대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 17, No. 4, 633 ~ 652. Dec 2015

중등 수학교사의 과제 이해 및 변형 능력 : 인지적 노력 수준 중심으로[1)]

김 정 은[*] · 이 수 진[**] · 김 지 수[***]

본 연구에서는 중등 수학 교사가 수업 목표와 함께 제시된 교과서의 수학 과제를 해결하는 데 요구되는 인지적 노력수준 (Stein, Grover, & Henningsen, 1996)을 어떻게 이해하며, 과제에 대하여 실제 유발된 학생들의 인지적 노력 수준을 어떻게 선별하고, 그 학생에게 더 높은 인지적 노력 수준을 유발할 수 있도록 어떻게 과제를 변형하여 제기하는지 살펴보았다. 이를 위하여, 중학교 함수 영역의 설문지를 개발하여 현직 중고등학교 교사 50명을 대상으로 설문을 실시한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 첫째, 대부분의 교사들은 수업 목표에 따라 낮은 수준의 과제와 높은 수준의 과제를 적절하게 선별할 수 있었지만, 높은 수준의 과제를 높은 수준의 과제라고 선택하는 기준이 학생들의 인지노력 수준보다는 과제의 외형적 요소였다. 둘째, 비록 주목하는 부분은 다르더라도 대부분의 교사들은 학생들에게 유발된 인지적 노력 수준을 적절히 판단할 수 있었고, 이를 기반으로 그 학생들에게 높은 인지적 노력 수준을 유발할 수 있는 과제로 변형할 수 있었다. 셋째, 교사들은 더 높은 인지적 노력 수준이 유발되는 과제로 변형하기 위하여 다양한 방식(문제 상황의 일반화, 조건 또는 맥락의 변화)을 이용하였는데, 실생활 관련 소재로 맥락화하는데 한계를 느끼는 교사들이 많았다.

Ⅰ. 서 론

교사는 학생들의 가까이에서 학생들이 어떤 활동과 과정을 통해 수학적 개념을 이해하고 활용하게 할지 수업을 구상하며 교육과정의 목표를 실현할 수 있도록 영향력을 발휘한다. 그런데, 교사가 학생들에게 무엇을 어떻게 가르칠지의 중심이 되는 것은 수학과제(Mathematical Task)이므로 교사가 교육과정의 목표를 실현할 수 있는 수학과제를 선택하고 활용하는 능력은 매우 중요하다. 과제에 따라 학생들의 수업 참여도가 달라지며 궁극적인 수학 학습기회는 학생의 활동에 의해 결정된다는 선행연구들은 과제의 중요성을 더욱 부각시키고 있다(김성희 · 방정숙, 2005). 또한 미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics, 2000)는 가치 있는 수학과제가 중요한 수학적 아이디어를 소개하고 학생들이 지적으로 참여하고 도전하도록 하며 학생들의 호기심을 돋우고 수학을 하도록 이끈다고 하였다. Stein & Smith(1998)는 학생들이 과제에 참여하고 성공적으로 해결하기 위해 어느 정도의 사고가 필요한지를 일컫는 인지적 노력 수준의 정도에 따라 수학과제를 분류하였는데,

* 목포중앙여자중학교, cuteju7@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, sjlee@knue.ac.kr (교신저자)
*** 분당중앙고등학교, bestsoo27@hanmail.net
1) 본 연구는 김정은(2015)의 석사학위논문을 재분석하고 수정, 보완하여 작성되었음을 밝힙니다.

학습 효과가 극대화 되기 위해서는 과제가 높은 수준의 사고, 추론을 지속적으로 조장해야 하며, 그러한 학생들의 추론, 문제해결 능력의 신장을 위해서는 인지적으로 도전적인 과제의 제시가 필요함을 말하였다.

수학교사들은 수업 전반에 걸쳐 교과서에 대한 의존도가 높고, 수업구성과정에서 교과서 및 교사용 지도서를 교실환경과 상황에 맞게 재구성하여 활용하고 있다(김민혁, 2013). 그러나 Stein & Smith(1998)의 분석틀에 따라 교과서의 수학과제들의 수준을 분석한 연구들을 보면 교과서의 수학과제가 대부분 낮은 인지적 노력수준의 과제들로 구성되어 있음을 공통적으로 말하고 있다(홍창준 · 김구연, 2012; 권지현 · 김구연, 2013; 김미희 · 김구연, 2013). 제시된 수학과제의 수준이 높다고 해서 반드시 학생들의 수학 수준이 높아진다고 말할 수는 없지만 높은 수준의 수학과제는 학생들의 높은 성취를 위한 필요조건(Stein, Smith, Henningnsen, Silver, 2009)이라는 점에서 교사들은 높은 수준의 과제를 설정할 수 있어야 한다. 또한 교과서가 대부분 낮은 인지적 노력 수준의 과제들로만 구성되어 있다면 교사들은 그 과제들을 높은 수준의 과제로 변형하여 제시할 수 있어야 하는데, 교사들의 수학과제에 대한 이해, 선별, 변형 능력을 살펴본 선행 연구들에 따르면 예비교사와 현직교사들 모두 과제를 변형하는데 어려움을 느낀다고 말하고 있다(이혜림 · 김구연, 2013; 김대영 · 김구연, 2014). 그러한 어려움의 원인 중 하나로, 과제의 인지적 노력 수준은 하나로 결정할 수 있는 것이 아니라 수학과제에 임하는 학생의 수학적 수준에 따라 노력 수준이 여러 가지로 다양하게 나타날 수 있다는 점인데, 지금까지 수학과제에 대한 연구 중 학생을 고려한 과제의 설정에 대한 연구는 국내외 모두 매우 부족하다.

이에 본 연구는 Stein & Smith(1998)의 인지적 노력수준이라는 분석틀을 이용하여 수학교사의 과제 이해 능력을 확인하고, 학생의 수준에 적합하며 높은 인지적 노력수준을 요구할 수 있는 과제로의 변형 과정에서 나타나는 양상을 살펴봄으로써 과제 제기 능력을 분석하고, 수학교사가 학생들을 고려하여 과제 설정 단계에서 적절한 역할을 할 수 있도록 지원 방법을 모색하고자 하였다. 이를 위한 구체적인 연구문제는 다음과 같다. (1) 교사들은 인지적 노력수준에 적합한 수학 과제를 어떻게 이해하여 선별하는가?; (2) 교사들은 학생에게 유발된 인지적 노력수준을 어떻게 평가하는가?; (3) 학생에게 더 높은 인지적 노력수준을 유발하기 위해 수학 과제를 어떻게 변형하는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학과제의 인지적 노력 수준

수학과제란 학생들의 수학적 아이디어의 계발을 위한 지적 배경을 제공하는 것으로써, 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 구성, 적용, 연습을 말하고(NCTM, 2000), 수학 아이디어를 계발하는데 기여하는 교실 활동의 일부분을 일컫는다(Stein et al., 2009). 본 절에서는 수학 과제를 분석하는 하나의 기준이 되는 Stein & Smith(1998)의 인지적 노력수준과 높은 수준의 수학과제의 가치에 대한 선행연구들을 분석한 내용을 기술하고자 한다. Stein & Smith(1998)는 인지적 노력수준에 따라 수학과제의 유형을 나누며, 여기서 인지적 노력수준(cognitive demand level)이란 “학생들이 주어진 과제에 참여하고, 성공적으로 해결하기 위해서 학생들에게 요구되는 사고의 종류와 수준”을 의미한다(Stein et al., 2009). 크게 낮은 수준(low-level)과 높은 수준

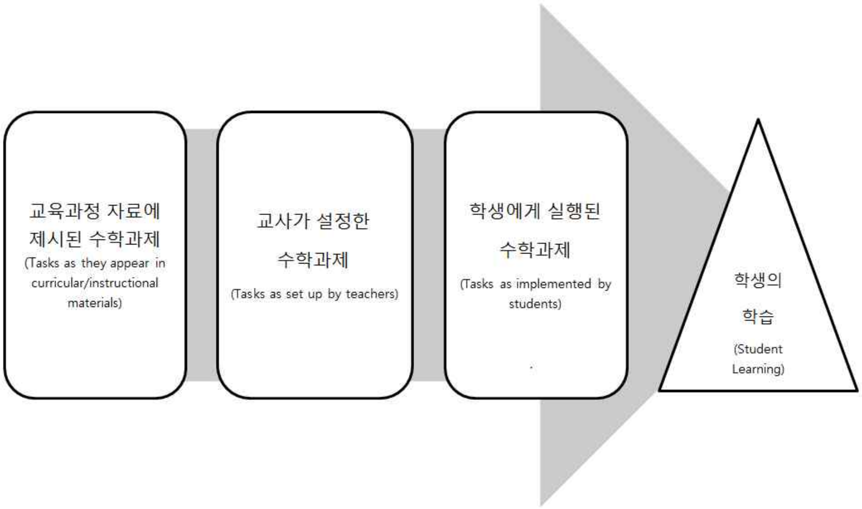
(high-level)으로 나눌 수 있고, 낮은 수준의 과제는 암기형 과제(Memorization tasks [M])와 연계성 없는 절차형 과제(Procedures Without Connections tasks [PNC])로 분류되고, 높은 수준의 과제는 연계성 있는 절차형 과제(Procedures With Connections tasks [PWC])와 수학 행하기 과제(Doing Mathematics tasks [DM])로 분류된다. 교사들은 이 분석틀을 이용하여 학생들이 수학적으로 높은 성과를 얻을 수 있도록 과제를 선별하고 구성할 수 있다. 각 유형의 특성을 정리하면 다음과 같다.

M과제는 학습자가 이전에 학습한 사실, 법칙, 공식 또는 정의를 재생하거나 그것을 기억하는 것과 연관된 과제이다. PNC과제는 분명한 해결 및 계산 절차가 존재하므로 알고리즘적이다. 사용되는 절차의 기초가 되는 개념이나 의미와 관련이 없고 절차 자체가 중심이 된다. 반면에 PWC과제는 과제에 내재되어 있는 개념적 아이디어와 밀접한 관계가 있는 일반적인 절차를 명백히 또는 넌지시 따르는 경로를 제시한다. 또한 일반적인 절차를 따를지라도, 생각 없이 따를 수 없고 학생들은 과제를 성공적으로 수행하고 이해의 수준을 높이기 위해 절차에 내재된 개념적 아이디어를 활용해야 하므로 연계성 없는 절차형 과제와 대조된다. 마지막으로 DM과제는 복잡하고 비알고리즘적 사고를 요구하는 과제로 학생들이 수학적 개념, 과정, 또는 관계의 성질을 이해하고 탐구하게하고 과제 해결을 하는 동안 자신의 인지적 과정을 스스로 점검하고 조절하도록 하는 등 상당한 인지적 노력을 요구한다. 우리나라 2009 개정 수학과 교육과정은 수학적 추론, 수학적 문제 해결, 수학적 의사소통과 같은 수학적 과정의 교수학습을 통해 미래 사회 구성원에 필요한 핵심 역량인 창의적 사고 능력, 문제 해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력을 증진시키기를 목표로 하고 있다(교육과학기술부, 2011). 이러한 교육과정의 목표는 단순히 기계적으로 알고리즘을 암기하여 적용하는 정도의 과제에서는 실현되기 어렵고, 높은 수준의 사고력을 필요로 하는 수학과제를 해결하는 과정에서 함양될 수 있다. High-level[2)]의 수학과제는 학생들의 의사소통에도 영향을 미치는데 이미연·오영열(2007)은 수업에서 M, PNC, PWC, DM 수준의 과제를 제시하고 모둠 안에서 학생들의 의사소통을 분석하였다. 그 결과 low-level과제는 답이 제한적이고 접근방식이 다양하지 않으므로 학생들을 의사소통에 참여하도록 유인하지 못하였고, 의사소통이 이루어지더라도 형식적으로 이루어지기 쉬운 반면, high-level과제는 해결방법이 다양해 활발하고 유의미한 수학적 의사소통을 가능케 하였다. 이처럼 high-level의 수학과제는 학생들이 과제를 해결하면서 수학적으로 사고하고 추론하면서 문제를 해결하고 활발한 의사소통이 가능케 함을 알 수 있다. 하지만 교과서 개발자가 의도한 수학 과제의 인지적 노력 수준과 교사가 과제를 학생들에게 제시하는 과정에서 드러나는 인지적 노력 수준과는 다를 수 있으며, 나아가 실제 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 학생들에게 유발된 과제의 인지적 노력 수준은 또 다를 수 있기 때문에 교사는 자신의 수업에서 활용할 수학 과제를 선정하는데 있어서 여러 요소를 고려해야 할 것이다.

2. 인지적 노력수준의 변화 양상

수학 과제의 인지적 노력수준은 고정되어 있는 것이 아니라 변화한다. 수학과제 프레임워크(Mathematical tasks framework) [그림 II-1]은 교육과정 자료나 교과서에 포함된 수학과제가 학생

2) 일반적인 사전적 의미의 '높은', '낮은'과 구분하기 위해 본 연구에서는 '높은 수준'과 '낮은 수준' 대신 Stein et al. (2009)의 용어를 그대로 차용한 'high-level', 'low-level'을 사용하도록 한다.



[그림 II-1] 수학과제 프레임웍(Mathematical tasks framework)
(Stein & Smith, 1998, p. 270)

에게 제시될 때까지 교실에서 일어나는 수학과제의 역동성을 잘 드러내 보여준다(Stein et al., 2009).

수학과제 프레임웍에서 수학과제는 세 단계로 나누어지는데 첫 번째는 교육과정이나 교과서에 표현된 과제, 두 번째는 과제 설정 단계에서의 과제, 세 번째는 수업에서 학생들에 의해 실행된 과제이다. 과제 설정단계에서의 수학과제는 교사의 입장에서 학생이 기대되는 것이 무엇인지, 그것을 어떻게 하기를 바라는지, 어떤 자료를 가지고 그렇게 할 것인지를 포함한다. 과제 실행 단계는 학생들이 과제를 풀기 시작했을 때부터 교사, 학생이 다른 과제로 관심 돌릴 때까지 실제 학생의 수행에 관한 것이다. 첫 번째 단계에서 두 번째 단계로 진행되는 과정에서 교사의 목표, 수업의 주제에 대한 지식과 학생에 대한 이해가 과제 설정에 영향을 주고, 두 번째 단계에서 세 번째 단계로 진행되는 과정에서 교실에서의 규범, 교사가 학생을 지도하는 습관 및 성향, 학생들이 학습하는 습관 및 성향이 과제의 수행에 영향을 준다(Stein, Grover, & Henningsen, 1996). 이렇듯 세 과정을 거치며 수학과제의 수준은 변화되고 각 단계가 진행되는 과정에서 교사는 중요한 역할을 한다.

수학과제의 설정에서 실행까지 인지적 노력수준이 어떻게 변화하는지 살펴본 연구들을 살펴보면, QUASAR 프로젝트에서 교사들은 high-level 과제를 찾고, 설정하는 데는 성공하였지만 단순히 high-level 과제를 선택하고 시작하는 것이 학생들의 인지적으로 복합적인 방식으로 사고하고 추론하는 것을 보장하지는 않았다. 실제로 high-level로 시작된 과제의 40%만이 실행단계까지 그 수준이 유지되었다(Stein et al., 1996; Stein el al., 2009에서 재인용). DM수준의 과제는 PNC수준, 비체계적인 탐구, 비수학적인 활동으로 쇠퇴할 수 있고, PWC수준의 과제는 PNC수준으로 쇠퇴할 수 있다. 여기서 비체계적인 탐구란 학생들이 과제를 진지하게 해결하려 하고, 추론, 규칙 찾기, 토론, 정당화 등의 수학적인 과정을 수행하려고 노력하지만, 그 과제에 내재된 중요한 수학적 개념을 이해하는 쪽으로 진행하지 못한 경우를 말한다. 또한 비수학적인 활동은 수

학과 관련 없는 활동을 하거나 동료와 이야기하는 경우를 말한다. 김성희·방정숙(2005)는 PWC 수준의 과제를 설정한 경우에도 PNC수준, 비체계적인 탐구로의 쇠퇴가 일어날 수 있음을 사례를 통해서 확인하고 인지적 수준 변화에 영향을 미치는 요인에 대하여 분석하였다.

3. 교사의 수학과제에 대한 이해, 선별, 변형 능력에 대한 선행연구

중등 교사의 수학과제에 대한 이해, 선별, 변형 능력을 연구한 국내 논문들을 살펴보면 (e.g., 이혜림 · 김구연, 2013; 김대영 · 김구연, 2014) 교사의 과제 선별 능력을 판별할 때, 교육과정의 목표나 NCTM(2000)의 규준을 달성하기 위하여 필요한 과제를 선택하는데 있어 high-level의 과제를 잘 선별하는지 평가하였는데, 평가의 대상이 되었던 교사들이 인지적 노력수준에 대한 배경지식을 가지고 있지 않은 상태에서 제시된 문항에 답하였기 때문에 교육과정의 목표나 규준을 high-level과제의 특성과 바로 연결시키기를 기대하기에는 너무 포괄적이고 광범위한 측면이 있었다. 또한 교과서의 과제의 인지적 노력 수준을 판별하는데 있어 과제와 학생을 서로 독립적인 변수로 연구하였는데, 본 연구에서는 과제와 학생 사이의 상호작용을 함께 연구했을 때 과제의 가치를 더 잘 판단할 수 있다(Lester & Kehle, 2003; Norton & Kastberg, 2012)는 전제하에 연구를 하였다. 즉, 본 연구는 기존의 교사의 인지적 노력 수준을 분석한 국내 연구들과는 '다르게' 교사들에게 '다르게' 명확한 수업의 목표 제시와 학생에게 유발된 인지적 노력 수준 고려라는 두 가지 변인을 추가하여 교사들의 인지적 노력 수준을 분석하였다는 점에서 차별화되었다고 볼 수 있다.

수학과제의 인지적 노력 수준을 판별하는데 있어서 학생의 이해가 중심이 되어야 한다는 점에서 구성주의 교수학습관에 일치한다고 볼 수 있다. 과제의 인지적 노력 수준을 고려할 때에 가장 중심이 되어야 하는 것은 학생들의 사고라는 것은 여러 구성주의 학자들에 의하여 논의되어 왔다(Norton & Kastberg, 2012; Simon & Tzur, 2004; Sztajn, Confrey, Wilson, & Confrey, 2012). Norton & Kastberg(2012)는 수학교수방법 수업의 일부로 수업에 참여하는 예비 중등 수학 교사와 고등학교 Algebra I 학생을 일대일로 짝을 지어주고, 12주 동안 매주 편지쓰기(letter writing)활동을 하게하였다. 예비교사들은 자신이 맡은 학생의 수준에 맞는 수학 과제를 개발하고 학생에게 풀어보게 한 뒤, 학생에게 실제 유발된 인지적 노력 수준을 고려하여 수학 과제를 다시 분석하고 변형하는 활동을 하였다. 논문에서는 특히 두 명의 예비교사를 대상으로 학생에게 과제를 제시하고 답안을 받는 과정 속에서 기대한 인지적 노력수준을 이끌지 못한 과제에 대해 어떻게 설명하고 자신이 맡았던 학생에게 더 높은 수준의 과제로 이끌기 위해 어떻게 수정하는지를 비교, 분석하였다. 두 교사는 학생에게 기대한 높은 수준의 인지적 노력 수준이 유발되지 않았을 때, 그 원인을 어디에 두느냐에 따라 변형한 문제의 종류와 그에 따라 학생에게 실제로 유발된 인지적 노력 수준의 차이가 있었다. 학생의 능력으로 귀인하여 학생이 문제를 해결할 수 있도록 문제에 힌트를 주는 방식으로 변형한 교사는 오히려 과제의 인지적 노력 수준을 떨어뜨리는 역효과가 있었고, 교사 자신에게 귀인한 교사의 경우에, 자신이 문항을 개발할 당시 고려하지 못했던 학생의 사고를 응답을 통하여 분석하고 이를 기반으로 변형하여 학생에게 DM 수준을 유발할 수 있었다.

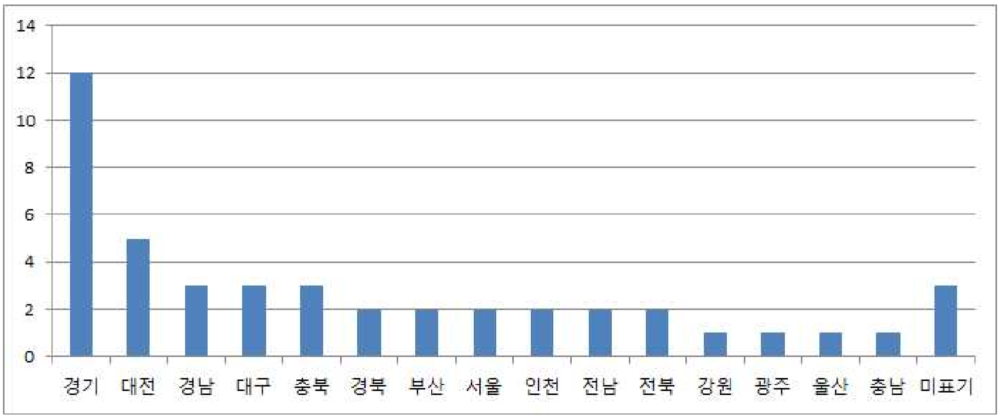
이는 교사가 과제를 선택하는 단계에서 학생에게 유발될 것이라고 생각되는 인지적 노력수준이 high-level이라고 할지라도 실제로 그 학생

에게 유발된 인지적 노력 수준은 다를 수 있고, 이에 대하여 교사는 그 학생의 인지구조를 이해하여 그에 맞는 수학과제로 변형하여 높은 수학적 사고력을 유발할 수 있도록 해야 함을 시사한다. 그러나 학생들의 사고를 매개체로 하여 교사의 과제의 인지적 노력 수준을 고려한 국내외 연구는 부족한 실정이며, 이에 본 연구에서는 수학교사가 교과서의 수학과제들을 어떻게 이해하여 선별하는지, 과제에 대한 학생의 응답을 어떻게 평가하고 그 학생에게 높은 인지적 노력 수준을 유발할 수 있도록 과제를 어떻게 변형하여 제기하는지를 살펴보고자 한다.

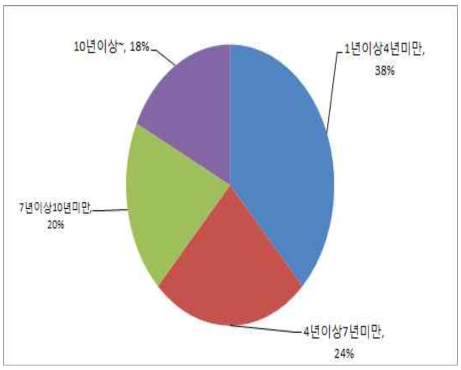
Ⅲ. 연구 방법

1. 연구대상

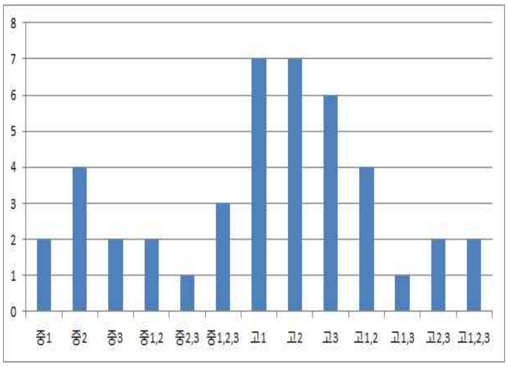
본 연구의 설문 대상자는 현재 중･고등학교에서 수학을 가르치고 있는 교사로서 접근이 용이한[3] 현직교사 50명에게 설문지를 배부하였으며 45부의 설문지가 회수되었다. 설문지 첫 장에서 조사한 설문 참여자의 일반적인 정보는 학교급, 담당학년, 교직경력, 현재 직위, 학부 전공 등 5가지 항목이다. 설문에 참여한 현직 중등 수학교



[그림 III-1] 응답 교사의 근무 지역



[그림 III-2] 응답 교사의 교직 경력



[그림 III-3] 응답 교사가 담당하는 학년

3) 대부분의 교사들은 당시 제2저자(교신저자)가 재직 중인 교육대학원에 재학 중이었다.

사들 중 중학교에 근무하고 있는 교사가 15명, 고등학교에 근무하고 있는 교사가 30명이었고, 현재 직위는 일반 수학교사, 수학교과 수석교사, 기간제 교사로 나누어 물었는데 응답한 교사 모두 일반 수학교사였다. 근무하고 있는 지역은 세종특별자치시와 제주도를 제외한 전 지역으로 구성되어 있었다[그림 III-1]. 교사들의 교직 경력을 조사한 결과 3년 이하의 경력을 지닌 교사들의 비율이 전체의 37.8%로 가장 높았고, 경력 10년 이하의 교사들이 전체의 84.4%로 설문에 참여한 대부분의 교사가 젊은 교사들이었다[그림 III-2]. 대부분 학부에서 수학교육을 전공(84.4%)하였으며, 수학을 전공(6.7%)하거나 통계학이나 응용수학과 같은 수학 관련학을 전공(2.2%)하기도 하였다. 또한 사범대학교에서 수학교육이 아닌 다른 전공을 이수하고 수학교육을 부전공한 경우(4.4%)도 있었다. 현재 가르치고 있는 학년에 대해서는 전체의 $\frac{1}{3}$에 해당하는 15명의 교사가 2개 이상의 학년을 담당하고 있었다. 각 교사가 담당하는 학년의 분포는 [그림 III-3]과 같다.

2. 도구

본 연구에서 사용한 설문지는 연구문제에 부합하도록 직접 제작하였고 구체적인 구성 요소는 다음과 같다. 교사가 교과서의 수학 과제를 주어진 상황에 적합하게 선별하는지를 알아보기 위해(연구문제 1), 하나의 소단원에 대한 네 수준의 과제들로 이루어진 보기를 제시하고 해당되는 과제를 선택하는 문항들로 설문지를 구성하였다. 특히, 검사 도구 문항의 신뢰도를 높이기 위하여 과제의 인지적 노력 수준을 기반으로 우리나라 2009 개정 교육과정 기반 수학 교과서를 조사한 선행연구에서 분석한 수학 과제들 중 선별하여 활용하였고, 이는 본 연구에서 중학교 함수 단원을 선택한 동기이기도 하다.

이 과제들 중 보기 2 <표 III-1>의 PNC수준의 과제는 인지적 노력수준에 따라 2009개정 교육과정을 따르는 교과서에서 선별하였으며 이를 제외한 보기 1 <표 III-1>과 보기 2의 모든 과제들은 홍창준(2011), 홍창준 · 김구연(2012)의 연구에서 분석한 것을 사용하여 같은 소단원에 속하는 문항들을 하나의 보기로 묶었다. 보기 1과 보기 2에 포함된 수학과제의 인지적 노력수준과 해당 단원, 학년은 <표 III-1>에 제시하였다. 제시한 목표에 따라 수학과제를 선별하는 문항은 총 5문항으로 중학교 1학년 함수 단원에 해당하

<표 III-1>교사의 수학과제 선별 능력을 살펴보기 위해 사용한 수학과제의 수준과 내용

과제		수준	단원	학년
보기 1[4]	가	PNC	Ⅳ. 함수 1. 함수의 그래프와 활용 1) 함수	중1
	나	M		
	다	PWC		
	라	DM		
보기 2	가	PWC	Ⅳ. 일차함수 1. 일차함수와 그래프	중2
	나	PNC		
	다	M		
	라	DM		

4) 구체적인 보기는 연구 분석 결과 [그림 IV-1]과 <표 IV-4>를 참고.

<표 III-2> 학생의 응답에 따른 교사의 과제 변형 능력 이해 위한 과제의 수준과 내용

과제		과제의 수준	학생	학생에게 유발된 수준	단원	학년
보기3	가	PWC	A	PWC	Ⅲ. 이차함수 2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 3) 이차함수의 최댓값과 최솟값	중3
			B	PNC		
	나	DM	C	PNC		
	다	M	D	M		
	라	PNC	E	PNC		

는 과제들로 구성된 보기1을 이용하는 문항 1, 2, 3번과, 중학교 2학년 일차함수 보기 2를 이용하는 문항 4, 5번으로 구성하였다.

또한, 교사가 과제와 그에 따른 학생의 응답을 보고 기존의 과제를 그 학생에게 적합한 high-level의 수학과제로 변형했는지를 알아보기 위해 (연구문제 2와 3), 하나의 소단원에 대한 네 수준의 과제들과 그에 따른 학생들의 풀이로 이루어진 보기를 제시하여 설문지를 구성하였다. 이 과제들 중 보기 3 <표 III-2>의 M, PNC, PWC수준의 과제는 이혜림(2013), 이혜림・김구연(2013)의 연구에서 분석한 것을 사용하였고, DM수준의 과제는 홍창준(2011), 홍창준・김구연(2012)의 연구에서 분석한 것을 사용하였다.

그리고 각 과제에 대한 학생의 풀이는 현직 중학교 교사인 제1저자가 작성하여 제2저자인 수학교육자와 두 명의 현장 교사가 개별적으로 학생에게 유발된 수준을 평가하였고 서로의 의견과 일치를 이뤄 설문 문항으로 사용하기로 결정하였다. 여기서 특징적인 점은 과제의 수준과 그에 따른 학생에게 유발된 수준을 같이 확인해야 한다는 점과 똑같은 과제임에도 불구하고 각 학생에게 다른 정도의 인지적 노력수준을 유발할 수 있다는 점이다. 이를 교사들이 인지할 수 있도록 같은 과제가 두 명의 학생에게 각기 다른 수준을 유발한 경우를 가장 먼저 보기에 제시하였고, 나머지 과제들도 과제의 제시 순서가 힌트가 되지 않도록 적절히 배치하였다.

보기 3 <표 III-2>에 포함된 수학과제의 인지적 노력수준과 그에 따른 학생의 풀이를 통해

1. 문제(가)와 학생A,B의 풀이를 읽고 물음에 답하세요.

1-1. 문제는 학생A에게 어느 수준의 사고를 유발했다고 생각하십니까?

□ 1수준 □ 2수준 □ 3수준 □ 4수준

① 학생 응답의 어떤 부분(특성) 때문에 그렇게 판단하셨습니까?

② 학생들이 그렇게 사고하는데 영향을 미친 과제의 특성은 무엇이라고 생각하십니까?

1-2. 문제(가)를 변형해 학생A에게 높은 수준(3,4수준)의 사고를 유발할 수 있는 문제를 만들어 보세요.

변형한 문제의 기대 수준을 체크해 주세요. (□3수준 □4수준)

선생님께서 개발하신 과제가 위 수준을 유발할 것이라고 생각하신 이유는 무엇입니까?

[그림 III-4] 수학과제가 학생에게 유발한 수준의 평가 및 변형에 대한 설문 문항

평가할 수 있는 학생에게 유발된 수준, 해당 단원, 학년은 <표 III-2>에 제시하였다. 제시한 목표에 따라 수학과제가 학생에게 유발된 수준을 평가하고 더 높은 인지적 노력수준으로 유발할 수 있는 과제로 변형하게 하는 문항은 중학교 3학년 이차함수 단원에 해당하는 과제들로 구성된 보기 3을 이용하는 문항으로 총 5문항으로 구성하였다. 이 5문항은 모두 [그림 III-4]와 같이 1문항내에 선택형, 단답형, 진술형을 포함한 6가지의 소문항으로 구성되었다.

또한, 설문 문항의 타당도를 높이기 위하여 선행연구(이혜림・김구연, 2013; 김대연・김구연, 2014)에서와 마찬가지로 설문지에서 사용되는 수학과제는 의미상 교과서의 수학문제와 크게 다르지 않으므로 교사들에게 익숙한 수학문제라는 표현으로 나타내었다. 또한 인지적 노력수준, M, PNC, PWC, DM수준과 같은 용어들을 그대로 사용하면 용어 자체가 낯설어 교사들이 거부감을 느낄 수 있으므로 풀어서 쓰고, 이해하기 쉽게 표현되도록 노력하였다. 예컨대, 인지적 노력수준은 그 의미대로 '학생들이 주어진 문제 해결에 참여하고 성공적으로 해결하기 위해서 학생들에게 요구되는 사고의 종류와 수준'이라고 풀어서 제시하고, 각 수준의 이름은 1, 2, 3, 4 수준이라고 쓰고, 1, 2수준을 낮은 수준, 3, 4수준을 높은 수준이라고 표현하였다. 문항의 신뢰도를 높이기 위하여, 개발한 검사지는 2명의 현직 중등 교사에게 예비실험을 실시하여 문항의 가독성 및 연구의 의도에 맞게 문항이 해석될 수 있도록 수정 및 보완 하였다.

3. 자료 수집 및 분석

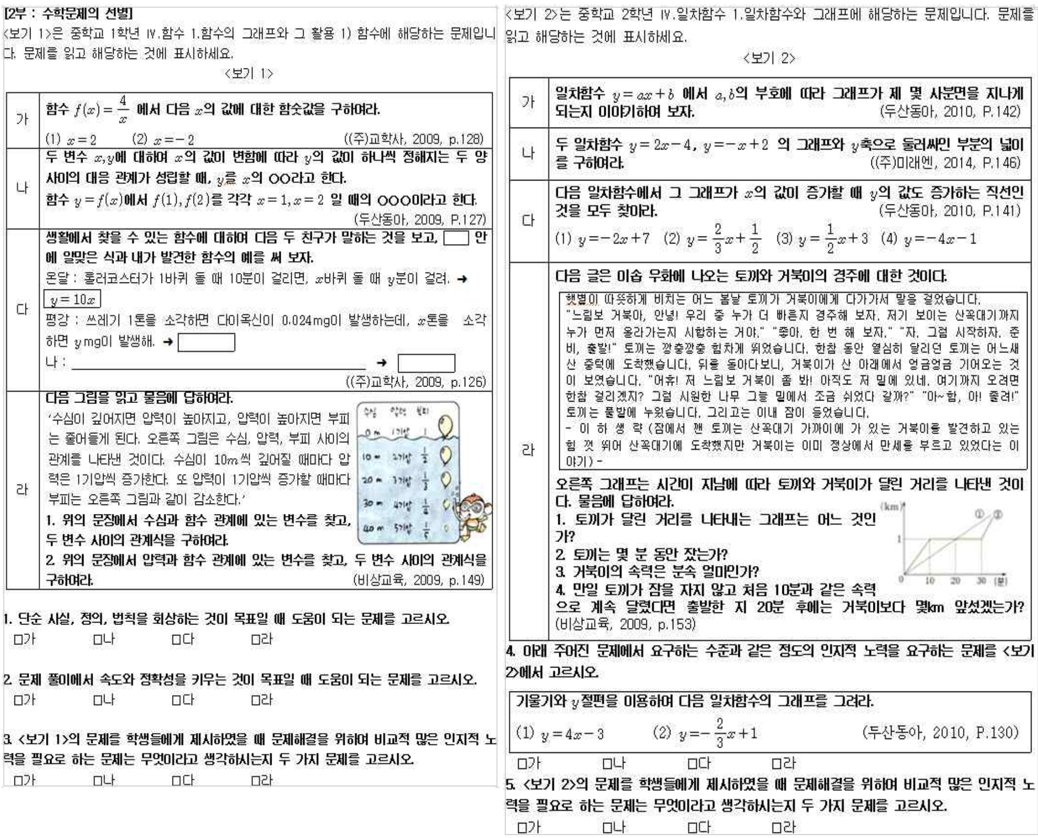
설문을 실시한 후 응답들을 문서화 하여 정리하였고, 선택형 문항과 단답형 문항에 대한 응답은 Microsoft Office Excel 2010과 SPSS 12.0에 입력하여 설문 참여자의 정보를 묻는 문항과 복수응답 문항 등의 선택형 문항은 빈도분석을 통하여 각각의 비율을 나타내었고, 교사들이 변형한 수학과제를 비롯한 진술형 문항에 대한 응답은 한글2010에 정리하여 분석하였다. 교사들이 변형한 과제가 해당 학생에게 유발할 수준에 대해서 연구진이 개별적으로 Stein & Smith(1998)의 인지적 노력수준에 따라 코딩하여 일치여부를 확인하였고 일치하지 않은 부분에 대해서는 합의하여 평정자간 신뢰도(inter-rater reliability)를 90% 이상으로 높이고자 하였다.

Ⅳ. 결과 및 분석

1. 수학과제의 선별

교사들의 인지적 노력 수준에 적합한 수학과제 선별 능력을 조사하기 위하여 제시한 문항 [그림 IV-1]에 대한 교사들의 응답을 분석한 결과는 다음과 같다. 문항 1은 Stein et al.(2009)의 인지적 노력 수준 분석틀에 따라 단순 사실, 정의, 법칙을 회상하는 것이 목표일 때 도움이 되는 과제를 고르라는 문항으로, 교사들은 보기1에서 M수준의 과제인 '나'를 선택해야 하는데, 전체의 86.7%에 해당하는 39명의 교사가 '나'를 선택하였고, 소수의 몇 명만 PNC 수준의 과제인 '가'를 선택했을 뿐 high-level 과제를 선택한 교사는 한 명도 없었다.

문항 2번은 문제 풀이에서 속도와 정확성을 키우는 것이 목표일 때 도움이 되는 과제를 고르라는 문항으로 보기1에서는 PNC수준의 과제인 '가'를 선택해야 한다. 전체의 82.2%인 37명의 교사가 '가'를 선택하였다. high-level의 과제를 선택한 교사도 5명(11.1%)있었지만 대부분의 교사들은 문제풀이에서 속도와 정확성을 키우는



[2부 : 수학문제의 선별]

<보기 1>은 중학교 1학년 Ⅳ.함수 1.함수의 그래프와 그 활용 1) 함수에 해당하는 문제입니다. 문제를 읽고 해당하는 것에 표시하세요.

<보기 1>

가	**함수 $f(x)=\frac{4}{x}$ 에서 다음 x의 값에 대한 함숫값을 구하여라.** (1) $x=2$ (2) $x=-2$ ((주)교학사, 2009, p.128)
나	**두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계가 성립할 때, y를 x의 OO라고 한다.** **함수 $y=f(x)$에서 $f(1), f(2)$를 각각 $x=1, x=2$ 일 때의 OOO이라고 한다.** (두산동아, 2009, P.127)
다	**생활에서 찾을 수 있는 함수에 대하여 다음 두 친구가 말하는 것을 보고, $\boxed{}$ 안에 알맞은 식과 내가 발견한 함수의 예를 써 보자.** 온달 : 롤러코스터가 1바퀴 돌 때 10분이 걸리면, x바퀴 돌 때 y분이 걸려. → $\boxed{y=10x}$ 평강 : 쓰레기 1톤을 소각하면 다이옥신이 0.024mg이 발생하는데, x톤을 소각하면 $y$mg이 발생해. → $\boxed{}$ 나 : ______ → $\boxed{}$ ((주)교학사, 2009, p.126)
라	**다음 그림을 읽고 물음에 답하여라.** '수심이 깊어지면 압력이 높아지고, 압력이 높아지면 부피는 줄어들게 된다. 오른쪽 그림은 수심, 압력, 부피 사이의 관계를 나타낸 것이다. 수심이 10m씩 깊어질 때마다 압력은 1기압씩 증가한다. 또 압력이 1기압씩 증가할 때마다 부피는 오른쪽 그림과 같이 감소한다.' **1. 위의 문장에서 수심과 함수 관계에 있는 변수를 찾고, 두 변수 사이의 관계식을 구하여라.** **2. 위의 문장에서 압력과 함수 관계에 있는 변수를 찾고, 두 변수 사이의 관계식을 구하여라.** (비상교육, 2009, p.149)

1. 단순 사실, 정의, 법칙을 회상하는 것이 목표일 때 도움이 되는 문제를 고르시오.

□가 □나 □다 □라

2. 문제 풀이에서 속도와 정확성을 키우는 것이 목표일 때 도움이 되는 문제를 고르시오.

□가 □나 □다 □라

3. <보기 1>의 문제를 학생들에게 제시하였을 때 문제해결을 위하여 비교적 많은 인지적 노력을 필요로 하는 문제는 무엇이라고 생각하시는지 두 가지 문제를 고르시오.

□가 □나 □다 □라

<보기 2>는 중학교 2학년 Ⅳ.일차함수 1.일차함수와 그래프에 해당하는 문제입니다. 문제를 읽고 해당하는 것에 표시하세요.

<보기 2>

가	**일차함수 $y=ax+b$ 에서 a, b의 부호에 따라 그래프가 제 몇 사분면을 지나게 되는지 이야기하여 보자.** (두산동아, 2010, P.142)
나	**두 일차함수 $y=2x-4$, $y=-x+2$ 의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.** ((주)미래엔, 2014, P.146)
다	**다음 일차함수에서 그 그래프가 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 직선인 것을 모두 찾아라.** (두산동아, 2010, P.141) (1) $y=-2x+7$ (2) $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$ (3) $y=\frac{1}{2}x+3$ (4) $y=-4x-1$
라	**다음 글은 이솝 우화에 나오는 토끼와 거북이의 경주에 대한 것이다.** 햇볕이 따뜻하게 비치는 어느 봄날 토끼가 거북이에게 다가가서 말을 걸었습니다. "느림보 거북아, 안녕! 우리 중 누가 더 빠른지 경주해 보자. 저기 보이는 산꼭대기까지 누가 먼저 올라가는지 시합하는 거야." "좋아. 한 번 해 보자." "자, 그럼 시작하자. 준비, 출발!" 토끼는 깡충깡충 힘차게 뛰었습니다. 한참 동안 열심히 달리던 토끼는 어느새 산 중턱에 도착했습니다. 뒤를 돌아다보니, 거북이가 산 아래에서 엉금엉금 기어오는 것이 보였습니다. "어휴! 저 느림보 거북이 좀 봐! 아직도 저 밑에 있네. 여기까지 오려면 한참 걸리겠지? 그럼 시원한 나무 그늘 밑에서 조금 쉬었다 갈까?" "아~함, 아! 졸려!" 토끼는 풀밭에 누웠습니다. 그리고는 이내 잠이 들었습니다. - 이 하 생 략 (잠에서 깬 토끼는 산꼭대기 가까이에 가 있는 거북이를 발견하고 있는 힘 껏 뛰어 산꼭대기에 도착했지만 거북이는 이미 정상에서 만세를 부르고 있었다는 이야기) - **오른쪽 그래프는 시간이 지남에 따라 토끼와 거북이가 달린 거리를 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.** **1. 토끼가 달린 거리를 나타내는 그래프는 어느 것인가?** **2. 토끼는 몇 분 동안 잤는가?** **3. 거북이의 속력은 분속 얼마인가?** **4. 만일 토끼가 잠을 자지 않고 처음 10분과 같은 속력으로 계속 달렸다면 출발한 지 20분 후에는 거북이보다 몇km 앞섰겠는가?** (비상교육, 2009, p.153)

4. 아래 주어진 문제에서 요구하는 수준과 같은 정도의 인지적 노력을 요구하는 문제를 <보기 2>에서 고르시오.

기울기와 y절편을 이용하여 다음 일차함수의 그래프를 그려라. (1) $y=4x-3$ (2) $y=-\frac{2}{3}x+1$ (두산동아, 2010, P.130)

□가 □나 □다 □라

5. <보기 2>의 문제를 학생들에게 제시하였을 때 문제해결을 위하여 비교적 많은 인지적 노력을 필요로 하는 문제는 무엇이라고 생각하시는지 두 가지 문제를 고르시오.

□가 □나 □다 □라

[그림 IV-1] 교사에게 제시한 보기1(왼쪽)과 보기2(오른쪽) 문항.

데 PNC 수준의 과제가 적합하다고 생각하고 있었다. 3번, 5번 문항은 학생들에게 제시했을 때 문제해결을 위해 비교적 많은 인지적 노력을 필요로 하는 과제를 선택하는 문항으로 교사들이 high-level의 과제를 선별할 수 있는지 확인하고, 4번 문항은 홍창준(2011)이 PNC수준이라 밝힌 과제를 제시하고 이와 같은 정도의 인지적 노력을 요구하는 과제를 선택하는 문항으로 PNC수준의 과제를 선별할 수 있는지 확인하였다. 3번 문항에서는 조건에 적합한 과제 두 개를 선택하라고 하였는데, 설문 참여자의 응답을 분석한 결과 high-level인 과제 '다'와 '라'로 정확히 선택한 응답자는 전체의 73.3%였다. DM수준의 과제인 '라'하나만 선택한 경우가 24.4%였고, M수준의 과제인 '나'와 DM수준의 과제인 '라'를 고른 교사가 한 명 있었다. 대다수의 교사가 high-level에 해당하는 과제를 정확히 골랐고, 설문에 참여한 모든 교사는 DM수준의 과제 '라'를 high-level로 인식함을 알 수 있다(표 IV-1).

<표 IV-1> 3번 문항(high-level 과제 선별)에 대한 응답 분석

과제(수준)	인원(명)	비율(%)
다(PWC), 라(DM)	33	73.3
나(M), 라(DM)	1	2.2
라(DM)	11	24.4
합계	45	100

문항 4, 5번은 보기 2에 제시된 네 가지 과제 중 각 문제에서 요구하는 수준과 같은 정도의 인지적 노력 수준을 요구하는 문제를 선택해야 하는데, 그 중 4번 문항은 PNC수준의 과제이므로 '나'를 선택해야 한다. PNC수준의 과제인 '나'를 선택한 비율이 44.4%로 가장 높았지만, PWC수준의 과제인 '가'를 선택한 비율도 33.3%로 뒤를 이었다 (표 IV-2). 많은 교사들이 PWC수준의 과제인 '가'를 선택한 것은 4번 문항에서 기울기와 y절편을 언급하고 있고, 과제 '가'에서 $y=ax+b$의 그래프에 대한 언급도 함수식에서 a가 기울기, b가 y절편이라는 사실을 연상하게 하므로 비슷한 형식의 과제라고 생각했기 때문인 것으로 보인다. 하지만 과제 '가'를 해결하기 위해서는 기울기와 y절편의 개념을 함수의 그래프와 연결 지어 사고할 수 있어야 하고 학생 스스로 각각의 부호에 따른 경우를 나누어 생각해야 하므로 개념적 아이디어에 대한 생각 없이 절차를 따를 수 없기 때문에 PNC수준의 과제와 구별되는 PWC수준의 과제이다.

<표 IV-2> 4번 문항(PNC수준 과제 선별)에 대한 응답 분석

과제	수준	인원(명)	비율(%)
가	PWC	15	33.3
나	PNC	20	44.4
다	M	8	17.8
라	DM	0	0
나, 다	PNC, M	1	2.2
가, 다	PWC, M	1	2.2
합계		45	100

5번 문항에서는 보기 1 [그림 IV-1]에서의 3번 문항과 같이 문제해결을 위하여 비교적 많은 인지적 노력을 필요로 하는 과제인 high-level 과제를 선택하는 것이므로 PWC수준의 과제인 '가'와 DM수준의 과제인 '라'를 선택해야 한다. 정확히 high-level과제 두 개를 고른 교사는 전체의 35.6%인 16명이었고, DM수준의 과제 '라'만 고른 교사가 33.3%로 그 뒤를 이었다 <표 IV-3>. 또한 문항 4번에서와 마찬가지로 문항 5번에서도 교사들은 PNC, PWC수준의 과제를 놓고 고민하였다는 것을 알 수 있는데, PNC수준의 과제인 '나'와 DM수준의 과제인 '라'를 선택한 교사가 24.4%로 비교적 높은 비율을 차지한 것을 보면 이를 확인할 수 있다. 또한 3번 문항에서와 마찬가지로 설문에 참여한 모든 교사는 DM수준의 과제를 high-level로 인식함을 알 수 있다.

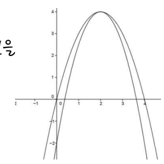
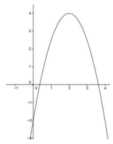
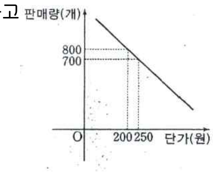
<표 IV-3> 5번 문항(high-level 과제 선별)에 대한 응답 분석

과제 (수준)	인원(명)	비율(%)
가(PWC), 라(DM)	16	35.6
나(PNC), 라(DM)	11	24.4
다(M), 라(DM)	3	6.7
라(DM)	15	33.3
합계	45	100

2. 학생에게 유발된 인지적 노력 수준의 평가 및 수학과제의 변형

교사들이 수학과제에 대한 학생의 응답을 평가하고, 각각의 학생에게 적합한 높은 인지적 노력 수준을 유발할 수 있는 과제로 변형할 수 있는지를 알아보기 위하여, 교사들에게 인지적 노력 수준과 각 수준의 특성을 정리하여 제시해 교사들이 인지적으로 더 많은 노력을 요구하는 과제라는 것이 무슨 의미인지를 이해하고 설문에 응할 수 있도록 하였다. 교사들은 <표 IV-4>에 제시된 보기 3의 수학과제와 그에 따른 학생에 응답을 평가하고, 그렇게 평가한 이유를 학생의 응답을 토대로 밝히고, 학생에게 그러한 수준을 유발하는데 영향을 미친 과제의 특성이 무엇

<표 IV-4> 중3 이차함수 단원에 해당하는 네 가지 수준의 과제

<table>
<tr><th colspan="2"><보기 3></th></tr>
<tr><td rowspan="2">가</td><td>이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최댓값은 $x=2$일 때 4이다. 이 함수의 그래프가 제2사분면을 지나지 않을 때, a의 값의 범위를 구하여라. (두산익힘책, 2011, p93)</td></tr>
<tr><td>[학생 A의 풀이]
최댓값이 $x=2$일 때 4이므로 이차함수의 식은 $y=a(x-2)^2+4$ 꼴이다. 그런데 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 그래프가 오른쪽과 같은 형태로 그려져야 한다. 즉, $f(0)\le 0$이어야 한다.
$f(0)=4a+4\le 0$이고 이를 풀면 $4a\le -4$이고 따라서 $a\le -1$이다.

[학생 B의 풀이]
$x=2$일 때 최댓값이 4이므로 $y=a(x-2)^2+4$
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">나</td><td>어떤 상품의 단가와 하루 판매량 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같은 직선이라고 한다. 이 상품의 단가가 200원일 때는 하루에 800개가 팔렸고, 250원일때는 하루에 700개가 팔렸다고 한다.
1. 오른쪽 그래프가 나타내는 일차함수의 식은?
2. 이 상품의 하루 매출액이 최대가 되려면 그 단가를 얼마로 정해야 하는가?
(비상교육, 2011, P.102)
</td></tr>
<tr><td>[학생 C의 풀이]
1. $y-800=\dfrac{700-800}{250-200}x+1200$, 따라서, $y=-2x+1200$
2. 몇 개의 값을 넣어보면
<table><tr><td>단가</td><td>200</td><td>250</td><td>300</td><td>400</td></tr><tr><td>매출액</td><td>$200\times800=160000$</td><td>$250\times700=175000$</td><td>$300\times600=180000$</td><td>160000</td></tr></table>
따라서 단가가 300원일 때 매출액은 최대가 된다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">다</td><td>다음은 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 최댓값과 최솟값에 대한 설명이다. (　　)안의 알맞은 말에 ○표 하여라. (두산익힘책, 2011, p.91)
(1) $a>0$일 때, $x=p$ 에서 (최댓값, 최솟값)은 q이고, (최댓값, 최솟값)은 없다.
(2) $a<0$일 때, $x=p$ 에서 (최댓값, 최솟값)은 q이고, (최댓값, 최솟값)은 없다.</td></tr>
<tr><td>[학생 D의 풀이]
(1) $a>0$일 때, $x=p$에서 (최댓값, 최솟값)은 q이고, (최댓값, 최솟값)은 없다.
(2) $a<0$일 때, $x=p$에서 (최댓값, 최솟값)은 q이고, (최댓값, 최솟값)은 없다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">라</td><td>수면 위에서 초속 $19.6m$로 수직으로 물을 뿜는 분수가 있다. x초 후의 물의 높이를 ym라고 하면 $y=19.6x-4.9x^2$ 의 관계가 성립한다. 물이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라. (두산익힘책, 2011, P.92)</td></tr>
<tr><td>[학생 E의 풀이]
이차함수는 $x=-\dfrac{b}{2a}$일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 $x=-\dfrac{19.6}{2\times(-4.9)}=2$ 일 때 최댓값을 가지므로
$y=19.6\times2-4.9\times2^2=19.6$</td></tr>
</table>

이라고 생각하는지 설명하도록 하였다.[5)]

보기 3의 과제 ‘가’를 해결하기 위해서는 꼭짓점의 좌표가 $(2,4)$인 다양한 이차함수의 그래프를 그려 보면서 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 위로 볼록이면서 y절편, 즉 $f(0)$이 0보다 작거나 같아야 함을 알아야 한다. 이 과제에 대해 학생A는 $x=2$에서 최댓값이 4라는 것을 이용해 절차적으로 이차함수 식을 $y=a(x-2)^2+4$꼴로 바꾸었지만 그런 형태의 식을 갖는 다양한 이차함수의 그래프를 좌표평면에 직접 그려보았고 두 가지 그래프를 관찰하면서 제2사분면을 지나지 않으려면 $f(0)$을 고려해야 함을 생각하고 $f(0) \le 0$이라는 식을 통해 답을 구할 수 있었다. 따라서 과제 ‘가’는 다양한 표현을 연결하고 절차를 따르더라도 생각 없이 따를 수 없는 PWC수준의 사고를 학생에게 유발했다고 평가할 수 있다. 반면, 학생B는 $x=2$에서 최댓값이 4라는 것을 이용해 기계적으로 이차함수 식을 $y=a(x-2)^2+4$꼴로 바꾸고 그 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 그래프 개형을 한 가지 그렸을 뿐 그 다음의 단계로 진행하지 못했다. 즉, 꼭짓점의 좌표가 (p,g)인 이차함수의 식은 $y=a(x-p)^2+q$꼴이라는 알고리즘에 적용하여 그래프를 그렸을 뿐 그 개념이나 의미에 대해서는 파악하지 못했으므로 과제 ‘가’는 학생B에게 PNC수준의 사고를 유발했다고 평가했다.

과제 ‘나’를 해결하기 위해 학생은 과제에서 주어진 그래프를 해석해 일차함수 식을 구하고, 매출액은 (판매량)×(단가)임을 인지하고 매출액을 구하는 식을 찾아야 한다. 그 후 매출액이 최대가 되기 위한 단가를 구하기 위해서는 이차함수가 최댓값을 갖게 하는 x값을 찾아야 함을 알고 이차함수의 그래프를 그리거나 식을 변형하거나 표에서 이차함수의 특징과 관련한 설명을 통하여 답을 구해야 한다. 그런데 직접적으로 이차함수 과제라는 것이 드러나 있지 않아 매출액을 어떻게 나타내야 할지에 대한 계획을 수학적 개념을 이용하여 학생 스스로 세워야 하므로 DM수준의 과제이다. 그러나 학생C는 매출액이 최대가 되기 위한 단가를 구하기 위해서 몇 가지 단가에 대한 매출액을 구해보았고, 그 중 단가가 300원일 때 매출액이 최대였기 때문에 단가가 300원일 때 매출액이 최대가 된다는 결론을 얻었다. 따라서 몇 가지 경우에 대해서만 확인한 후 정답을 얻어냈기 때문에 과제 ‘나’는 학생C에게 높은 인지적 노력수준을 이끌었다고 볼 수 없고, 단순한 절차만을 서술했으므로 PNC수준을 유발했다고 할 수 있다.

과제 ‘다’는 이전에 학습한 사실을 기억해서 선택만 하면 되는 과제이기 때문에 M수준 과제이고, 학생D가 더 높은 수준의 사고를 할 수 있는 학생일지라도 답에 동그라미를 치는 반응을 할 수 밖에 없어서 M수준을 유발했다고 평가했다. 그리고 과제 ‘라’는 실생활 소재를 이용한 과제이지만 상황을 고려할 필요 없이 이차함수 식 $y=19.6x-4.9x^2$을 완전제곱꼴로 변형해 최댓값을 구하면 되므로 수학적 개념이나 의미와 관련 없이 절차적으로 풀이할 수 있는 PNC수준의 과제이다. 학생E는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 $x=-\dfrac{b}{2a}$일 때 최댓값을 갖는다는 사실을 암기하고 있고 이를 이용해 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다는 사실을 이끌고, $x=2$에서의 함숫값을 구하였으므로 과제 ‘라’는 학생E에게 PNC수준을 유발했다고 평가했다.

교사들이 학생의 풀이를 보고 학생에게 유발된 수준을 제대로 평가하는지 분석하였을 때 평균 72%정도의 교사가 정확하게 응답하였으며, 89%의 교사가 low-level, high-level의 두 범주로

5) 구체적인 문항의 형태는 연구 방법 [그림 III-3]을 참고.

라도 학생에게 유발된 수준을 적절하게 평가할 수 있는 것으로 나타났다. 상대적으로 학생에게 유발된 수준에 대한 교사의 평가가 하나로 모이지 않았던 학생 A, B의 응답에 대해 교사가 학생 응답의 어떤 특성을 보고 그렇게 평가하였는지 분석하였다. 학생A에 대한 평가에서는 평가 수준에 따라 교사들이 학생의 응답 중 주목하는 부분이 달랐다. PWC수준을 유발했다고 평가하는 교사들은 대체로 학생이 다양한 방식의 표현을 연결한 점과, $f(0) \le 0$을 이끌어내기 위해서는 수학적 개념에 대한 이해가 필요하다는 것에 주목하는 경향이 있었다. 반면, PNC수준을 유발했다고 평가하는 교사들은 대체로 학생의 응답 중 정답에 주목하거나, 학생의 풀이가 알고리즘적이며 수학적 원리, 이유에 대한 설명 없이 절차를 단순히 기술하고 있다고 생각했다. 학생B에 대한 평가에서는 M수준을 유발했다고 평가한 교사와 PNC수준을 유발했다고 평가한 교사 두 유형 모두 대부분의 교사가 학생의 풀이 중 최댓값을 이용해 이차함수 식을 표준형으로 변환하는 알고리즘에 주목하여 해당 수준을 유발하였다고 평가하였다. 꼭짓점의 좌표가 (p,q)인 이차함수의 식은 $y=a(x-p)^2+q$꼴이라는 알고리즘에 숫자를 대입하고 그래프 개형을 그린 학생의 풀이를 너무 단순해서 절차를 사용하지 않았다고 평가하거나, 아니면 개념과는 연결되지 않지만 절차를 사용했다고 평가하였다. 교사들은 같은 부분에 주목하였음에도 불구하고 학생에게 유발된 수준을 다르게 평가하였지만 low-level을 유발했다는 것에 대해 공통적인 생각을 갖고 있었다.

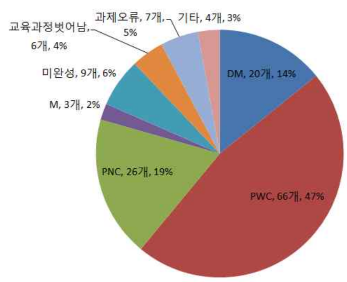
교사들이 수학 과제를 어떻게 변형하는지를 알아보기 위한 문항은 총 5개였는데, 각 문항은 <표 IV-4>와 같이 특정 수준의 수학과제가 학생에게 특정 수준을 유발하였을 경우에 각 학생에게 더 높은 인지적 노력수준을 유발할 수 있도록 수학과제를 변형하는 것이다.

<표 IV-5> 주어진 과제와 그에 따라 학생에게 유발된 수준

해당 설문 문항 번호	수학과제 (수준)	학생 (유발된 수준)
1-2	가(PWC)	학생A(PWC)
1-4	가(PWC)	학생B(PNC)
2-2	나(DM)	학생(PNC)
3-2	다(M)	학생D(M)
4-2	라(PNC)	학생E(PNC)

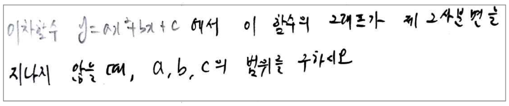
교사들이 변형해야 하는 과제와 기존 과제로 인해 학생에게 유발된 수준은 <표 IV-5>와 같다. 각 문항에 대한 응답률은 각각 75.6%, 57.8%, 77.8%, 60%, 51.1%로 평균 64.5%의 교사가 수학과제의 변형을 시도하였다.

교사들이 변형한 과제는 대부분 인지적 노력 수준에 따라 DM, PWC, PNC, M수준의 사고를 유발할 것이라고 분석되었지만 [그림 IV-2] 완성되지 않은 형태로 제시한 경우, 변형한 과제가 해당 학년까지의 교육과정 내에서 해결이 불가능한 경우, 과제 자체에 오류가 있는 경우, 기타 의견을 제시한 경우도 있었다. 교사들이 변형한 수학과제가 해당 학생에게 DM수준을 유발할 것으로 기대되는 경우가 20개로 14%, PWC수준을 유발할 것으로 기대되는 경우가 66개로 47%를 차지했다. 즉 교사가 변형한 수학과제의 61%가 학생에게 high-level을 유발할 것으로 기대됨을 확인할 수 있었다<그림 IV-2>.



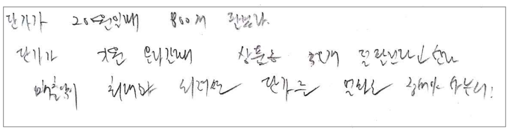
[그림 IV-2] 교사들이 변형한 수학과제의 기대 수준

기대 수준이 DM수준이라고 판단된 수학과제는 세 가지 유형으로 나눠볼 수 있었다. 먼저 문제 상황을 일반화해 수학적 개념에 대해 탐구하도록 유도하는 유형이 있었다. 두 번째로 조건 또는 맥락을 변형해 학생들에게 절차적인 사고만을 유발하지 않게 하고 학생이 자신의 풀이에 한계를 느끼고 수학적 개념을 사용해야 해결 가능하도록 변형한 유형이 있었다. 마지막 유형은 수학적인 개념에 대해 직접적으로 질문한 경우이다. [그림 IV-3], [그림 IV-4], [그림 IV-5]는 기대수준이 DM인 수학과제의 변형의 예들이다.



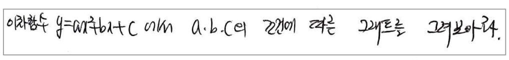
(문항 1-2에 대한 교사9의 응답)

[그림 IV-3] 기대수준이 DM인 수학과제의 변형의 예(1)



(문항 2-2에 대한 교사18의 응답)

[그림 IV-4] 기대수준이 DM인 수학과제의 변형의 예(2)



(문항 1-2에 대한 교사32의 응답)

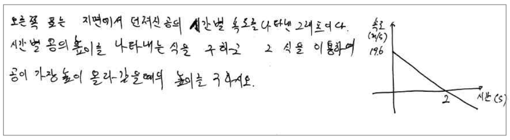
[그림 IV-5] 기대수준이 DM인 수학과제의 변형의 예(3)

교사들이 변형한 수학과제들을 보았을 때 학생의 풀이를 고려하여 변형했음을 느낄 수 있는 경우가 많았다. 학생의 풀이에서 절차적 사고를 유발했을 것으로 보이는 부분을 변경하기도 했고, 학생이 기존 풀이 방법의 한계를 느끼고 수학적 개념을 사용하도록 변형하기도 하고, 개념에 대한 이해 없이 암기하고 있는 절차만 적용했을 때는 오답이 나오는 상황을 만들기도 하였다. 학생의 풀이는 학생이 가지고 있는 수학적 지식을 대변하는 역할을 하였고 교사들이 이를 토대로 과제를 변형한 모습들은 수학과제의 변형에 있어서 학생을 고려할 때 실질적인 과제의 인지적 노력수준을 평가할 수 있음을 반영한다.

교사들이 변형한 수학과제에서 나타나는 또 하나의 특징은 교사들이 실생활과 관련된 과제나 응용된 과제로 변형하는 것을 어려워했다는 점이다. 여러 교사들은 실제 현상과 수학을 접목시키려고 시도하였으나 외형만 실생활을 반영하고 있어 맥락을 제거해도 전혀 관계없는 과제인 경우가 있었고, 현실을 제대로 반영하지 못해 현실과 괴리된 과제가 되기도 하였으며 과제 변형의 방향만 제시했을 뿐 변형을 완성하지 못한 경우도 있었으며, 과제 변형을 완성했으나 그 과제를 해결하기 위해서는 해당 학년의 교육과정의 범위에서 벗어난 지식이 필요한 경우가 있었다. 예를 들어 [그림 IV-6]의 수학과제를 해결하기 위해서 학생은 속도 개념을 알고 있어야 하는데 이는 고등학교 1학년 과학에서 다루는 내용이다. 이렇듯 타 교과의 내용을 접목시킬 경우에 학생들이 어느 정도의 배경지식을 갖고 있는지를 확인해야 하는데 교사가 전공과목이 아닌 타 교과의 교육과정을 숙지하고 있지 않기 때문에 교육과정의 범위를 넘는 과제를 만들 가능성이 있다.

high-level을 유발할 수 있도록 수학과제를 변형하라고 했음에도 불구하고 교사들이 변형한 과제가 해당 학생에게 PNC수준이나 M수준을 유발할 것이라고 평가되는 응답들이 분석한 수학과제의 21%인 29개였다. 교사들은 학생들이 현재 학습하고 있는 주제와 다른 영역에 속하는

학습 주제와 연결해서 과제를 제시하였을 때 high-level을 유발할 것이라고 생각했고 또한 과제 해결을 위해 개념적 아이디어를 사용해야 하거나, 그래프로 표현해야 하는 경우에도 high-level을 유발할 것이라고 생각하였다. 그리고 단순히 '이유를 서술하라'와 같은 문구를 붙였거나 현실 상황과 접목시켜야 하는 과제로 변형하였을 경우 high-level을 유발할 것이라고 생각하기도 하였다.



(문항 4-2에 대한 교사21의 응답)

[그림 IV-6] 교육과정의 범위를 벗어난 수학과제 변형의 예

V. 결론 및 제언

본 연구는 현직 중등 수학교사들의 중학교 함수 단원의 수학과제 선별 능력과, 과제에 대한 다양한 학생들의 응답을 어떻게 평가하고, 그 학생에게 더 높은 인지적 노력 수준을 유발할 수 있도록 수학 과제를 어떻게 변형하는지 살펴보기 위해 개발한 설문지를 이용하여 분석한 조사연구이다. 앞서 논의한 분석결과는 다음의 몇 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 대부분의 교사들은 수업 목표에 따라 낮은 수준의 과제와 높은 수준의 과제를 적절하게 선별할 수 있었지만, 높은 수준의 과제를 높은 수준의 과제라고 선택하는 기준이 학생들의 인지노력 수준보다는 과제의 외형적 요소였다. 네 수준의 과제가 주어지고 단순 사실, 정의, 법칙을 회상하는 것이 목표일 때 도움이 되는 문제를 고르라고 했을 때 86.7%의 교사가 M수준의 과제를 골랐고, 문제 풀이에서 속도와 정확성을 키우는 것이 목표일 때 도움이 되는 문제를 고르라고 했을 때 82.2%가 PNC수준의 과제를 골랐다. 따라서 교사들은 low-level의 사고를 유발하는 것이 목표일 경우 적합한 과제를 선별해 사용할 수 있음을 알 수 있다. 또한 문제해결을 위하여 비교적 많은 인지적 노력을 필요로 하는 문제를 고르라고 하였을 때 한 명도 빠짐없이 설문에 참여한 모든 교사들이 DM수준의 과제를 high-level로 선별했다는 사실은 고무적이다. 다양한 수준의 과제로 구성된 자료가 주어진다면 학생들에게 high-level의 사고를 유발하고자 할 때 교사들은 자료 속에서 DM수준의 과제를 선별하여 사용할 수 있음을 말해주기 때문이다. 따라서 high-level 과제를 지금보다 많이 수록한 교과서나 교사용 지도서가 개발된다면 2009 개정 교육과정의 목표인 미래 사회 구성원에 필요한 핵심역량을 개발하는 데 도움이 될 과제들로 수학수업이 구성될 수 있을 것이다.

그러나 과제의 내용과 해결을 위한 과정을 분석하지 않고 일차적으로 보이는 외형에 집중해 같은 수학적 개념을 연상하게 하는 과제를 같은 수준으로 생각해 PWC수준의 과제가 PNC수준의 과제와 같은 인지적 노력을 요구한다고 혼동한 교사가 33.3%였다. 이혜림 · 김구연(2013)의 연구에서도 이 두 수준의 과제를 혼동하는 예비교사가 45%였다. 이는 현직 교사나 예비교사들이 과제의 내용 및 특성에 주목하여 과제를 분석하기보다는 과제의 외적 형태에 집중하기 때문이라고 보인다. 그러므로 교사들이 과제의 수준을 판별할 때 과제의 내면을 분석하고 제대로 된 가치를 볼 수 있도록 수학과제 분석틀을 제공하고 과제 분석을 할 수 있는 기회를 제공하는 것이 바람직하다.

둘째, 비록 주목하는 부분은 다르더라도 대부분의 교사들은 학생들에게 유발된 인지적 노력

수준을 적절히 판단할 수 있었고, 이를 기반으로 그 학생들에게 높은 인지적 노력 수준을 유발할 수 있는 과제로 변형할 수 있었다. 72%의 교사가 정확하게 수준을 평가하였으며, 89%의 교사가 low-level, high-level의 두 범주로라도 학생에게 유발된 수준을 적절하게 평가할 수 있는 것으로 나타났다. 이는 이혜림 · 김구연(2013), 김대영 · 김구연(2014)의 연구에서 예비교사나 현직교사들이 낮은 인지적 노력수준의 과제를 높은 수준으로 변형하는 것에 어려움을 느끼고 있었고, 변형하였더라도 대부분 M수준 과제나 PNC수준 과제로 변형했던 것과는 상반된 결과이다. 교사들은 다양한 방식을 이용해 high-level을 유발할 수 있는 과제로 변형하였다. 전체의 64.5%의 교사가 수학과제의 변형을 시도하였고, 저자들의 의견이 달라 분석에서 제외한 4개의 과제를 제외한 141개의 과제를 분석했을 때 교사들이 변형한 과제가 학생에게 DM수준을 유발할 것으로 기대되는 경우가 14%, PWC수준을 유발할 것이라고 기대되는 경우가 47%였다. 교사들은 기존의 과제가 갖고 있던 특성들을 보완하여 문제 상황을 일반화해 수학적 개념을 탐구하도록 유도한다든가, 조건 또는 맥락을 변화시키는 등의 다양한 방식을 이용하여 과제를 변형하였다. 본 연구에서는 학생의 응답을 통해 학생의 수준을 추정하고 그에 따라 변형된 과제가 해당 학생에게 어떠한 인지적 노력수준을 유발할 수 있는지를 평가했으므로 학생과 독립적으로 변형된 과제 자체만의 수준을 평가한 선행연구의 결과와 직접적인 비교를 할 수 없다. 하지만 교사들에게 인지적 노력수준에 대해 안내하였으며, 학생의 응답을 해석하고 그에 영향을 미쳤을 것이라 판단되는 과제의 특성을 분석하는 일련의 과정을 거치게 함으로써 교사들이 과제 변형의 필요성을 느꼈고 high-level 과제로 성공적으로 변형할 수 있었음을 알 수 있다. 따라서 우리나라 수학교과서 과제의 약 5%만이 high-level이라고 분석되었지만 교사가 인지적 노력수준에 대해 제대로 인지하고 변형하는 연습을 한다면 충분히 수업시간에 high-level로 변형해 과제를 설정할 수 있음을 시사한다.

셋째, 교사들은 실생활 관련 과제나 응용된 과제를 만드는 것에 어려움을 겪고 있었다. 교사들은 실생활을 소재로 하여 학생들에게 수학적인 개념을 물으려 시도하였으나 맥락을 제거해도 풀이 가능한 과제, 현실을 제대로 반영하지 못한 과제, 해당 학년의 교육과정의 범위 내에서 풀이할 수 없는 과제로 변형하였다. 그런데 교과서에 포함된 대부분의 실생활 과제들이 실제 상황과 수학적인 의미의 연결성에 주목하기보다는 실생활 소재를 사용해 표현하는데 그치고 있다(권지현 · 김구연, 2013). 따라서 교사들이 자신이 자주 접하는 교과서의 과제처럼 외용만 실생활 과제의 모습을 갖춘 과제로 변형하는 것은 무리가 아니다. 또한 학생이 현재 어느 정도의 배경지식을 갖고 있는지를 교사가 알지 못해 교육과정을 벗어나는 실생활 과제로 변형하기도 했다. 한 교사가 설문에 참여하며 어려웠던 점에 대한 응답으로 “중학교에 근무한 적이 없어서 교육과정의 범위를 정확하게 인지하지 못해 문제 설정하기가 어려웠다”고 밝힌 것처럼 전반적인 교육과정의 내용에 대한 이해 부족이나 타 과목 교육과정에 대한 이해 부족이 교육과정을 벗어난 과제로 변형을 초래했다고 볼 수 있다. 따라서 수학적 의미와 실제 상황과의 연결을 강조하는 과제들을 수학교과서에 수록하고, 교사들이 동 교과 교사들뿐만 아니라 타 교과 교사들과도 자신의 수업에서 사용할 과제에 대한 정보를 공유하고 논의하는 활동을 통해 전문성을 신장해야 함을 느끼게 한다.

끝으로, 본 연구의 결론을 바탕으로 후속연구에 대해 제언을 하면 다음과 같다. 첫째, 본 연

구는 함수영역에 국한시켜 분석하였고 45명의 교사를 대상으로 결론을 얻었기에 전체적인 부분으로 일반화해 해석하는 데에는 무리가 있다. 따라서 다수의 교사를 대상으로 다른 영역에 대해서도 수학과제의 선별, 변형에 대한 분석을 할 필요가 있다. 둘째, 본 연구에서는 학생을 고려한 교사의 수학과제 변형을 설문지를 통하여 살펴보았다. 교사들은 학생의 풀이를 통해 학생이 갖고 있는 생각 전부를 이해하기는 어려웠다. 교사가 자신이 가르치고 있는 학생을 대상으로 과제를 변형하고 직접 과제를 제시해 기대한 수준이 유발되었는지 확인하는 과정을 살펴보는 것은 실질적인 자료로서 가치가 있고 연구자, 교사 모두에게 도움이 되는 과정이 될 것이다. 교사들은 설문에 참여하며 학생에게 적합한 과제를 선별하고 변형하기 위해서 동료교사와의 정보 및 경험을 공유하는 것이 필요하겠다고 응답하였고 서로의 의견을 나눌 수 있는 네트워크가 구성되기를 바라고 있었다. 따라서 수학 교사 공동체를 구성해 그 안에서 인지적 노력수준을 중심으로 수학 과제를 분석하고 변형하게 하고 그 과정을 분석하는 것은 교사들의 수학과제와 관련한 전문성 신장 방안을 모색하는 데 도움이 될 것이다. 또한 공동체 속에서 교사들을 살피는 것은 Stein & Smith(1998)의 수학과제 분석 가이드가 과제와 그 특성에 대해 서로 공유하는 언어를 만들고 과제의 차이와 이 차이가 학생의 학습기회에 어떤 영향을 미치는지 회상하게 하는데 목적이 있다는 점에서 인지적 노력수준의 진정한 의미와 부합하다고 할 수 있다.

참고문헌

교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8]).

권지현・김구연(2013). 중학교 수학교과서에 제시된 기하영역의 수학과제 분석. **수학교육, 52**(1), 111-128.

김대영・김구연(2014). 중등 수학교사의 교과서 수학과제 이해 및 변형 능력. **학교수학, 16**(3), 445-469.

김미희・김구연(2013). 고등학교 교과서의 수학과제 분석. **학교수학, 15**(1), 37-59.

김민혁(2013). 수학교사의 교과서 및 교사용 지도서 활용도 조사. **학교수학, 15**(3), 503-531.

김성희・방정숙(2005). 수학 교수・학습 과정에서 과제의 인지적 수준 분석-초등학교 '비와 비율' 단원을 중심으로-. **수학교육학연구, 15**(3), 251-272.

이미연・오영열(2007). 수학적 과제가 수학적 의사소통에 미치는 영향. **수학교육학연구, 17**(4), 395-418.

이혜림(2013). **수학교과서 문제에 대한 예비중등교사의 이해 및 구성능력**. 서강대학교 석사학위논문.

이혜림・김구연(2013). 수학교과서 문제에 대한 예비중등교사의 이해 및 변형 능력. **수학교육학연구, 23**(3), 353-371.

홍창준(2011). **인지적 노력 수준에 따른 중학교 함수 단원의 수학 과제 분석**. 서강대학교 석사학위논문.

홍창준・김구연(2012). 중학교 함수 단원의 수학 과제 분석. **학교수학, 14**(2), 213-232.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA

Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism* (pp. 501-518). Mahwah, NJ:

Lawrence Erlbaum.

Norton, A., & Kastberg, S. (2012). Learning to pose cognitively demanding tasks through letter writing. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(2), 109-130.

Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 91-104.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50-80.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Hennignsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development* (2nd ed.). New York: Teachers College Press.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: toward a theory of teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147-156.

Investigating Secondary Mathematics Teachers' Capacity to Select and Pose Cognitively Demanding Tasks

Kim, Jung Eun (Mokpo Jungang Girls' Middle School)
Lee, Soo Jin (Korea National University of Education)
Kim, Ji Soo (Bundang-Jungang High School)

The purpose of the present study is twofold: one is to understand secondary mathematics teachers' capacity to sort out given tasks based on Stein & Smith(1998)'s Cognitive Demands of Mathematical Task Framework; the second is to examine how the teachers assess the levels of cognitive demand indicated in students' reponses and how they modify the tasks to elicit the students' higher levels of cognitive activity. The analysis of 45 teachers' responses to the survey indicates that the teachers, in general, could select appropriate tasks for the given goal of the lessons but some made the decision merely by their appearances. Even though the teachers chose a particular level with different reasons amongst each other, most teachers could correctly evaluate the levels of cognitive demand of the students' responses. Finally, teachers could pose cognitively demanding tasks using various methods, but a number of them felt challenged in creating word problems that were realistic and aligned with curriculum.

* Key Words : levels of cognitive demands(인지적 노력 수준), secondary mathematics teachers (중등 수학교사), mathematical tasks(수학과제)

논문접수 : 2015. 11. 11
논문수정 : 2015. 12. 9
심사완료 : 2015. 12. 11