigma_*(f;t,u)=\sup_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}|\sigma_{jk}(f;t,u)|$$

을 정의하고 이들 정의를 이용하여 주정리에서 만약 $f(t,u)\in H^{(1,0)}(T^2)$ 이면 부등식

$$\sup_{\lambda>0}\lambda|\{(t,u)\in T^2:\sigma_*(f;t,u)>\lambda\}|\le C||f(t,u)||_{H^{(1,0)}}$$

을 만족함을 보인다. 여기서 C는 상수이고 $|\{...\}|$는 르베그 측도이다. 이어서 2008년에 "이중 삼각계 급수의 르베그 총합가능성에 관하여" [12]를 소개한다. 이중 삼각계 급수 (6)에서 임의의 이중 복소계수 수열 $\{c_{mn}\}$에 대하여 $m,n\in\mathbb{Z}$ 일때 직사각형 부분합 (3)과 t,u에 관하여 다음을 정의한다.

$$L(t,u)=c_{0,0}tu+u\sum_{|m|\ge1}c_{m,0}\frac{e^{imt}}{im}+t\sum_{|n|\ge1}c_{0,n}\frac{e^{inu}}{in}+\sum_{|m|\ge1}\sum_{|n|\ge1}c_{m,n}\frac{e^{i(mt+nu)}}{i^2mn} \tag{11}$$

즉 (11)의 각 급수들이 수렴할 때 이중급수 (6)의 형식적 적분을 정의한다. 만약 (11)의 $L(t,u)$가 (t_0,u_0) 근방에서 존재하고 $h,k\to0$ 일 때

$$\begin{aligned}\Delta_{h,k}L(t_0,u_0)=\frac{1}{4hk}\{&L(t_0+h,u_0+k)-L(t_0-h,u_0+k)\\&-L(t_0+h,u_0-k)+L(t_0-h,u_0-k)\}\to s\end{aligned}$$

이면 급수 (6)은 점 (t_0,u_0)에서 르베그 총합가능임을 소개하고 이를 이용하여 주정리에서 만약 이중 복소계수 수열 c_{mn} 이

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{1\le|m|\le M}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|mc_{m,n}|=0$$

이고

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\le|n|\le N}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|nc_{m,n}|=0$$

을 만족하면 모든 $(t.u)$ 에 대하여

$$\lim_{h,k\to 0}\{\Delta_{h,k}L(t,u) - S_{M,N}(t,u)\} = 0$$

처럼 위에서 소개된 대칭차몫 $\Delta_{h,k}L(t,u)$ 과 직사각형 부분합 $S_{M,N}(t,u)$ 이 서로 같아짐을 보인다. 그는 2010년 "이중 푸리에 급수의 L^1-수렴성에 대한 필요조건들" [11] 결과를 발표한다. 그가 최근 공동연구를 통해 발표한 "이중 삼각계 적분의 르베그 총합가능성" [3] 과 "단일 혹은 이중 삼각계급수의 L^p-수렴성에 대한 필요조건들" [2] 의 두 논문들이 주목받고 있다. 이제 그의 $L^p(T^2)$-수렴성에 관한 연구 결과들 중 주목되는 몇가지 정리들의 특징을 고찰해본다.

먼저 [15] 에서 다니엘 워터만 (Daniel Waterman) 과 공동연구를 통해 "일반화된 유계변동 계수를 가진 이중 푸리에 급수의 수렴성" 을 소개하는데 이 결과는 [6] 에서 보인 이중 삼각계 급수 대신 이중 푸리에 급수에 관한 유계변동 계수를 더 일반화 것이다. [15] 의 이중 푸리에 급수 (2) 와 [6] 의 이중 삼각계 급수 (6) 에서 두 식 모두 알프레드 프링스하임 (Alfred Pringsheim)[6) 의미의 같은 도구를 사용하여 수렴성을 정의하지만 [15] 에서는 더 일반화된 정규적인 수렴성 (regularly convergence) 을 보이고 [6] 에서는 제안된 조건의 강한 정규적 수렴성 (strongly regular convergence) 을 각각 보임으로써 다른 결론을 유도한다. 특히 [15] 에서 그들은

$$\triangle_{10}a_{mn} = a_{mn} - a_{m+1,n}, \quad \triangle_{01}a_{mn} = a_{mn} - a_{m,n+1}$$
$$\triangle_{11}a_{mn} = a_{mn} - a_{m+1,n} - a_{m,n+1} + a_{m+1,n+1}$$

를 이용, 이중 복소계수 수열 $\{a_{mn}\}$ 이 $m,n = 0,1,2,\cdots$ 일때

$$\lim_{|n|\to\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\Delta_{10}a_{mn}| = 0, \qquad \lim_{|m|\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\Delta_{01}a_{mn}| = 0 \tag{12}$$

와

$$\lim_{j\to\infty}\sup\frac{1}{p}\sum_{|m|=j}^{j+p-1}|m|\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\triangle_{11}a_{mn}| \le K,\ \lim_{k\to\infty}\sup\frac{1}{q}\sum_{|n|=k}^{k+p-1}|n|\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\triangle_{11}a_{mn}| \le K \tag{13}$$

를 만족함을 보인다. 여기서 $p, q(\in \mathbb{Z}^+)$ 는

$$p = [\lambda m] - m + 1, \quad q = [\lambda n] - n + 1$$

이고 $[\cdot]$ 는 최대 정수부분을 나타내고 고정된 값 $1 < \lambda_0 \le 2$ 에 대하여 λ 는 구간 $1 < \lambda \le \lambda_0$ 위에 정의된 실수이다. 더욱이 [15] 에서 거의 모든 점에서 이중 푸리에 급수 (2) 의 수렴성에 관한 충분조건을 주 정리에서 소개하고 $f(t,u)(\in L^1(T^2))$ 의 적분가능성과 이중 푸리에 계수수열 a_{mn} 이 표현되는 일반화된 조건의 성질을 보인다. 좀더 구체적으로 살펴보면 이중 복소계수 수열 $\{a_{mn}\}$ 이 (12) 와 (13) 을 만족한다고 가정하고 만약 $f(t,u)(\in L^1(T^2))$ 에 대한 이중 푸리에 급수가 (2) 로 정의되면

$$\lim_{m,n\to\infty}||S_{mn} - f||_{L^1(T^2)} = o(1)$$

6) (1850–1941) : 독일 수학자. 무한급수의 총합 가능성과 유계변동 그리고 프링스하임 정리로 잘 알려져있다.

L^1-놈(norm)에 대해서 직사각형 부분합이 본래 주어진 함수에 수렴함을 보인다. 한편 그는 1994년 대만 국립 칭화(Tsing Hua) 대학교 첸(Chen) 그리고 우(Wu)와 함께 "다중 삼각계 급수 점별수렴성" [1]에 대하여 소개한다. 이 연구는 1년전 첸(Chen)과 우(Wu)가 연구[7)]한 결과를 더 일반화 것인데 이 논문에서 제한된 의미의 수렴성과 제한되지 않은 의미의 수렴성에 관한 조건을 각각 소개하고 특히 다중 삼각계 급수의 계수가 특정조건인 유한차수의 차분(finite-order differences)조건을 만족함을 보인다. 또한 (1)에서 정의된 2차원 토러스 T^2의 부분집합 E를 정의하고 직사각형 부분합 (3)과 세자로 평균 (5) 그리고 제안된 의미의 수렴성의 성질을 이중 푸리에 급수의 점별 수렴성을 보이는 데 활용한다. 조금 더 자세히 살펴보면 유한차수의 차분(finite-order differences)

$$\begin{aligned}
&\triangle_1^0 c_{mn} = c_{mn}, \\
&\triangle_1^1 c_{mn} = c_{mn} - c_{m+1,n} \quad (m \geq 0) \\
&\triangle_1^1 c_{mn} = c_{mn} - c_{m-1,n} \quad (m < 0) \qquad -\infty < m,n < \infty \\
&\triangle_1^p c_{mn} = \triangle_1^1(\triangle_1^{p-1} c_{mn}) \quad (p \geq 2)
\end{aligned}$$

과 $E \subset T^2$를

$$t_0 = \inf\{|t| : (t,u) \in E\} > 0 \quad y_0 = \inf\{|u| : (t,u) \in E\} > 0$$

처럼 각각 정의한다. 만약 이때 주어진 E에 대해 제안된 의미의 수렴성 조건 몇가지를 만족하고 $f(t,u) \in L^1(T^2)$ 에 대하여 이중 삼각계 급수 (6)이 $f(t,u)$의 이중 푸리에 급수가 되면 직사각형 부분합 (3)은 주어진 함수 $f(t,u)$의 거의 모든 점에서 수렴됨을 보인다. 그리고 그는 6년 뒤 2010년 [11]의 주정리 2에서 2차원 토러스 (1)상에서 정의된 이중 푸리에 급수 (2)와 직사각형 부분합(3)과 주어진 함수의 L^1-놈(norm)을 이용하여 $m,n \to \infty$ 일때 만약

$$f(t,u) \in L^1(T^2) \quad \text{이고} \quad ||S_{mn}[f(t,u)] - f(t,u)|| = o(1)$$

이면 이중 푸리에 계수 c_{mn} 가

$$\sum_{m=[\frac{k}{2}]}^{2k} \sum_{n=[\frac{l}{2}]}^{2l} \frac{|c_{m,n}| + |c_{-m,n}| + |c_{m,-n}| + |c_{-m,-n}|}{(|m-k|+1)(|n-l|+1} \to 0 \tag{14}$$

을 만족함을 소개한다. 여기서 이중 푸리에 급수 (2)의 L^1-수렴성을 대칭 직사각형 부분합 (3)으로 표현하여 논하는 것인데 만약 $m = n$인 정사각형 부분합 $S_{mm}(f;t,u)$ 일 경우에는 이중 푸리에 급수의 L^1-수렴성을 주정리처럼 보일 수 없다. 따라서 주정리에서 주어진 이중 푸리에 급수의 L^1-수렴이기 위한 식 (14)는 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

다음 결론에서는 19세기초 푸리에(Jean Baptiste Joseph Fourier) 부터 21세기초 모리츠(Ferenc Móricz)까지 스승과 제자 관계인 학문적 소계보등을 조사하여 밝힌다.

7) Chang-Pao Chen, Hui-Chuan Wu F. Móricz, Pointwise convergence of double trigonometric series, J. Math. Anal. Appl., Vol. 172, issue 2(1993), 600-601

3 결론 : 모리츠의 학문적 소계보와 연구경향 그리고 $L^p(T^2)$-수렴성 연구 소계보

결론으로 조셉 푸리에부터 페렌츠 모리츠까지 학문적 스승과 제자 관계를 조사한 학문적 소계보를 고찰하여 밝히고 모리츠의 연구경향과 단순 $L^p(T^2)$-수렴성에 관한 연구계보를 도표로 제시한다.

조셉 푸리에는 프랑스 혁명 격변기에 정치에 관여하여 순탄치 않은 삶을 보낸 탓에 그의 나이 59세인 1827년이 되어서야 구스타프 디리클레 (Peter Gustav Lejeune Dirichlet) 와 조반니 플라나 (Giovanni Plana) 를 제자로 두게된다. 그 이후로 지금까지 약45,500 명[8] 의 후학들이 있다. 이어서 디리클레는 1827년 스승 푸리에와 시몽 데니스 푸아송 (Simeon Denis Poisson) 의 도움으로 "페르마의 마지막 정리에 관한 부분적 결과들 (Partial Results on Fermat's Last Theorem, Exponent 5)" 을 연구하여 학위를 받는다. 그 후 그는 독일의 라인프리드리히-빌헬름스 본 (Bonn) 대학에 재직하며 6명의 제자를 두게 된다. 디리클레의 제자 중 레오폴드 크로네커 (Leopold Kronecker) 와 루돌프 립쉬츠 (Rudolf Otto S. Lipschitz) 가 있으며 이들은 베를린 (Berlin) 대학에서 1845년과 1853년에 각각 학위를 받는다. 한편 루돌프 립쉬츠의 제자로는 클라인 (C. F. Klein) 이 유일한데 클라인은 1868년 본 (Bonn) 대학에서 그의 스승 루돌프 립쉬츠로부터 "선-좌표간의 일반 2차방정식 표준형태 치환에 대하여 (Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form)" 를 연구하여 학위를 받는다. 이후 클라인은 독일의 뉘른베르크 (Nürnberg) 대학에서 제자 칼루이스 페르디난트 폰 린데만 (Carl Louis F.V. Lindemann) 에게 1873년 학위를 수여한다. 이어 린데만은 독일의 쾨닉스베르크 (Königsberg) 대학에서 후학들을 지도하여 48명의 제자를 두는데 이 중에는 다비트 힐버트 (David Hilbert) 가 있다. 힐버트는 1885년 스승 린데만으로부터 "특별한 구면 함수에서 특정 성질을 가진 이항형식 불변성에 관하여 (Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen)" 를 연구하여 학위를 받고 1895년 괴팅겐 대학 교수로 임명되고 무려 75명의 제자와 약 22,000명의 후학을 두게 된다. 1900년 그는 수학적 문제 23개 목록을 작성하여 파리의 수학대회의 강연에서 수학 공리주의 방향을 새롭게 제시한다. 한편, 세게드대학 명예 전당에 있는 힐버트 제자 알프레드 하르 (Alfred Haar) 는 1909년 스승 힐버트 (Hilbert) 로 부터 괴팅겐 (Göttingen) 대학에서 "직교 함수체계의 이론 (Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme)" 의 연구로 학위를 받은 후 세게드 대학에서 교수로 줄곧 재직하게 된다. 알프레드 하르 제자로는 벨라 나기 (Béla S. Nagy) 가 있다. 벨라 나기는 알프레드 하르와 또 다른 스승 프리제시 리츠 (Frigyes Riesz) 의 지도를 받아 "함수의 동형 체계에 관하여 (On isomorphic systems of functions)" 라는 논문으로

8) The Mathematics Genealogy Project 2015.7. 인용자료 (이하 동일 인용).

세게드 대학에서 1936년에 학위를 받는다. 벨라 나기(Béla S. Nagy)의 제자 중 현재 세게드 대학 보여이 수학연구소에서 푸리에 급수 수렴성 등에 관하여 활발한 연구를 진행중인 페렌츠 모리츠(Ferenc Móricz) 명예교수가 있다. 모리츠는 세게드대학 박사학위과정 중인 1962년 "직교급수의 리츠합에 관하여"[9)]를 발표하고 이어 1963년 "하르 체계의 관점에서 급수의 무조건적인 수렴에 관하여"[10)]를 발표하게 된다. 그후 1967년 그는 28세에 학위를 받게된다. 한편 수학계보 프로젝트(The Mathematics Genealogy Project)에서는 그의 학위 논문이 "수렴성, 총합가능성, 그리고 직교급수의 점근적 행태에 관한 연구들(Studies on the convergence, summability, and asymptotic behavior of orthogonal series)" 이라고 소개하지만 모리츠교수는 자신은 연구실적 목록에서 "푸리에 급수의 무조건적인 수렴에 관하여"[11)]를 학위 논문이라고 밝히고 있다.

결론적으로 모리츠의 연구경향을 종합해보면 1960년대 후반부터 1980년대 중반까지 약 20년 동안 90여편의 그의 연구는 주로 직교급수(orthogonal series), 승법체계(multiplicative systems), 다중급수(multiple series) 그리고 부분합(partial sums) 등에 집중되어 있다. 그리고 1980년대 중반 이후부터는 이중 직교급수(double orthogonal series)와 다중 직교급수(multiple orthogonal series)에 관심을 보이는 연구 결과물을 발표한다. 특히, 1986년 이후 이중푸리에 급수에 관하여 논하기 시작하는데 노르룬드 평균(Nörlund means)과 세자로 평균(Cesàro means)등을 이용한 근사를 주로 연구한다. 1990년에 들어서면서 그는 이중 삼각계급수의 계수의 유계변동(bounded variation)에 관하여 관심을 보이고 1994년에는 이중 푸리에 급수의 $L^1(T^2)$-수렴성을 직사각형 부분합(rectangular partial sum)과 페에르 평균(Fejér means)을 이용하여 보인다. 그는 페에르 연산자 상한을 비롯하여 각종 연산자(operator)에 관한 학문적 관심으로 세자로(Cesàro) 연산자, 페에르(Fejér) 연산자, 리이만(Riemann) 연산자, 하우스도르프(Hausdorff) 연산자, 콥슨(Copson) 연산자, 힐버트(Hilbert) 연산자, 토우버 조건(Tauberian condition) 등에 관하여 많은 논문을 발표한다. 그리고 르베그 총합가능성에 관한 관심을 보인 연구결과를 2008년과 2014년에 각각 소개한다. 그는 2010년 기존에 알려진 단일 푸리에 급수의 $L^1(T^1)$-수렴성을 이중 푸리에 급수의 $L^1(T^2)$-수렴성으로 확장하여 2π 주기를 가진 르베그 적분가능한 복소함수 $f(t,u) \in L^1(T^2)$에 대한 푸리에 급수와 이중 푸리에 계수, 직사각형 부분합 그리고 f의 놈(norm)을 이용하여 부분합과 본래 함수가 L^1-놈(norm)에서 수렴하면 푸리에 급수의 $L^1(T^2)$-수렴성을 보장하는 푸리에 계수의 필요조건을 소개한다. 그는 최근에도 열정적인 연구를 계속하여 2014년에는

9) Ferenc Móricz, Uber die Rieszsche Summation der Orthogonalreihen, Acta Sci. Math. 23 (1962) 92–95.

10) Ferenc Móricz, On unconditional convergence of series in terms of a Haar system, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 27 (1963) 1229–1238.

11) Ferenc Móricz, On the unconditional convergence of Fourier series, Ph. D. Thesis, University of Szeged, Hungary, 1967.

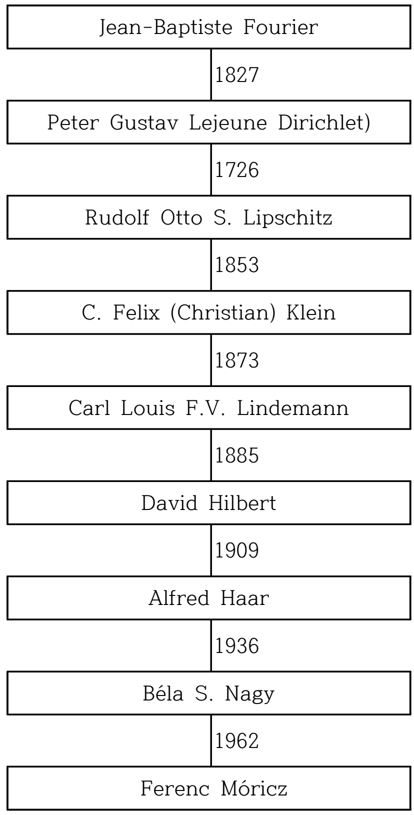

Figure 1. The minor lineage of study from Fourier to Moritz; 푸리에부터 모리츠까지 학문적 소계보

무려 6편의 연구결과를 발표한다. 그 중 주목을 끄는 2014년 연구 중 [3]에서 기존 소개된 단일 삼각계 급수의 르베그 총합가능성 및 단일 삼각계 적분정리들을 이중 삼각계 급수의 르베그 총합가능성과 이중 삼각계 적분으로 각각 확장하여 보이고 [2]에서는 하디-리틀우두 부등식(Hardy-Littlewood inequality)과 번스타인-지그문드 부등식(Bernstein- Zygmund inequality)을 이용한 이중 삼각계 급수의 수렴성을 보이기 위해 이중 삼각계 급수의 계수들의 필요조건을 각각 제시한다.

페렌츠 모리츠는 그의 나이 50세에 접어들어서 오히려 더 왕성한 연구활동으로 1990년부터 2000년 사이에 약 100여편의 논문을 발표하기에 이른다. 그 동안 페렌츠 모리츠는 세게드대학에서 제자들을 지도해오면서 무려 약 350편의 경이로운 연구 논문을 지금까지 발표해 오고 있다. 그는 현재도 세계적인 수학연구소 '보여이(Bolyai)'에서 연구하고 있으며 특히 2014년 한해 동안 공동연구를 통해 6편의 논문을 발표하는 등 이중 푸리에 급수에 관한 총합가능성 및 그의 관심분야를 계속 연구중이다. 끝으로 페렌츠 모리츠의 $L^p(T^2)$-수렴성 연구 소계보를 도표로 제시한다.

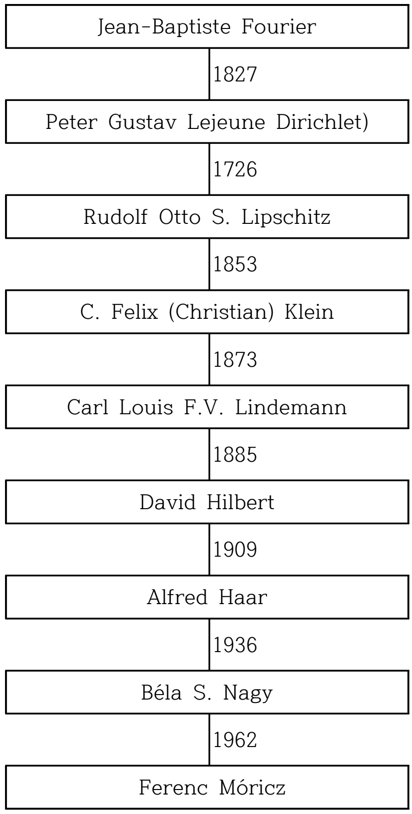

Figure 2. The minor lineage of $L^p(T^2)$-convergence study of Moritz; 모리츠의 $L^p(T^2)$-수렴성 연구 소계보

References

1. Chang-Pao Chen, Hui-Chuan Wu, F. Móricz, Pointwise convergence of multiple trigonometric series., *J. Math. Anal. Appl.* 185(3) (1994), 629–646.
2. X. Z. Krasniqi, P. Kórus, F. Móricz, Necessary conditions for the L^p-convergence $(0 < p < 1)$ of single and double trigonometric series., *Mathematica Bohemica* 139(1) (2014), 75–88.
3. L. Krizsan, F. Móricz, The Lebesque summability of double triginometric integrals, *Mathematical Inequalities & Applications* 17(4) (2014), 1543–1550.
4. Lee Jung Oh , A brief study on Bhatia's research of L^1-convergence, *The Korean Journal for History of Mathematics* 27(1) (2014), 81–93.
5. Lee Jung Oh, On Classical Studies for the Summability and Convergence of Double Fourier Series, The Korean Journal for History of Mathematics, 27(4) (2014), 285–297.
6. F. Móricz, Convergence and integrability of double trigonometric series with coefficients of bounded variation, *Proc. Am. Math. Soc.*102(3) (1988), 633–640.
7. F. Móricz, On the integrability of double cosine and sine series. I., *J. Math. Anal. Appl.*

154(2) (1991), 452–465.

8. F. Móricz, On the integrability of double cosine and sine series. II., *J. Math. Anal. Appl.* 154(2) (1991), 466–483.
9. F. Móricz, L^1-convergence of double Fourier series., *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 186 (1994), 209–236.
10. F. Móricz, On the maximal Fejér operator for double Fourier series of functions in Hardy spaces., *Stud. Math.* 116(1) (1995), 89–100.
11. F. Móricz, Necessary conditions for L^1-convergence of double Fourier series, *J. Math. Anal. Appl.* 363 (2010), 559–568.
12. F. Móricz, M. Bagota, On the Lebesgue summability of double trigonometric series, *J. Math. Anal. Appl.* 348 (2008), 555–561.
13. F. Móricz, B. E. Rhoades, Approximation by Nörlund means of double Fourier series for Lipschitz functions, *J. Approximation Theory* 50 (1987), 341–358.
14. F. Móricz, Shi, Xianliang, Approximation to continuous functions by Cesàro means of double Fourier series and conjugate series, *J. Approximation Theory* 49 (1987), 346–377.
15. F. Móricz, Daniel Waterman, Convergence of double Fourier series with coefficients of generalized bounded variation., *J. Math. Anal. Appl.* 140(1) (1989), 34–49.