대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 17, No. 4, 613 ~ 632. Dec 2015

비와 비율에 관한 학생의 오류와 어려움 해결을 위해 필요한 교사지식

강 향 임* · 최 은 아**

본 연구의 목적은 비와 비율에 관한 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사들의 반응(TRED)을 조사하여, 이를 해결하기 위해 필요한 교사지식인 특수내용지식(SCK)과 내용교수지식(PCK)을 밝히는 데 있다. 이를 위해 선행연구를 바탕으로 비와 비율의 개념과 오개념, 오류와 어려움을 살펴본 후 학생용 질문지를 개발·적용하였으며, 그 결과를 반영한 문항에 대하여 교사들이 어떻게 이해하고 대처하는가를 조사하였다. 3명의 현직교사의 질문지 반응과 인터뷰 자료를 분석한 결과, 두 양의 곱셈적 비교를 넘어서는 좀 더 깊이 있는 비와 비율 개념에 대한 SCK와 교과서의 개념 정의와 기술 방식에 대한 전문적인 SCK를 필요로 하였다. 또한 비와 비율의 수학적 표현과 개념을 구분하여 학생들의 이해 정도를 판단하는 KCS와 학생들의 본질적인 이해를 돕기 위해 다양한 맥락을 활용하여 비를 도입할 수 있는 KCT, 학생들의 직관적이고 시각적인 이해를 돕기 위한 시각적 모델을 도출할 수 있는 KCT가 필요함을 주장하였다.

Ⅰ. 서 론

“할 수 있는 자는 하고, 이해한 자는 가르친다(Those who can, do. Those who understand, teach)”1)

Shulman(1986)의 논문의 마지막을 장식한 이 문장은 교사의 교수활동을 뒷받침하는 고유한 지식기반이 존재한다는 Shulman의 메시지를 함축적으로 표현한다. 교사의 풍부한 지식은 효율적인 교수학습을 가능하게 하는 핵심이며(Shulman, 1986), 가르치기 위해 요구되는 교사지식은 Shulman (1986, 1987)이래로 여러 학자에 의해 다양하게 분류되어 왔다. 최근에는 Ball, Thames & Phelps (2008)가 교수를 위한 수학지식(mathematical knowledge for teaching, MKT)의 요소들을 범주화하였는데, 이중에서 Ball과 동료들이 가장 중요하게 인식하고 있는 지식은 특수내용지식(specialized content knowledge, SCK)이다. SCK는 교수활동에 특화된 수학지식으로, 가르치는 상황이 아니라면 굳이 필요하지도 않고, 관심도 없는 지식이다. 예를 들어, 분수의 나눗셈이 왜 역수의 곱셈으로 해결되는지는 수학교사에게 꼭 필요한 지식이지만, 다른 직업군의 사람들에게는 관심의 대상이 아니다(Ball et al., 2008). 특히, SCK를 가진 교사는 학생의 오류에서 패턴을 찾을 수 있으며 표준적 접근이 아닌 학생들의 다

* 한국교원대학교 강사, hikang2002@hanmail.net (제1 저자)
** 전주온고을중학교, silverah90@naver.com (교신저자)

1) Shulman(1986)의 논문은, “He who can, does. He who cannot, teaches”라는 Bernard Shaw의 문장으로 시작한다. Shulman은 이후 교사 고유의 지식기반을 이야기함으로써 교사를 향한 이 악의적인 말에 대한 반론을 제기하고 있다.

양한 전략이 일반화될 수 있는지를 판단할 수 있다.

사실 수학 학습에서 학생들의 오류를 인식할 수 있는 교사지식은 SCK만은 아니다. Ball et al.(2008)에 의하면, 내용과 학생에 관한 지식(knowledge of content and students, KCS)은 학생이 특정 개념에 어떤 오개념을 갖는지를 예상할 수 있는 지식이며, 공통내용지식(common content knowledge, CCK) 또한 일반적인 수학적 오류를 인식할 수 있는 지식이다. 그러나 미처 예상하지 못한 오류를 교수과정에서 신속하게 인지하고, 오류의 근원을 수학적으로 해석하여 학생으로 하여금 자신의 오류를 깊이 탐구하도록 안내할 수 있는 지식은 SCK라고 할 수 있다(Ding, 2008).

본 연구는 초등수학의 비와 비율을 주제로 학생들의 오류와 어려움을 인식하고 이에 대응하는 교사들의 지식에 초점을 맞추었다. 학교수학에서 비와 비율은 비례 개념과 함께 다른 수학 개념들과 광범위하게 연결되어 사용되는 개념이며, 타교과 영역에서도 중요시 되는 개념이다(Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012). Lamon (2007)은 다음과 같은 진술을 통해 비와 비율 개념이 중요함을 주장한다.

> 학교 교육과정의 많은 주제들 중에서 분수, 비, 그리고 비례는 가르치기에 가장 어렵고, 수학적으로 가장 복잡하며, 인지적으로 가장 도전적인 개념이다. 높은 수준의 수학과 과학의 성공적 수행을 위해 핵심적이면서도 가장 주목받고 있는 연구 주제이자, 가장 오랫동안 관심을 받아온 특징적인 주제임에 틀림없다(p. 629).

그럼에도 불구하고, 이 주제에 대한 학생들의 어려움은 여전히 존재하며 많은 학생들이 이 주제를 개념적으로 이해하지 못하고 있다는 연구 결과들이 있다. Freudenthal(1983)은 비가 어떤 상황이나 맥락으로부터 파악되지 못함으로써 모호한 관계로 인식되고 있다는 것과 비의 학습이 완전히 알고리즘화되고 자동화되어 버린 실태를 비판하였다. 정은실(2003b) 또한 비에 대한 학습지도가 알고리즘에 지나치게 집중되어 있기 때문에 학생들은 비록 계산은 능숙하게 할 수 있다 해도 그 개념의 진정한 의미를 제대로 파악할 수 없다고 주장하였다. 이에 대해 비 개념의 본질을 인식하게 하는 사고 교육이 강조되어 왔다. 이렇듯 비와 비율에 대해 개념적 어려움을 가진 학생들을 가르쳐야 하는 교사들의 교수를 위한 수학지식에 직접적으로 도움을 줄 수 있는 연구들이 절실하다고 할 수 있다.

그러나 지금까지의 비와 비율에 관한 연구에서 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사의 교수학적 판단과 교사지식을 직접적으로 살펴본 연구는 찾아보기 힘들다. 그동안의 선행연구들이 주로 비와 비율 개념이 갖는 속성에 관련된 내용학적 접근(김수미, 2015; 장혜원, 2002; 정은실, 2003b; 홍갑주, 2013; Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2013; Lobato & Ellis, 2010)과 학생들과 예비교사들의 비와 비율 개념에 대한 이해에 초점을 맞춘 교수학적 접근(김수현, 나귀수, 2008; 방정숙, 김상화, 2007; 정은실, 2003a; Ekawati, Lin & Yang, 2015; Lamon, 2006, 2007; Ma, 1999; Streefland, 1984, 1985) 위주로 수행되었기 때문이다. 이에 본 연구는 학교 현장에서 비와 비율을 지도하는 교사들에게 의미 있는 실제적 지식을 제공하고자, 비와 비율에 관한 학생들의 오류와 어려움을 해결하기 위해 필요한 특수내용지식(SCK)과 내용교수지식(PCK)을 밝히고자 한다. 이를 위해 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사의 반응(Teacher Responses to Students' Errors and Difficulties, TRED)을 조사하여 비와 비율 교수를 위한 교사지식을 도출할 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비와 비율의 개념

비와 비율 개념은 다양한 방식으로 정의되고 범주화되어 왔다(김수미, 2015; 장혜원, 2002; 정은실, 2003b; 홍갑주, 2013; Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2013; Freudenthal, 1983; Lamom, 2006, 2007; Lesh et al., 1988; Lobato & Ellis, 2010; Streefland, 1985). 엄밀하게는 비 개념에 대한 다양한 정의와 속성의 범주화가 이루어졌다고 말할 수 있다.

학교수학에서는 비와 비율, 비례 개념을 각각 구분하고 있으나 일상생활에서는 혼용하여 사용하는 경우가 많다. 때로는 수학에서조차 비와 비율을 엄밀하게 구별하지 않는 경우도 있다(방정숙, 김상화, 2007). 이러한 경향이 미국에서는 더욱 심하게 나타나 'ratio', 'rate', 'proportion' 등 비와 관련된 용어의 의미와 각 용어들 사이의 개념적 관련성이 상당히 혼란스럽게 전개되고 있다(김수미, 2015). Thomson(1994)은 교실에서는 물론이고 연구논문에서조차 비(ratio)와 비율(rate)이라는 용어 사용에 혼란이 있음을 지적한 바 있다. Thomson은 그 이유를 기존의 비와 비율에 관한 정의가 상황 그 자체에 근거하기 때문이라고 설명한다. 그가 제시하는 대안은 비와 비율을 지적 조작의 산물로 받아들이는 것이다. Thomson에 따르면, 상황을 '비'와 '비율'의 범주로 구분하는 분류 스키마는 더 이상 중요하지 않게 된다. 지적 조작에 기초하여 비는 두 양을 곱셈적으로 비교한 결과이며, 비율은 반영적으로 추상화된 상수 비이다. 비율의 인식과 관련해서는 Piaget의 반영적 추상화를 적용하여 두 가지로 설명한다. 하나는 일련의 행위들이 정신적 조작의 수준에서 재구성되고 기호화되는 것으로, '속도를 비율로 학습했다'라는 방식으로 표현가능하다. 다른 하나는 상황적 개념이 구성되었을 때 개념의 비유적 측면이 정신적 조작의 수준으로 반성되는 것으로, '사물의 운동을 비율로 이해했다'라는 방식으로 표현할 수 있다.

한편 Lobato & Ellis(2010)는 NCTM의 본질적 이해(essential understanding) 연구의 일환으로 비와 비례, 비례추론의 개념, 이와 관련된 다른 수학 개념들과의 관계, 핵심 아이디어를 심도 있게 논하였다. 그들의 연구에서 비와 비율 개념을 이해하기 위한 핵심적 질문과 이에 대한 답으로서의 본질적 이해는 <표 II-1>과 같이 정리될 수 있다. <표 II-1>에서 특히 주목해야 하는 것은 비 개념을 설명하는 2번이다. 일반적으로 비는 한 양이 다른 양의 몇 배가 되는지의 관계를 의미하는 두 양의 곱셈적 비교로 정의되어 왔다. 물론 양의 크기를 비교하는 방법에는 두 가지가 있지만, 덧셈적 구조로 비교하는 것에서 곱셈적 구조로 비교하는 것으로의 인식의 전환은 상당한 수준의 인지 능력을 요구한다. 뿐만 아니라 곱셈적 비교에 대한 Vergnaud(1983)의 구분인, 포함과 분리의 경우로 구분하여 비를 인식하는 것 또한 쉽지 않은 과업이다. 이것은 '전체-부분', '부분-부분'으로서의 비를 개념적으로 이해하는 과정을 필요로 한다. 그런데 비의 개념에는 두 양을 합성단위로 결합한다는 또 다른 측면이 존재한다(Lobato & Ellis, 2010). 걸린 시간에 대한 움직인 거리의 비, 즉 속력은 두 양을 합성단위로서 결합한 비로 설명가능하다. 예를 들어, 4초 동안 10cm를 움직인 애벌레의 속력은 '10 : 4'라는 합성단위를 생성하며, 이것은 다시 '2.5 : 1'로 새로운 합성단위로 변형된다. 이후 이 새로운 단위는 비례추론과 관련하여 효율적인 도구로 작용한다.

<표 II-1> 비와 비율과 관련된 질문과 본질적 이해(Lobato & Ellis, 2010)

<table>
<tr><th rowspan="2">번호</th><th>질문(Question)</th></tr>
<tr><th>본질적 이해(Essential Understanding)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Q. 비에 의한 추론이 다른 유형의 추론과 다른 점은 무엇인가?</td></tr>
<tr><td>E.U. 비에 의한 추론은 두 양에 주목하여 조직하는 것을 수반한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Q. 비는 무엇인가?</td></tr>
<tr><td>E.U. 비는 두 양의 곱셈적 비교 또는 두 양을 합성단위로 결합하는 것이다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Q. 실세계 상황에서 속성을 측정하는 경우의 비는 어떤 의미를 가지는가?</td></tr>
<tr><td>E.U. 실세계 속성을 측정하는 경우의 비는 그 속성을 다른 속성들로부터 분리시키는 것과 관심 속성에 대해서 각 양을 변화시키는 것의 효과를 이해하는 것을 포함한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>Q. 비와 분수는 어떤 관계가 있는가?</td></tr>
<tr><td>E.U. 비와 분수는 많은 면에서 수학적으로 연결된다.
비와 분수가 동일한 의미를 갖는 것은 아니지만, 비는 주로 분수형태로 표현된다.
비는 주로 ‘부분-부분’ 비교를 위해 사용되지만, 분수는 그렇지 않다.
비와 분수는 서로 중첩되는 집합으로 생각할 수 있다.
비는 종종 분수로서 의미 있게 재해석될 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>Q. 비와 나눗셈의 관계는 무엇인가?</td></tr>
<tr><td>E.U. 비는 몫으로서 의미 있게 재해석될 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td>Q. 비율은 무엇이고, 비례추론과 어떻게 관련되는가?</td></tr>
<tr><td>E.U. 비율은 무수히 많은 동치인 비들의 집합이다.</td></tr>
</table>

2. 학생들의 오류와 어려움 해결을 위한 교사지식

수업 중 교사의 모든 행위는 기본적으로 교사의 지식에 의존하며(Ma, 2002; Shuman, 1986), 교사의 지식은 학생들이 무엇을 학습해야 하는가를 결정하고 학생들을 어떻게 가르칠 것인가를 결정한다(Ma, 2002). 특히 가르친다는 것은 틀린 답을 확인하는 것 이상의 것을 포함한다. 숙련된 교수는 수학적 오류의 근원에 대한 판단을 요구한다(Ball et al., 2008). 실제로 Ma(1999)는 한 주제에 대한 지식이 한정된 교사들의 경우에 학생들의 오류를 판단하고 문제를 해결하는 전략이 절차적인 방식에 초점을 두게 된다는 것을 지적했다. 학생들의 오류와 어려움을 판단하고 적절하게 대처하는 것은 교사들에게 필수적으로 요구되는 지식이다. 교사들은 학생들의 오류를 학습기회로 활용하여 학생들의 개념적 이해를 도울 수 있다(Borasi, 1987; Ding, 2008). 왜냐하면 오류는 학생들의 학습의 어려움을 진단하는데 강력한 도구가 될 수 있으며, 그 결과 직접적인 교정 교육을 가능하게 하기 때문이다(Borasi, 1987).

특히 Ding(2008)은 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사들의 반응(Teacher Responses to Students' Errors and Difficulties; TRED)을 살펴보고 학생들의 인지적 성취를 평가하였다. Ding(2008)이 사용한 방법론은 수업을 통한 학생들의 인지적 변화를 내용의 선정, 핵심 인지과정의 확인, 교수계획, 학생 변화의 평가로 나누어 살펴본 Hiebert & Wearne(1988)의 4단계였다. Ding이 선정한 내용은 동치분수였으며, 핵심 인지과정은 동치분수의 학습에서 발생 가능한 오류와 어려움에 초점을 맞추었다. 교수 계획은 학생들의 오류와 어려움에 어떤 피드백을 부여하는지, 동치분수에 대한 개념적 이해를 위해 어떤 교수 전략을 사용

하는지를 조사하였다. 사실 우리에게 TRED가 낯설거나 갑작스러운 개념은 아니다. 그동안 Shulman(1986)을 비롯한 많은 연구에서 TRED가 교사지식의 중요한 지표로서 인식되어 왔다고 볼 수 있다. 대표적으로 Ma(1999)는 학생들의 오류와 장애에 대한 교사의 반응을 MCK와 연결시켜 분석함으로써 교사의 MCK를 성공적으로 밝혀낸 바 있다(Ding, 2008).

Ball et al.(2008)이 제시한 교사지식의 대부분의 범주는 TRED와 관련되어 있다고 볼 수 있다. 공통내용지식(Common Content Knowledge, CCK)은 일반적인 수학적 오류를 인식할 수 있게 하는 지식이고, 특수내용지식(specialized content knowledge, SCK)은 미처 예상하지 못한 오류를 교수과정에서 신속하게 인지하고, 오류의 근원을 수학적으로 해석할 수 있는 지식이며, 내용과 학생에 관한 지식(knowledge of content and students, KCS)은 학생의 특정 개념에 대한 이해와 오개념을 파악할 수 있는 지식이며, 내용과 교수에 관한 지식(knowledge of content and teaching, KCT)은 학생들의 오류와 어려움을 해소할 교수전략에 대한 지식이기 때문이다. 이를 교사지식의 각 범주의 정의와 특징을 중심으로 기술하면 다음과 같다. 먼저 교수 이외의 폭넓은 다양한 상황에서 사용되는 수학적 지식과 기술로 정의되는 CCK는 학생들이 틀린 답을 했을 때나 교과서에 부정확한 정의가 주어졌을 때 교사들로 하여금 이를 인지하게 하는 역할을 한다. 이에 대한 TRED로 올바른 수학 용어의 사용과 정확한 개념 설명을 들 수 있다. 둘째, SCK는 교수 이외의 목적에서는 그다지 필요하지 않은 지식이지만 일반 사람들이 하지 않는 수학적 교수활동을 해야 하는 교사에게는 필수적인 수학적 지식이다. 교사가 아닌 사람들은 자신이 암묵적으로 이해하고 있는 것에 대해서 '왜'를 설명할 필요가 없다. 그러나 학생으로 하여금 정교화된 수학적 아이디어와 절차를 사용할 수 있도록 도와야 하는 교사에게 있어 SCK는 학생들의 오류에서 패턴을 찾고, 오류의 특징을 판단할 수 있게 해준다. 셋째, KCS는 학생에 대해 아는 것과 수학에 대해 아는 것의 결합이다. 교사는 학생들이 이해할 수 있는 내용과 혼란스러워할 내용을 예상할 수 있어야 하며, 학생들의 언어로 표현된 학생들의 아이디어와 불완전한 사고를 듣거나 해석할 수 있어야 한다. KCS에 대한 TRED로, 학생의 흥미와 학습동기를 고려하여 오개념을 교정할 수 있는 예시를 선택하는 것을 들 수 있다. 넷째, KCT는 가르치는 것에 대해 아는 것과 수학에 대해 아는 것의 결합이다. 교사는 학생들이 더 깊은 이해를 하도록 수업 내용의 순서를 정하고 예제를 선택해야 하며, 좀 더 분명한 설명을 위해 언제 잠시 멈출 것인지, 수학적 포인트를 위해 언제 정리를 할 것인지, 새로운 질문이나 과제를 언제 제시할 것인지에 대해서 교육적인 선택을 해야 한다. KCT에 대한 TRED로, 자릿값에 대한 어려움 해소를 위해 교수학적으로 다양한 시각화 가능한 모델을 제시할 수 있는 지식과 뺄셈 문제를 위해 교수학적으로 제공되는 모델의 역할이 무엇인지를 아는 지식을 들 수 있다. 이러한 KCT는 학생들의 오류와 어려움을 해소할 교수전략을 제공한다. 그런데 교사지식의 각 범주가 항상 다른 범주와 엄격하게 구별되는 것은 아니며, 다만 교사지식을 발견하고 확인하는 강력한 수단으로 작용한다(Ball et al., 2008)는 것은 TRED와 관련된 교사지식의 범주에 대해서도 동일하게 이해할 수 있다. 또한 교사지식의 범주는 교사에 따라, 상황에 따라 다르게 발현될 수 있다. 만약 교사가 수학적 분석에 의해서 오류를 알아냈다면 SCK가 작동한 것이고, 학생의 선행지식과 과거의 누적된 행동으로부터 오류의 원인을 찾아내었다면 KCS가 작동한 것이라고 할 수 있다.

그럼에도 TRED에서 가장 핵심적인 지식은 Ball et al.(2008)이 가장 중요하게 생각했던 지식인 특수내용지식(SCK)이다. SCK는 교사들에게 학생들의 오류와 어려움을 인식하는 능력과 유연성을 부여한다는 측면에서 가장 가치가 있다(Ding, 2008). 학생들의 오류와 어려움에 대처하는 활동은 대부분의 경우에 교사가 매우 즉각적으로 해야만 하는 것이다. 왜냐하면 교실에서의 상황들은 교사가 곰곰이 여유 있게 생각할 만큼 기다려주지 않기 때문이다(Ball et al., 2008). 일반적이지 않아 미처 예상치 못한 오류를 교수과정에서 신속하게 인지하고, 오류의 근원을 수학적으로 해석하여 학생이 자신의 오류를 탐구할 수 있도록 안내하는 지식이 바로 SCK인 것이다(Ding, 2008).

학교수학 주제 중에서 비와 비율은 학생들의 오개념과 오류가 자주 발생하는 주제이다. 박희옥, 박만구(2012)는 비와 비율 학습에서 학생들의 어려움이 발생하는 원인으로 우리나라 교과서에 제시된 예시나 문제가 비의 핵심 개념인 승법적 사고를 충분히 사용하지 않는다는 점을 지적했다. 또한 강윤수(2010)는 비와 비율의 오개념이 발생하는 가장 큰 원인으로 '표현'과 '개념'의 차이를 구분하지 않은 것을 들었다. 즉 두 양의 크기의 비교 또는 두 양의 합성단위로의 결합으로 비를 이해하는 것이 아니라 비의 수학적 표현인 '$a:b$'를 비로 받아들인다는 것이다. 이에 대한 대안으로 정은실(2003a)은 비에 대한 지도 방향이 직관적이고 개념적인 도입을 통해 이루어져야 함을 주장하였으며, Streefland(1984, 1985)는 다양한 맥락을 통해 비 개념을 인식하는 것이 중요하다는 것을 강조한다. 즉 형식적 알고리즘 위주의 교수보다는 풍부한 맥락 속에서 비 개념을 형성할 수 있는 학습기회를 제공하는 것이 중요하다는 것이다. 그런데 비와 비율 개념의 어려움은 교사들에게도 예외는 아닌듯하다. 인도네시아의 예비 초등교사를 대상으로 비와 비례에 대한 교사지식을 조사한 Ekawati, Lin & Yang(2015)은 이 주제에 대한 예비교사들의 미흡한 지식을 지적하고, 교사교육에서 학생수준에 적합한 과제를 판단하는 지식과 학생의 이해와 오개념, 오류와 어려움에 대한 지식뿐 아니라 비와 비율의 개념적 이해를 위한 교수전략 지식을 더 강화한 교사교육이 필요하다는 것을 주장한 바 있다.

요컨대 비와 비율에 관한 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사들의 반응에 초점을 맞추어 비와 비율을 교수하는데 필요한 교사지식을 밝히는 것은 KCS와 KCT를 포괄하는 내용교수지식인 PCK에 한정되지 않는다. 수학내용에 대한 특수내용지식인 SCK를 함께 드러내야 하는 작업이다. 오류와 어려움에 초점을 맞춘 비와 비율에 대한 SCK와 PCK를 밝히는 것은 교사들이 학생들로 하여금 자신의 오류를 깊이 탐구할 수 있도록 안내하는데 기여할 것으로 본다. 또한 교사들에게 학생의 오류와 어려움을 미리 검토할 수 있는 기회를 제공함으로써 학생의 오류와 장애를 해결할 수 있는 교사 능력과 유연성을 증진시킬 수 있다는 긍정적인 측면이 있다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구절차 및 연구대상자

본 연구에서는 비와 비율에 대한 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사의 반응(Teacher Responses to Students' Errors and Difficulties, TRED)을 분석하였다. 이에 선행연구(Baroody & Coslik, 2006; Lamon, 2006; Simon & Blum, 1994)에서 제시된 비와 비율에 대한 학생들의 전형적인 어려움을 실제 학생들로부터 확인하는 것을

첫 번째 검사로 정하고, 비와 비율 개념을 배운 초등학교 6학년 학생이면서 수학 성적이 중위 수준과 하위 수준인 학생을 각각 1명씩 선정하였다. 조사대상이 2명인 것은 연구의 일반화에 대한 제한점이 있을 수 있지만, 이미 잘 알려진 학생들의 어려움을 재확인하는 차원에서 실제적인 사례와 연결하는 것이므로 소수의 사례가 전형적인 사례로 작용가능하다고 판단하였다. 특히, 하위 수준의 학생의 경우 '비' 개념을 '덧셈적 구조'로 인식하는 학생으로, 학생용 질문지에서 '비'의 의미를 기술하지 못하였으며, '비율'의 의미를 '100을 곱한 값'으로 기술하였다. 두 학생의 질문지에 대한 반응을 토대로 교사를 위한 질문지를 개발하였다.

교사용 질문지를 활용한 본 검사의 연구대상자는 초등학교 교직 경력과 근무학교 소재지를 감안하여 중소도시, 읍면지역, 대도시에 각각 근무하는 초임교사와 중견교사, 수석교사 각 1명을 선정하였다. 초임교사(T1)는 기간제 교사 경력을 합산한다면 2년차 교사라고 볼 수 있으며, 중견교사(T2)는 40대 남교사로 읍면지역에서 근무 중이고, 수석교사(T3)는 교직경력 34년의 50대 여교사로 수업역량을 인정받아 수업경연대회에서 수학교과로 수상한 경력이 있다. T1은 2009개정 교육과정에 따라 지난 1학기에 비와 비율 단원을 가르친 바 있으며, T1과 T2는 작년에 5학년을 담당하여 2007개정 교육과정에 따라 5학년 학생들에게 비와 비율을 지도한 바 있다. 수석교사인 T3의 경우, 각 학년 마다 특정 단원을 정해 놓고 각 반마다 한 학기에 10시간씩 가르치는 형태로 작년에 이어 올해도 전 학년의 전체 학급을 모두 지도하고 있다.

1차 조사는 실제 비와 비율 단원을 지도했던 본인들의 경험을 바탕으로 질문지에 답하는 방식으로 이루어졌으며, 교사들이 내린 의사결정의 이유와 내용을 좀 더 정확하게 이해할 필요가 있다고 판단한 문항에 대해서는 두 연구자가 추가 질문 문항을 구성하여 2차 조사인 추가 인터뷰를 실시하였다. 인터뷰는 교사마다 60분 내지 80분 정도 이루어졌으며, 추가 질문은 교사용 질문지의 반응에 기초하였기 때문에 교사마다 인터뷰 문항에 차이가 있었다.

2. 검사도구

Hiebert & Wearne(1988)은 수업을 통한 학생들의 인지적 변화를 연구하는 방법을 4단계, 즉 내용의 선정, 핵심 인지과정의 확인, 교수계획, 학생변화의 평가로 제시한 바 있다. Ding(2008)은 Hiebert & Wearne의 방법론에 따라 동치분수의 교수・학습의 맥락에서 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사들의 반응(TRED)을 살펴보고 학생들의 인지적 성취를 평가하였다. 본 연구는 Hiebert & Wearne와 Ding이 제시한 연구방법 4단계에서 학생변화의 평가단계를 제외한 3단계를 참고하였다. 특히 수업 관찰이 아닌 별도의 검사지를 통한 TRED를 분석하여 교사지식에 초점을 맞추었으며, 수업을 통한 학생의 인지적 변화의 평가는 제외되었다. 1단계 내용선정단계에서는 초등수학의 핵심 개념임에도 불구하고 여

<표 III-1 > 연구대상자

	성별	교사경력	근무학교 소재지	담당 학년	
				올해	작년
T1	여	5년이하	중소도시	6학년	5학년
T2	남	20년이하	읍면지역	4학년	5학년
T3	여	35년이하	대도시	전학년	전학년

<표 III-2> 검사도구의 구성

주제	오류와 어려움	학생용 질문지와 교사용 질문지의 내용		출처
비와 비율의 의미	개념과 표현의 차이 인식 (문항1)	학생	비와 비율의 의미를 쓰시오.	개발문항
		교사	학생이 비와 비율의 개념을 이해하고 있는지 판단하고 그 이유를 쓰시오. 필요하다면 피드백을 제공하시오.	
		학생	다음 중 백분율의 더 적절한 의미를 고르고 그 이유를 쓰시오.	2007개정, 2009개정 수학교과서에서 발췌
		교사	다음과 같이 백분율을 정의하였을 때 교실에서 직면할 수 있는 어려움을 쓰시오.	
두 비율의 비교	곱셈적 구조의 인식 (문항2)	학생	가로와 세로가 각각 75와 114, 455와 508, 185와 245인 사각형 중에서 가장 정사각형과 비슷한 것을 고르고 그 이유를 쓰시오.	Simon & Blum(1994)에서 발췌 후 수정
		교사	학생에게 필요한 피드백을 쓰시오. 학생이 접근하기 쉬운 동형의 문제를 만드시오. 학생의 이해를 돕기 위한 시각적 모델을 활용하여 설명하시오.	
	불변성의 인식 (문항3)	학생	오렌지 맛이 더 강할 것 같은 혼합물을 고르시오. A혼합물과 같은 맛의 혼합물을 더 많이 만들기 위한 방법을 제시하시오.	Lamon(2006, pp. 181-182)에서 발췌 후 수정
		교사	학생들의 전략에서 나타난 오류를 쓰시오. 학생의 이해를 돕는 교수 전략을 제시하시오.	
비와 분수의 관계	비와 분수의 차이 인식 (문항4)	학생	전반전에서 자유투 6번에 2번 성공, 후반전에서 자유투 8번에 7번 성공했을 때, 자유투 성공률을 구하시오. 비 9:0은 비율 $\frac{9}{0}$인가?	Baroody & Coslik(2006, p. 409)에서 발췌 후 수정
		교사	학생에게 필요한 피드백을 쓰시오. 모든 비는 분수인가? 부분과 부분의 비를 분수로 표현하는 것은 수학적으로 의미가 있는가?	

전히 학생들이 어려움을 갖고 있는 비와 비율로 선정하였다. 2단계의 핵심 인지과정의 확인은 2009 개정 교육과정의 교과서(교육부, 2015b), 2007 개정 교육과정의 교과서(교육과학기술부, 2011), 교사용지도서(교육부, 2015a), 기타 문헌(교육과학기술부, 2012; Lamon, 2006, 2007)을 통해 이루어졌으며, 이를 기초로 학생들의 오류와 어려움이 예상되는 3가지 주제, 즉 비와 비율 개념, 두 비율의 비교, 비와 분수의 관계를 선정하였다. 이를 반영한 학생용 질문지를 개발, 적용하여 학생들의 오류와 어려움의 사례를 확인하였으며, 이후 학생의 오류와 어려움을 반영한 교사용 질문지를 개발하였다(<표 III-2> 참조). 이 질문에 대한 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사의 반응(TRED)이 바로 3단계 교수계획이라 할 수 있으며, 그 핵심적인 내용은 IV장 결과분석에서 확인된다.

3. 자료수집 및 분석방법

학생용 질문지, 교사용 질문지에 대한 답안을 모두 스캔하여 자료로 수집하였으며, 교사 인터뷰의 녹음자료는 전사하여 수집하였다. 수집한 자료는 2명의 연구자에 의해 회고적으로 분석하였다. 처음에 선정한 분석기준은 비와 비율 개념에서 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사의 반응을 '1. 교사가 학생 답안을 평가한 기준', '2. 교사가 인식한 학생의 오류와 어려움', '3. 교사가 학생의 오류와 어려움을 위해 설계한 전략'을 기준으로 확인하는 것으로 정하였다. 이 후

<표 III-3> 분석 기준

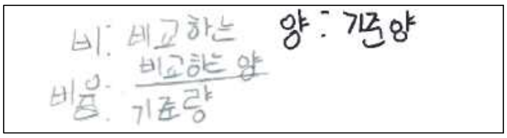
대상	분석 기준
전체문항에 대한 반응	1. 교사가 학생 답안을 평가한 기준은 무엇인가?
	2. 교사가 경험한 학생의 오류와 어려움은 무엇인가?
	3. 교사가 학생의 오류와 어려움을 위해 설계한 전략은 무엇인가?
인터뷰 전사 자료	4. 교사들은 '비와 비율 개념의 다양한 맥락'을 의미 있게 구분하여 활용하는가?

인터뷰를 통해 새롭게 구성한 '4. 비와 비율 개념의 다양한 맥락'에 대한 교사의 이해를 추가하였다. 비와 비율 개념의 맥락의 확장에 대한 교사의 이해는 교사들이 전체와 부분의 비교, 부분과 부분의 비교, 서로 다른 두 양의 비교, 합성 단위로서의 비율을 어떻게 구별하여 이해하고 있는가를 분석하였다. 결과분석에서 3명의 교사는 초임교사와 중견교사, 수석교사 순으로 T1, T2, T3로 표기하여 기술하였다.

Ⅳ. 결과분석

1. 개념과 표현의 차이 인식

비와 비율의 의미를 [그림 IV-1]과 같이 답한 학생1의 반응에 3명의 교사는 모두 이 학생이 단지 형식적인 표현만을 제시했기 때문에 개념을 이해하고 있다고 볼 수 없다고 답했다.



[그림 IV-1] 비와 비율의 의미에 대한 학생 반응

"언제 개념을 이해했다고 판단할 수 있는가" 라는 인터뷰 질문에 T1은 "한 양이 다른 양의 몇 배가 되는가를 언급했을 때 비로소 개념을 이해했다고 판단할 수 있다"고 하였다. 이는 Lobato & Ellis(2010)가 비의 본질적인 이해로서 설명한 '두 양의 곱셈적 관계'로서 비의 개념과 일치하는 SCK에 해당한다고 볼 수 있다. 다음 발췌문은 비와 비율의 이해에 관한 T3와의 인터뷰의 일부이다.

<발췌문 1>

연구자: 학생이 비와 비율 개념을 이해하지 못하고 있다고 하셨는데....왜 그런 판단을 하셨나요?.

T3: 네, 형식적인 표현만을 썼기 때문이예요.

연구자: 그럼, 학생이 어떻게 썼을 때 선생님은 비와 비율을 이해했다고 판단하실 건가요?

T3: (학생에게) 비와 비율에 대해서 설명하라고 하는 상황이예요?

연구자: 예. 학생이 어떤 반응을 했을 때, 아! 이 아이가 비와 비율을 이해하고 있구나...라고 판단하시는지요?

T3: ***한 양이 다른 양의 몇 배가 되는지를 나타냈다***... 그랬을 때가 아니겠어요?

연구자: 그렇다면 선생님은 비와 비율을 어떻게 구분해서 가르치시나요?

T3: 교과서를 따르죠. 제 생각은 좀 다르지만... 교과서가 가장 좋은 자료이기 때문에 교과서를 따라야죠.

연구자: 그렇다면 선생님의 생각은 어떠신지요?

T3: 제 생각은... 과학을 예를 들면, 어떤 과학 전공자분한테 ratio는 같은 특성을 갖는 양을 비교할 때이고 rate는 다른 특성의 양을 비교하는 것으로 설명한다고 들

> 었어요. 그런데 수학에서는 다른 방식으로 접근하는 것 같아요. 학생들이 상급학년으로 진학하면 과학에서와의 괴리가 있을 테니까. 수학과 과학에서 용어의 통일된 관점이 필요하지 않나...라고 생각해요.

T3는 비와 비율 개념을 각 양의 속성을 사용하여 언급한 유일한 교사였다. 학교과학의 범위 내에서 비와 비율 개념을 속성에 따라 분류하는지의 여부는 추후 확인이 필요하지만, 이미 Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이 비와 비율 개념은 수학교육에서도 학자에 따라 의견을 달리하는 내용이다. 2009 개정 교과서는 비를 '두 수를 나눗셈으로 비교할 때, 한 수를 기준으로 다른 수가 몇 배인지를 나타내는 관계'로, 비율을 '비교하는 양을 기준량으로 나눈 값'으로 기술한다(교육부, 2015a). 우리나라 교과서에서는 두 양의 속성의 같고 다름에 따라서 비와 비율을 구분하지 않을 뿐더러 양의 속성에 대한 언급을 찾아볼 수 없다.

비율에 대해서는 T1은 '비를 하나의 값으로 나타낸 것'으로 기술하였으나, T3는 1차 질문지에서 비와 비율을 구분하지 않고 비의 개념과 동일하게 기술하였다. 반면에 T2는 비와 비율 개념에 대해 '두 수를 비교하는 것'으로 설명함으로써 덧셈적 구조로 비교하는 것인지, 곱셈적 구조로 비교하는 것인지를 분명하게 드러내지 않았다. T3 또한 내적비와 외적비를 개념적으로 이해하고 있다고 보기 어려우므로, 3명의 교사에게서 Freudenthal(1983)이 말한 외적비와 Thomson (1994)의 '지적 조작의 산물'로서의 비와 비율, Lobato & Ellis(2010)이 설명한 '두 양의 합성단위로의 결합'에 대한 SCK는 확인할 수 없었다.

T1은 인터뷰 중에 현재 6학년 학생들이 교육과정 개정으로 인하여 작년에 학습한 비와 비율의 개념을 한 학기 만에 다시 학습함에도 불구하고, 여전히 모르고 있거나 어려워하는 학생이 많다는 사실을 우려하였다. 또한 비율을 분수 형태로만 기억을 할 경우에는 소수나 백분율의 형태로 나타냈을 경우에 비율이 아니라고 생각할 위험이 있다는 것과 문제 상황에서 기준량과 비교하는 양을 결정하는 것에 어려움을 겪을 수 있음을 지적하였다. 또한 T1은 비의 '$a:b$', 비율의 분수 공식이라는 수학적 표현과 개념과의 구분, 지나친 형식화가 가져올 수 있는 오개념의 위험을 지적함으로써 비와 비율에 대한 KCS를 가지고 있음을 보여주었다. T3의 경우, 비와 비율의 도입에서는 한 양이 다른 양의 몇 배인지를 알아보는 상황을 충분히 제공한 후 곱셈적 관계를 형식적으로 나타내도록 지도해야 하며, 개념 학습에 있어서의 맥락의 중요성이 강조되어야 한다고 설명함으로써 비와 비율 지도와 관련한 KCT를 보여주었다.

한편 2007개정 교육과정에 따른 교과서(A)와 2009 개념 교육과정에 따른 교과서(B)의 백분율에 대한 서로 다른 정의 방식에 대해, T1은 B, T2는 A가 더 적절하다고 답했고 T3은 두 가지가 모두 부적절하다고 답했다([그림 IV-2] 참조). T1의 경우, A방식은 분모의 기준량이 3과 같이 기준량을 100으로 만들 수 없는 경우에 초등학생들에게 설명하기에 적합하지 않다고 답하였다. $33.333\cdots$ %와 같이 무한소수로 표현되는 백분율을 이해하기 어렵다는 것이다.

A	기준량을 100으로 할 때 비교하는 양 80의 비율 $\frac{80}{100}$을 백분율이라고 합니다. 백분율 $\frac{80}{100}$을 %를 써서 80%라 나타내고, 80퍼센트라고 읽습니다.
B	비율에 100을 곱한 값을 백분율이라고 합니다. 백분율은 기호 %를 사용하여 나타냅니다. 비율 $\frac{72}{100}$ 또는 0.72를 백분율로 72 %라 쓰고 72 퍼센트라고 읽습니다.

[그림 IV-2] 백분율에 대한 두 가지 정의 방식

T2의 경우, B방식이 단순히 백분율을 얻는 계산 방식을 제시한 것임에 비해, A방식은 기준량과 비교하는 양을 사용하여 백분율 개념을 일관

성 있게 정의하고 있다고 설명했다. T3는 그동안의 교수경험을 통해 백분율이 학생들의 질문이 유독 많은 단원임을 지적하고 A방식으로 지도했을 때는 '약속하기에서 백분율 $\frac{80}{100}$이라는 표현이 있는데, 왜 $\frac{80}{100}$을 다시 백분율로 나타내라고 하나요?'라는 질문이, B방식으로 지도했을 때는 '비율에는 분수, 소수, 백분율이 있다고 했는데 왜 비율에 100을 곱한 값을 백분율이라고 하나요? 서로 다르다는 건가요?', '기준을 100으로 나누어볼 때 부분이 얼마인가를 나타내는 것이 백분율(百分率)인데 왜 100으로 나누지 않고 100을 곱하나요?'라는 질문이 제기되었다고 하였다. T3는 이러한 혼란을 최소화하는 방법으로 백분율을 '기준량을 100으로 할 때, 비교하는 양의 크기에 %를 붙인 것'이라고 정의할 것을 제안하였다. 그러나 단 한명의 교사도 A와 B의 기술 내용에서의 수학적 오류를 지적하지 않았다. '기준량을 100으로 볼 때 비교하는 양의 비율'로 백분율을 정의한 옛 방식에 대해서 '비율을 $\frac{\text{비교하는 양}}{\text{기준량}}$로 정의하는 한, 기준량을 1로 보는지 100으로 보는지는 의미가 없다'든지, '비율에 100을 곱한 값'으로 조작적 정의를 하고 있는 새로운 방식에 대해 수 72 자체가 백분율인 것으로 오해될 수 있는 소지가 있다는 것에 대한 SCK를 보여준 교사는 없었다.

2. 곱셈적 구조의 인식

두 비율의 비교에 관한 [그림 IV-3]에 대해 교사들은 곱셈적 사고 전략을 하였는가를 평가 기준으로 제시하였다. 3명의 교사 모두 이 학생이 문제해결 전략으로 뺄셈적 사고를 하고 있다고 지적하였다.

미나는 정사각형 모양의 벽지를 사려고 인터넷 마켓을 검색해 보았다. 마켓에는 가로와 세로의 길이가 각각 75와 114, 455와 508, 185와 245인 세 가지의 벽지가 있다. 어느 것이 가장 정사각형과 비슷할까?

75와 114가 정사각형과 비슷하다.
왜냐하면 75와 114의 뺀수가
가장 적기 때문이다.

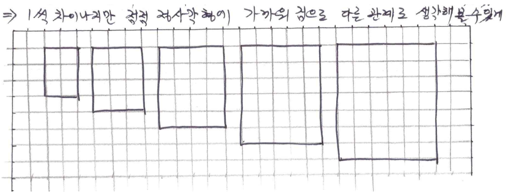
[그림 IV-3] 2번 문항에 제시된 맥락과 학생반응

T3가 이 학생의 오류를 위해 설계한 전략, 즉 KCT는 주어진 직사각형 3개를 mm단위로 직접 그리도록 하여 자신의 오류를 직관적으로 확인해보도록 하는 것이었다. T2 또한 이와 유사한 의견을 제시하였다. 학생에게 본인의 오류를 인식하게 하는 질문을 어떻게 구성할 것인지에 대한 교사들의 반응은 크게 세 가지, 즉 '그림을 그려 확인 가능한가?', '기준량을 동일하게 또는 근접하게 만들 수 있는가?', '세로에 대한 가로의 비를 구할 수 있는가?'로 나눌 수 있다. 이 중에서 세로에 대한 가로의 비율을 구하라는 교사 질문은 비율의 형식적 계산을 유도한다는 점에서 직접적인 해법을 제시하고 있다고 볼 수 있어 학생의 오류를 스스로 인식하게 한다는 의도와 다소 거리가 있어 보인다.

한편 T2는 추후 인터뷰에서, 검사지에서 제시된 수치들이 지나치게 크고 쉽게 통분, 약분이 되지 않는 점을 지적하면서, 다소 학력이 떨어지는 읍면지역 학생들이 복잡한 수치를 포함한 실생활 맥락에서 유독 낮은 문장해독력을 보인다는 KCS를 보여주었다. 이에 T2는 제시된 문제와 같은 복잡한 상황에서는 계산기 사용을 적극 권장하는 교수전략을 사용해야 한다는 KCT와 학생들이 대소비교 상황에서 계산기가 제공하는 표현양식인 소수를 사용하는 경우를 분수의 경우보다 더 쉽게 이해한다는 KCS를 제시하였다.

[그림 IV-3]과 동일한 성취기준을 가지고 초등 학생 수준에 적합한 문제를 제작하는 것에 대해서는 T1과 T3가 문제의 의도에 맞는 문제를 제시하였다. T1은 가로가 1, 세로가 2인 직사각형과 가로가 20, 세로가 24인 직사각형을 그려보게 하여 가로, 세로의 차가 1인 전자보다 4인 후자가 정사각형의 모양에 더 가깝다는 것을 확인하도록 하겠다는 반응을 보였다. T3는 주어진 문제를 2:3, 3:4, 4:5, 5:6, 6:7과 같은 가로와 세로가 1씩 차이가 나는 직사각형 문제로 수정하였다. 반면에 T2는 ‘5시간 동안 밤을 80개 주운 사람과 3시간 동안 36개 주운 사람 중 1시간에 누가 더 많이 주었는가?’라는 문제를 제시하였다. 이는 두 비율의 비교라는 측면에서는 동일한 구조를 가졌다고 볼 수 있으나, ‘단위 시간당 주운 밤의 개수’가 속성이 같은 두 양의 곱셈적 관계라기보다는 합성단위로서의 비의 개념이라는 점에서 성취기준에 차이가 있는 문제라고 할 수 있다.

T3만이 본인이 제작한 문제를 해결하는 시각적 모델을 제시하였다. 그러나 T3 또한 직접 그린 모눈종이 위에 간단한 길이의 비를 가진 5개의 직사각형을 직접 그리는 정도였다([그림 IV-4] 참조). 각 직사각형의 대각선을 그려 그 기울어진 정도를 45°와 비교한다든지 하는 기하학적 아이디어들은 발견되지 못하였다. 추후 인터뷰에서 교사들은 이 문항이 가장 난해했음을 토로했다. 이에 교사들이 교수학습 전략으로서 시각적 모델을 구성하는 KCT가 미흡하다는 사실과 구성 경험 역시 부족하다는 사실을 확인할 수 있었다. 이러한 결과는 예비교사들이 비의 지도에 적합한 모델을 만드는데 어려움을 겪고 있을 뿐 아니라 모델의 적절성조차 파악하지 못하고 있다고 지적한 Freudenthal(1983)의 주장과도 일치한다. 이에 Streefland(1985)과 정은실(2003)이 주장한 바와 같이, 시각적인 세계를 비의 원천으로 활용하는 비에 대한 접근 방식을 적극적으로 고려할 필요가 있다.

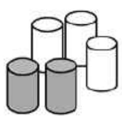
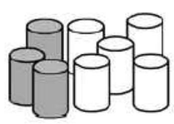


[그림 IV-4] T3가 2번 문항에서 제시한 시각적 모델

3. 곱셈적 불변성의 인식

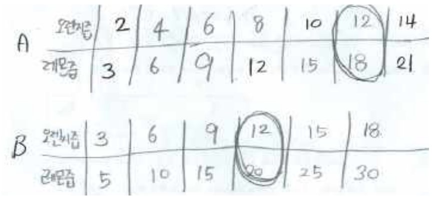
비의 불변성을 인식하는가를 확인하기 위한 [그림 IV-5]의 문항에 대해 학생1은 비례식으로 해결한 반면, 학생2는 ‘오렌지와 레몬즙의 통 수가 1개 차이가 나면 되므로 B에서 레몬즙 1통이 남는다’고 답했다.

이 학생의 이해를 돕는 교수 전략과 관련한 KCT는 교사마다 다양하게 제시되었다. T1은 [그림 IV-6]과 같이 2:3과 3:5를 반복(build-up)하

※ A와 같은 맛을 내려고 할 때, B에서 남는 통은 어떤 맛이 얼마나 남을까요?	
A.  오렌지즙 2통과 레몬즙 3통의 혼합물	B.  오렌지즙 3통과 레몬즙 5통의 혼합물
<풀이> 레몬즙한통이 남은것같아.	

[그림 IV-5] 불변성 인식을 위한 문항과 학생2의 반응

는 전략을 사용하여 표를 작성하는 방법을 제시하였다. A와 B에서 오렌지즙을 12통으로 기준을 맞추어 레몬즙의 양을 비교하도록 하는 방식이다.



[그림 IV-6] 오류에 대한 T1의 교수전략

T3는 ‘오렌지 2통과 레몬즙 3통의 비율과 같은 맛의 혼합쥬스 만들기’ 과제를 수행하는 전략을 제시하였다. 이는 모둠별로 쥬스를 만들어 보는 직접활동으로, T3는 ‘맛 예상하기 → 실제로 섞어서 맛 비교하기 → 예상과 다른 이유 찾아보기 → 다른 비교 방법 생각해보기 → 비교 방법에 대한 생각 나누기 → 곱셈관계로 비교하기’라는 구체적인 단계를 설계하였다. 한편 T2는 처음에 비의 성질을 이용하는 형식화된 전략을 제시하였으나 추후 인터뷰 과정에서 원래 문항을 수정하는 방법을 추가하였다.

<발췌문 2>

T2: 지금 A와 B 수치로는 두 비끼리 빼도 답은 맞아요.

연구자: 아, 정말 그러네요.

T2: 이럴 때는 B를 오렌지즙 3통과 레몬즙 4통으로 바꿔서 물어봐야겠어요.

연구자: 그럼 이 학생들은 어떻게 풀고 있을까요?

T2: 학생1은 각각 뺄테니까 A 1통, B 1통이 남는다고 할꺼고... 학생2는 B에서 A를 뺄테니까... 똑같이 대답하겠네요.

연구자: 선생님 생각에는 학생들이 답을 뭐라고 할 것 같으세요?

T2: 두 맛이 똑같이 섞여서 강한 맛이 없다고 하겠죠.

T2는 두 비율의 비교가 두 비의 차라는 오개념을 가진 학생들의 답안을 정확히 분석했을 뿐 아니라 이 학생들의 오류를 교정하는 방법을 제시하고 있음을 알 수 있다. 오렌지즙 3통과 레몬즙 4통으로 바꾼 문제 상황에서 본인의 전략을 검토하게 함으로써 두 비의 뺄셈 전략을 일반화하여 적용할 수 없음을 보여주는 것이다. 이러한 KCT는 학생들의 오류를 직접적으로 제시하는 방식보다는 학생 스스로 오류를 인식할 수 있는 교정 맥락을 제공할 수 있다는 점에서 의미 있는 전략으로 판단된다.

4. 비와 분수의 차이 인식

Lobato & Ellis(2010)는 비와 비율에 대한 본질적 이해에 비와 분수의 관계에 대한 이해를 포함시키고 있다. 비율이 주로 분수 형태로 표현되므로, 비와 분수 사이에 많은 수학적 연결성이 있을 수밖에 없지만, 그렇다고 해서 동일한 의미를 갖는 것은 아님에 유의해야 한다. 본 연구에서는 ‘0을 포함하는 비와 분수’, ‘비와 분수의 덧셈 알고리즘’에 초점을 두어 조사하였다.

우선 [그림 IV-7]과 같이 0이 포함된 비와 비율에 대한 학생의 오류와 어려움에 대한 교사의 반응(TRED)에서, T1은 $9:0$이라는 비 표현이 두 양의 비교 차원에서는 가능하지만, 분모가 0이 될 수 없다는 수학적 원리에 따라 비율 $\frac{9}{0}$는 불가하다고 답하였다.

> 교사: 이번에는 수남이가 자유투를 9번 성공하는 동안, 우진이는 0번 성공했다고 합시다.
> 지우: 그럼 우진이의 자유투 성공 횟수에 대한 수남이의 자유투 성공 횟수의 비는 $9:0$입니다. 그 비율은 $\frac{9}{0}$라고 할 수 있구요.

[그림 IV-7] 0이 포함된 비의 사례로 제시한 맥락

T2는 '물 9컵이 들어간 양동이가 빈 양동이의 몇 배라고 말할 수 없다'는 예시를 들어 T1과 같은 의견을 제시하였다. T3는 두 양의 상대적인 크기를 비교하는 것이 비이므로, 기준량이 0이 되어서는 비교할 수 없음을 단호하게 설명하였다. T3는 실생활에서 $9:0$과 같은 게임 점수 사례를 찾아볼 수는 있지만, 이는 어디까지나 관례일 뿐 수학적으로 옳지 않다는 의견으로 마무리하였다.

0이 포함된 비와 비율은 교과서에서 명시적으로 다루고 있지는 않지만, 충분히 예측 가능한 학생들의 질문일 뿐 아니라 교사용 지도서에서 언급되어 있는 내용으로, 비와 비율에 대한 필수적인 SCK이다. 그럼에도 T3를 제외한 두 교사는 이에 대한 정확한 수학지식을 가지고 있지 못하였다. 또한 교사용지도서(교육부, 2015a)에서 기준량과 비교하는 양의 비교라는 측면에서 비 $0:9$, 비율 $\frac{0}{9}$의 유의미함과 비 $9:0$, 비율 $\frac{9}{0}$의 불가성을 논한 것이 아니라, 단지 $\frac{0}{9}$과 $\frac{9}{0}$라는 분수 표현의 불가 여부로만 설명하고 있다는 점은 다소 아쉬운 부분이다.

다음 [그림 IV-8]이 두 비를 분수의 덧셈 알고리즘으로 해결한 학생의 오류 사례로 제시되었다. 이에 대한 KCT로, T1은 "결과 $\frac{29}{24}$가 1보다 크다는 것이 가능한가?"라는 질문을 던짐으로써 학생이 잘못된 연산을 수행했음을 인지하도록 하는 피드백을 제공하겠다고 답하였다. T3는 '만약 어떤 학생이 전반전에서 100% 성공하고 후반전에서 100% 성공했을 때 전·후반의 성공률을 100%+100%=200%라고 계산하는가'라는 질문을 통해 학생이 스스로 오류를 인식하는 맥락을 제공하겠다고 밝혔다.

교사: 전반전에서 수남이는 6번 자유투 중 2번을 성공하였고, 후반전에서는 8번의 자유투 중 7번을 성공하였습니다. 전체 경기 동안 수남이의 자유투 성공률은 얼마일까요? 영미: $\frac{2}{6}+\frac{7}{8}=\frac{16+42}{48}=\frac{58}{48}=\frac{29}{24}$ 입니다.

[그림 IV-8] 두 비의 합이 적용된 맥락

'만약 학생이 $\frac{2}{6}+\frac{7}{8}=\frac{2+7}{6+8}=\frac{9}{14}$라고 계산했을 경우, 연산 결과와 표현이 적절하가'라는 인터뷰 질문을 통해 교사들의 SCK를 조사하였다. T1은 결과는 옳지만 분수의 덧셈식으로 표현하는 것 자체가 옳지 않다고 답하였다. 그 이유는 두 비의 기준량이 다른 상황에서는 비의 덧셈이 성립하지 않을 뿐 아니라 성공률 자체가 전체 시행 횟수에 대한 성공 횟수를 의미하므로 14번에 대한 9번의 비율을 구하는 것으로 이해해야 한다는 것이었다. T2 역시 비의 덧셈식 자체가 불필요하다는 의견을 보였으며, 분수의 덧셈이 비의 덧셈에는 적용되지 않는다고 답하였다. [그림 Ⅳ-8]은 비와 분수와의 차이를 살펴볼 수 있는 문항으로 Borasi(1987)가 제시한 문항과도 유사하다. 게임 맥락을 통해 '$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$'가 적절한 사례가 있음을 설명한 Borasi(1987)의 의도가 교사와 학생들을 잘못된 분수 알고리즘으로 인도하고 있다는 Marshall(1993)의 지적을 상기할 필요가 있다.

5. 비와 비율 개념의 맥락의 확장

비와 비율 개념의 맥락의 확장에 대한 교사의 이해는 교사들이 전체와 부분의 비교, 부분과 부분의 비교, 서로 다른 두 양의 비교, 합성 단위로서의 비율을 어떻게 구별하여 이해하고 있는가를 분석하여 교사들의 SCK를 조사하였다. 교

사 인터뷰에서 가장 많이 등장한 표현은 '한 양이 다른 양의 몇 배, 두 양의 곱셈적 관계'였지만, 두 양의 속성에 대해서 관심을 가진 교사는 없었다. 예를 들어, 학생의 수준에 적합하게 문항2와 동형의 문제를 요구했을 때, T2는 '단위 시간당 주운 밤의 개수'라는 속성이 다른 두 양을 합성하는 문제를 제시한 바 있다. 이는 T2가 같은 속성을 갖는 두 양의 비교라는 것을 고려하지 않았다는 것을 의미한다.

비율의 맥락에 대한 교사들의 이해를 좀 더 살펴보기 위해 [그림 IV-9]와 같이 부분과 부분의 비교 상황을 인터뷰 문항으로 제시하였다.

한 반의 학생이 25명이고 남학생 15명과 여학생 10명으로 이루어져 있다고 할 때, 전체 학생에 대한 여학생의 비는 $10:25$이고, 그 비율은 분수 $\frac{10}{25}$으로 나타낼 수 있어요. 그런데 남학생에 대한 여학생의 비를 $10:15$, 그 비율을 $\frac{10}{15}$이라고 써도 되나요?

[그림 IV-9] 비율 맥락의 이해 정도를 조사한 질문

교사들은 전체 학생에 대한 여학생의 비 10:25와 남학생에 대한 여학생의 비 10:15를 '부분-전체'와 '부분-부분'으로 차이가 있다는 점을 지적하지 않았다. 대체적으로 '0을 포함하지 않는 비를 분수로 표현 못할 이유가 없다'는 반응을 보였다. 또한 '전체－부분'으로서의 분수에 의미를 부여하여 남학생에 대한 여학생의 비율을 $\frac{10}{15}$으로 쓰는 것은 불가하다고 말하는 교사는 없었다. 사실 분수는 '전체-부분'의 의미가 강하다고 볼 수 있기에 '부분－부분'의 맥락을 사용하는 비에 대해서는 분수 표현을 기피한다(Lobato & Ellis, 2010). 연구자가 교사들에게 '전체－부분', '부분－부분'의 맥락을 언급하자, 교사들은 비율이 가지는 맥락과 그 차이를 어렵지 않게 이해하는 모습을 보여주었다.

Lamon(2006)은 '전체－부분'으로서의 분수와 비의 수학적 표현으로서의 분수를 구별할 필요가 있다고 주장한 바 있다. Lamon의 표현대로 하자면, 위 상황은 분수 '$\frac{10}{15}$'보다는 두 양의 단위를 사용하여 '$\frac{10\text{ 여학생}}{15\text{ 남학생}}$'이라고 표현하는 것이 더 적절한 것이다. 분수와 비의 불필요한 오해를 방지하기 위해서 분수 표현보다는 '남학생에 대한 여학생의 비' 또는 '남학생 한 명당 여학생의 수' 등의 언어적 표현을 고려할 필요가 있다(Lamon, 2006).

한편 T1은 2009 개정 교과서의 비율의 활용 단원인 속력과 인구밀도, 진하기 개념들이 앞서 학습한 비율 개념과 비교하여 일관성이 부족하고 모호하다는 점을 지적하면서 지도상의 어려움을 다음과 같이 이야기하였다.

<발췌문3>

T1: 속력, 인구밀도, 진하기는 갑자기 왜 나오는지 모르겠어요.

연구자: 선생님께서 계속 말씀해주신 두 양을 곱셈적 관계로 비교한다는 개념을 속력에도 적용할 수 있나요?

T1: 저도 수업시간에 기준량이 시간이고 비교하는 양이 거리라는 설명을 했긴 했는데요. 앞에서 계속 설명해 온 방식으로는 거리가 시간의 몇 배냐는 건데요. 이건 좀 말이 안 돼요. 인구밀도도 마찬가지예요. 인구수가 땅 넓이의 몇 배냐는 거지요.

연구자: 그래서 학생들에게 속력을 어떻게 설명하셨나요?

T1: 그냥 공식으로 기억하게 한 것 같아요.

T1은 속력이나 진하기, 인구밀도를 '기준량과 비교하는 양 사이의 곱셈적 관계'로 일관성 있게 해석하려고 시도를 하였으나, 학생들의 이해를 돕기에 교과서에 기술된 기본 개념들로는 설

명의 한계를 느꼈다는 것이다. T3는 과학 분야에서 ratio를 같은 특성을 갖는 양을 비교할 때 사용하고 rate을 다른 특성의 양을 비교할 때 사용한다는 것을 과학 전문가로부터 전해 듣고 타 교과와의 연결성의 측면에서 비의 개념을 도입해야 한다고 제안한 바 있다. 그러나 이 또한 피상적인 이해에 머물러 있는 수준으로, 결국 3명의 교사 모두 Freudenthal(1983)이 말한 서로 다른 종류의 두 양 사이의 비인 내적비와 외적비에 대한 SCK가 부족하다고 말할 수 있다. 또한 Lobato & Ellis(2010)이 비 개념의 본질적 이해에서 주장한 바 있는, 두 양을 합성단위로 결합하는 것이라는 비 개념의 또 다른 측면에 대한 SCK가 미흡하다고 볼 수 있다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 비와 비율에 관한 학생들의 오류와 어려움을 해결하기 위해 필요한 특수내용지식(SCK)과 내용교수지식(PCK)을 밝히는 것을 목적으로 하였다. 교사들로 하여금 비와 비율의 수업 상황에서 미처 예상하지 못한 오류를 신속하게 인지하고, 오류의 근원을 수학적으로 해석하여 학생들이 자신의 오류를 깊이 탐구하도록 안내할 수 있는 실제적인 교사지식을 제공하고자 하였다. 이를 위해 학생의 오류와 어려움에 대응하는 교사들의 반응(TRED) 사례를 분석하였으며, 그 결과를 바탕으로 비와 비율에 관한 오류와 어려움 해결을 위한 SCK와 PCK(KCS & KCT)를 다음과 같이 도출하였다.

첫째, '두 양의 곱셈적 비교'를 넘어서는 좀 더 깊이 있는 비와 비율 개념에 대한 SCK가 필요하다. 연구에 참여한 교사들은 학생들이 비를 '한 양이 다른 양의 몇 배'라 설명하고 '곱셈적 구조'를 적용하여 문제를 해결하였을 때, 비와 비율을 개념적으로 이해하였다고 판단하였다. 그런데 교사들의 반응에서 Freudenthal(1983)이 말한 내적비와 외적비, Thomson(1994)의 지적 조작의 산물로서의 비와 비율, Lobato & Ellis(2010)의 합성단위로의 두 양의 결합이라는 비의 개념을 언급한 사례는 찾아볼 수 없었다. 또한 교사들은 비와 비율 개념의 다양한 맥락을 구분하여 활용하지 못하였다. 실제로 T2의 경우, 가로와 세로의 길이라는 동일한 속성을 활용한 문항2와 밤의 개수와 시간이라는 서로 다른 속성을 활용한 문항을 동일시하였다. 그동안 교과서의 비와 비율 단원이 Freudenthal(1983)과 정은실(2003) 등의 선행연구들이 주장한 내용을 상당 부분 반영하는 방향으로 개정되어 왔음에도 불구하고, '두 양의 곱셈적 비교'라는 비 개념의 한쪽 측면만이 지나치게 부각된 면이 관찰되었다. 비의 또 다른 측면인 '두 양의 합성단위로의 결합'이 소홀히 다루어지고 있다는 점은 속력 등의 비율의 활용 단원과 앞에서 학습한 비와 비율의 개념 단원과의 인지적 간극을 크게 하는 원인이 되고 있었다. 이로 인하여 교사들이 속력 지도에 있어 공식 위주의 형식적 교수 전략을 선택하는 것은 아쉬운 결과였다.

둘째, 교과서의 개념 정의와 기술 방식에 대한 전문적인 SCK가 요청된다. 교사들은 2007개정 교육과정 교과서와 2009개정 교육과정 교과서의 백분율 정의 방식의 문제점을 지적하지 않았다. 이는 교사들이 교과서의 수학적 정확성에 대해서 신뢰하고 있으며, 교과서의 오류 가능성을 생각하지 않은 것으로 해석된다. 그런데 교사용지도서는 '기준량을 100으로 볼 때의 비율'이라는 표현을 수학적 오류로 지적하고 있지만(교육부, 2015a), 제시되어 있는 근거인 '비율을 $\frac{\text{비교하는 양}}{\text{기준량}}$로 정의하는 한, 기준량을 1로 보는지 100으로 보는지는 아무런 의미가 없다'는 것에 대해서는 합의가 쉽지 않다. 예를 들어,

Lamon(2006)은 백분율을 '기준량이 항상 100인 특별한 비율'이라고 정의한 바 있다. 한편, 2009 개정 교육과정 교과서의 '백분율은 비율에 100을 곱한 값'이라는 정의방식은 또 다른 수학적 오류의 소지가 있다. '비율 $\frac{72}{100}$, 0.72를 백분율로 72%로 나타낸다'는 기술과 '비율($\frac{72}{100}$, 0.72)에 100을 곱한 값(72)을 백분율이라고 한다'는 것은 서로 동치관계로 보기 어렵다. 예컨대, 수 72 자체가 백분율인 것으로 오해될 수 있기 때문이다.

셋째, 비와 비율의 수학적 표현과 개념을 구분하여 학생들의 이해 정도를 판단하는 KCS가 중요하다. 3명의 교사들은 단순히 $\frac{a}{b}$, $a \div b$ 로 표현할 수 있다는 것이 그 학생이 a와 b 사이의 비 개념을 형성했다는 것을 보장하지 않는다는 KCS를 가지고 있었다. 이는 Lobato & Ellis(2010)의 주장과도 일치하는 것으로, 교사들은 교수경험을 통해 '표현'과 '개념'의 차이를 구분하지 못하는 것이 비와 비율의 오개념이 발생하는 가장 큰 원인임을 인식하고 있었다. 따라서 비를 나눗셈을 사용하거나 분수형태로 표현하여 두 수의 비교로서 정의하는 방식의 문제점에 대해서도 고려해볼 필요가 있다. 나눗셈을 수행하지 않아도, 분수로 표현하지 않고도 비를 구성하는 것이 가능하기 때문이다(Lobato & Ellis, 2010).

넷째, 교사들에게는 학생들의 본질적 이해를 돕기 위해 다양한 맥락을 활용하여 비를 도입할 수 있는 KCT가 필요하다. Lobato & Ellis(2010)는 비를 구성하는 것이 단순히 쓰기 과제가 아니라 인지적 과제에 해당한다고 말한 바 있다. 나눗셈으로 비를 정의하는 것은 수치적 계산에 강조점을 두는 것이다. 비 개념에 대한 본질적 이해는 수에 관련된 것이 아니라 실생활 맥락에서 비를 구성하는 것과 관련되어 있다. 현재 2009개정 교과서는 남학생 4명과 여학생 2명을 모둠을 구성하는 도입 맥락을 제공한다. 7차 교과서의 남학생 5명, 여학생 3명 맥락이 가법적으로 두 수를 비교할 소지를 주었던 것에 비하면, 현 교과서의 맥락이 두 수를 승법적으로 비교할 수 있는 맥락임에는 틀림없다. 그러나 이 맥락이 남학생 수가 여학생 수의 두 배라는 것을 반드시 구해야 할 필요를 절실히 요청하지는 않는다. Freudenthal (1983)은 비가 의미 있는 조직 수단으로 작용하는 현상으로 기하학적 맥락에서의 비를 제시한 바 있다. 실생활의 물체와 환등기에 비추어진 그림자와의 비를 구하는 맥락이 기하학적 맥락의 그 예가 될 수 있다.

다섯째, 학생들의 직관적이고 시각적인 이해를 돕기 위한 전략으로 시각적 모델을 도출할 수 있는 KCT가 요청된다. 본 연구의 3명의 교사는 곱셈적 사고 전략이 필요한 문제에서 뺄셈적 사고를 하고 있는 학생의 오류 해결을 돕기 위한 시각적 모델을 다양하게 제시하지 못하였다. Freudenthal(1983)은 예비교사들이 비의 지도에 적합한 시각적 모델 구성에 어려움을 느끼는 원인으로 교사들조차 비에 대한 개인적 학습과정에서 시각적 모델의 고려 없이 알고리즘으로 직행했던 것을 들었다. 이에 대한 대안으로 Streefland(1985)과 정은실(2003)을 비롯한 선행연구들이 주장한 바와 같이, 시각적인 세계를 비의 원천으로 활용하는 비에 대한 접근 방식을 적극적으로 고려할 필요가 있다.

이상에서 정리한 비와 비율에 관한 오류와 어려움 해결을 위한 SCK와 PCK는 교사지식의 범주에 대한 Ball et al.(2008)의 설명과 같이, 절대적인 구분이라기보다는 관련된 교사지식을 발견하고 확인하는 수단으로 이해될 수 있다. 학생들의 오류와 어려움은 효과적인 학습기회로 재구성되어 학생들의 개념적 이해를 도울 수 있다. 앞으로 비와 비율 주제뿐 아니라 다양한 주제에 대한 TRED를 살펴봄으로서 이에 대한 SCK와

PCK를 밝히는 연구가 이루어질 필요가 있으며, 그 연구결과들이 교수를 위한 교사지식으로 활용되기를 기대한다.

참고문헌

강문봉, 강완, 김남희, 김수환, 나귀수, 박경미, 박영배, 백석윤, 송상헌, 유현주, 이경화, 이중권, 임문규, 임재훈, 장혜원, 정동권, 정영옥, 정은실, 허혜자(2009). **초등 수학 학습지도의 이해**. 양서원.

강윤수, Chae Jeong-Lim(2010). 유리수 개념에 대한 대학생들의 이해와 추론. **한국학교수학회논문집, 13**(3), 483-498.

교육과학기술부(2011). **수학 5-2**. 서울: 두산동아.

교육과학기술부(2012), 교육과학기술부 고시 제 2011-361호(별책 8) **수학과 교육과정**.

교육부(2015a). **교사용지도서 수학 6-1**. 서울: 천재교육.

교육부(2015b). **수학 6-1**. 서울: 천재교육.

김수미(2015). 수학용어에 대한 논쟁을 통해 본 비(比) 에 대한미국과 한국의 관점차. **수학교육학연구, 25**(3).

김수현, 나귀수. (2008). 비와 비율 지도에 대한 연구. **수학교육학연구, 18**(3), 309-333.

박희옥, 박만구(2012). 비와 비율 학습에서 나타나는 초등학교 학생들의 인식론적 장애 분석. **초등수학교육, 15**(2), 159-170.

방정숙, 김상화(2007). 초등 교사의 수학과 교수법적 내용 지식 정립을 위한 교수･학습 자료 개발. **한국학교수학회논문집, 10**(1), 129-148.

정은실(2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

정은실(2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **학교수학, 5**(4), 421-440.

장혜원(2002). 초등학교 수학에서 비의 값과 비율 개념의 구별에 대한 논의. **학교수학, 4**(4), 633-642.

홍갑주(2013). 초등학교 2007 개정 교과서 비와 비율 관련 용어에 대한 고찰. **수학교육학연구, 23**(2), 285-295.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baroody, A. J. & Coslik, R. T. (2006). **수학의 힘을 길러주자**. (권성룡, 김남균, 김수환, 김용대, 남승인, 류성림, 방정숙, 신준식, 이대현, 이봉주, 조완영, 조정수 공역). 경문사. (원저는 1998년 출판).

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion*. Sense Publishers.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, 7(3), 2-8.

Cheang, W. K., Yeo, J. K. K., Chan, E. C. M., & Lim-Teo, S. K. (2007). Development of mathematics pedagogical content knowledge in student teachers. *The Mathematics Educator, 10*(2), 27-54.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Ding, M. (2008). Teacher knowledge necessary to address student errors and difficulties about equivalent fractions. In Kulm, G. (Ed.), *Teacher Knowledge and Practice in Middle Grades mathematics*. (pp. 147-171). Rotterdam, Netherlands: Sense.

Ekawati, R., Lin, F. & Yang, K. (2015). Primary Teachers' knowledge for teaching ratio and proportion in Mathematics: The case of Indonesia. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(3), 513-533.

Freudenthal H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel Publishing Company.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1988). Instruction and cognitive change in mathematics. *Educational Psychologist, 23*, 105-117.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

__________ (2007). Rational and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (Vol. 1, pp.629-668). United States of America: Information Age Publishing.

Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). *Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning*. In R. M. Zbiek (Series Ed.), Essential understandings. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

______ (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. (신현용, 승영조, 공역). 서울: 승산. (원저는 1999년 출판).

Manizade, A. G., & Mason, M. M. (2011). Using Delphi methodology to design assessments of teachers' pedagogical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 76*(2), 183-207.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. *Rational numbers: An integration of research*, 261-288.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Streefland, L. (1984). Search for the Roots of Ratio: Some Thoughts on the Long Term Learning Process (Towards... A Theory): Part Ⅰ: Reflections on a Teaching Experiment. *Educational Studies in Mathematics, 15*(4), 327-348.

________(1985). Search for the Roots of Ratio: Some Thoughts on the Long Term Learning Process (Towards... A Theory): Part II: The Outline of the Long Term Learning Process. *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

Thomson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of Rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.181-234). Albany, NY : Sunny Press.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Teacher Knowledge Necessary to Address Student Errors and Difficulties about Ratio and Rate

Kang, Hyangim (Korea National University of Education)
Choi, Eun Ah (Jeonju Ongoul Middle School)

In this study, we hope to reveal teacher knowledge necessary to address student errors and difficulties about ratio and rate. The instruments and interview were administered to 3 in-service primary teachers with various education background and teaching experiments. The results of this study are as follows. Specialized content knowledge(SCK) consists of profound knowledge about ratio and rate beyond multiplicative comparison of two quantities and professional knowledge about the definitions of textbook. Knowledge of content and students(KCS) is the ability to recognize students' understanding the concept and the representation about ratio and rate. Knowledge of content and teaching(KCT) is made up of knowledge about various context and visual models for understanding ratio and rate.

* Key Words : 비(ratio), 비율(rate), 학생들의 오류와 어려움에 대한 교사의 반응(teacher responses to students' errors and difficulties, TRED), 특수내용지식(specialized content knowledge, SCK), 내용과 학생에 대한 지식(knowledge of content and students, KCS), 내용과 교수에 대한 지식(knowledge of content and teaching, KCT)

논문접수 : 2015. 11. 10
논문수정 : 2015. 12. 13
심사완료 : 2015. 12. 14