

# 균열상장 모델의 소개와 적용

## Introduction to Crack Phase Field Model and Applications

### 1. 서론

본 기사에서는 균열진전 해석방법으로 최근 주목을 받고 있는 균열상장(crack phase field) 모델을 소개하고자 한다. 균열진전 해석기법은 Griffith(1920)의 파괴 에너지에 기반한 이론이 발표된 이후 지속적으로 새로운 기법이 개발되어 왔다. 다른 공학적 문제와 마찬가지로 균열진전 해석의 경우에도 구조 및 재료의 형상이나 작용 하중이 복잡할 경우 이론 해를 얻는 것이 쉽지 않아 컴퓨터를 활용한 수치해석 시뮬레이션에 의존하게 된다. 수치해석을 수행함에 있어서도 균열선단의 응력 집중에 의하여 균열문제의 해를 구하는 것은 결코 쉬운 작업이 아니다. 개발된 균열진전 해석 기법은 각각 장단점을 가지고 있고 새로운 균열진전 해석기법에 대한 지속적인 수요가 존재하고 있다. 균열상장 모델은 다중물리(multi-physics) 문제 해석이 보다 널리 수행됨에 따라, 이와 개념을 공유하는 다중물리 접근법을 활용한 균열진전 해석기법이다. 아래에 균열상장 모델의 핵심과 적용 예를 간략히 제시하였다.

### 2. 균열상장 모델의 개념

시뮬레이션에 의한 균열진전 해석기법은 여러 방법으로 분류될 수 있겠지만, 균열을 모델에 표현하는 방법에 따라서도 분류가 가능하다. 이 방법에 의하여 크게 두 가지 기법으로 분류될 수 있는데, 균열이 해석 영역에 기하학적으로 표현되는 여부에 따라 분류될 수 있다. 예를 들어 유한요소를 사용하여 균열을 기하학적으로 표현함으로써 균열의 형상을 직접적으로 나타내는 기법과 균열형상을 해석 영역에서 직접적으로 표현하지 않고 추가 변수나 기법 등으로 나타내는 방법으로 나눌 수 있다.

균열을 기하학적으로 표현하는 균열진전 해석기법의 초기 연구로써 철근콘크리트 보의 균열의 예상 진전 경로를 따라 사전에 균열형상을 고려한 유한요소 격자(mesh)를 생성하고 해석을 진행한 Ngo와 Scordelis(1967)의 사전 절점분리(node decoupling of prescribed crack) 기법을 들 수 있다(그림 1). 이 기법이 발전되어 1990년대부터 경계요소(interface element)를 이용한 균열진전 기법이 널리 사용되기 시작하였으며 현재까지도 광범위하게 활용되고 있다. 임의의 경로로 발생하는 균열진전 해석을 위하여 무요소법(meshless method)이나 적응형 격자 재생성법(adaptive remeshing method) 등이 제안되었으며, 경계요소를 균열선단의 적응형 격자에 선택적으로 삽입하는 기법을 사용하여 균열진전 해석을 수행하기도 한다.



한 동 석

연세대학교 토목환경공학과 부교수

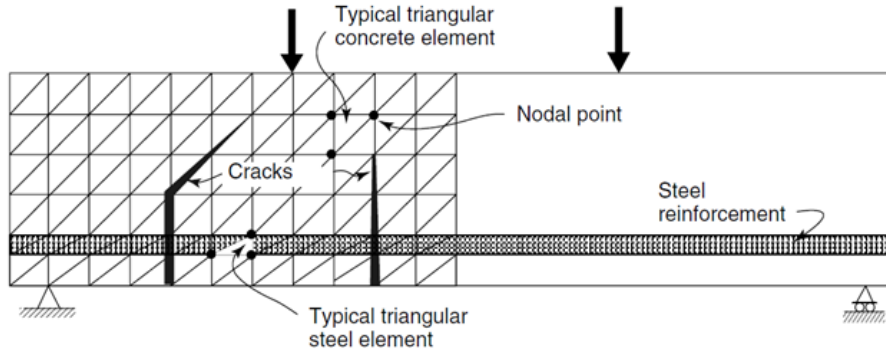


그림 1 균열진전 예상 경로를 따라 절점분리 기법을 적용한 힘 하중 하의 철근콘크리트 균열진전 해석 (Ngo와 Scordelis, 1967)

균열의 기하학적 형상을 직접적으로 표현하지 않는 균열진전 해석에는 운동학(kinematics)적 관계를 활용한 XFEM/GFEM 기법이 개발되어 널리 활용되고 있다. 반면에 구성방정식을 활용한 모델로 요소 소멸법(element extinction method)이나 손상 기법(damage approach)이 사용되어 왔다.

균열상장 모델은 위에 설명한 손상기법이 확장된 모델로 최근에 주목을 받고 있는 다중물리 해석기법을 접목하여 균열상(crack phase)을 나타내는 장(field)과 변형을 표현하는 장의 지배방정식을 연립하여 해를 구하는 기법이다. 균열상장 모델은 손상기법이 가지는 격자 생성의 용이함에 상장 모델이 가지는 유연성을 결합한 다중물리 해석기법이라 요약할 수 있다. 해석을 위해서는 상장 모델로 표현할 수 있는 균열상을 표현할 지배방정식이 필요하다. Francfort와 Marigo(1998)에 지배방정식이 제시되었으나, 최근 Miehe 등(2010)을 포함한 다수의 연구에서 모델이 재해석되어 여러 공학문제의 균열진전 해석에 시도되고 있다.

### 3. 균열상장(Crack Phase Field) 지배 방정식 및 해석방법

본 절에서는 균열상장 이론을 요약하고 균열진전 해석을 위한 해석기법을 기술하였다. 본 기사에서는 Miehe 등(2010)에 제시된 기법을 중심으로 핵심만을 소개하며, 참고문헌에 보다 자세한 내용이 제시되어 있다.

#### 3.1 균열형상의 상장 근사 기법

균열상장을 공간  $\boldsymbol{x}$ 와 시간  $t$ 에서 정의된  $d = d(\boldsymbol{x}, t)$ 로 표현한 정규화된 균열 범함수(regularized crack functional)  $\Gamma_l(d)$ 는

분산 균열형상을 고려함으로써 유도될 수 있고 그 형태는 다음과 같다.

$$\Gamma_l(d) = \int_B \gamma(d, \nabla d) dV \quad (1)$$

위의 균열표면 밀도함수(crack surface density function)  $\gamma$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{1}{2l} d^2 + \frac{l}{2} |\nabla d|^2 \quad (2)$$

여기에서,  $l$ 은 균열의 확산폭을 나타내는 매개변수로 수학적인 날카로운 균열(sharp crack)에 대비되어 균열상장 기법에서 균열을 느슨하게 확산 균열(diffusive crack) 형태로 표현하기 위하여 사용된다. 그림 2에는 이상적인 날카로운(sharp) 균열  $\Gamma$ 와 균열상장 모델의 확산(diffusive) 균열  $\Gamma_l(d)$ 가 도시화 되어 있다. 상장으로 표현된 균열은 폭이 0인 이상적인 균열에 반하여 일정한 폭( $l$ )을 갖는 것으로 가정한다.

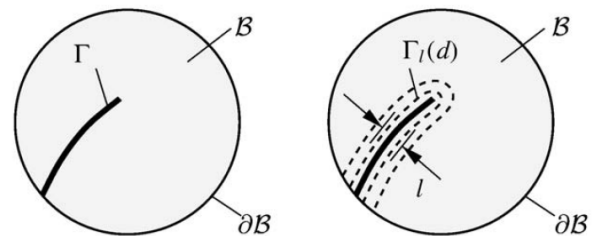


그림 2 균열상장 모델 개념도(Miehe 등, 2010). (좌) 이상적인 날카로운(sharp) 균열  $\Gamma$ , (우) 상장모델의 확산(diffusive) 균열  $\Gamma_l(d)$ . 확산 균열  $\Gamma_l(d)$ 는 균열상장  $d$ 의 함수로 균열폭  $l$ 을 갖는 것으로 가정

균열상장  $d$ 는 다음 최적화 문제의 해를 구함으로써 얻을 수 있다.

$$d(\mathbf{x}, t) = \text{Arg} \left\{ \inf_{d \in W_{\Gamma(t)}} \Gamma_l(d) \right\} \quad (3)$$

식 (3)은 균열이 존재하는  $\Gamma$  영역에서 상장 변수  $d$ 의 값이 1이 되는 Dirichlet-형태의 조건을 가진다.

$$W_{\Gamma(t)} = \{d \mid d(\mathbf{x}, t) = 1 \text{ at } \mathbf{x} \in \Gamma(t)\} \quad (4)$$

균열이 발생하지 않은 상태의  $d$ 는 0의 값을 가지며 균열발생이 진행됨에 따라 1로 근접하게 된다. 변분법을 범함수에 적용하면 다음의 Euler 방정식을 얻을 수 있으며,

$$d - l^2 \nabla^2 d = 0 \text{ in } B \quad (5)$$

경계에서는 Neumann 조건으로 다음을 만족해야 한다.

$$\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial B \quad (6)$$

위의 식은 외부 하중없이 단지 균열이 존재할 때 그 형상을 상장 분포로 표현하는 방정식이며 변형장과의 결합은 다음의 절차를 따른다.

### 3.2 상장 파괴를 고려한 변형장(Deformation Field)

외부 하중에 의한 변형장과 변형률의 관계를 미소변형으로 가정하여 다음과 같이 정의하고,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (7)$$

변형률을 고유값 분해(spectral decomposition)를 사용하여 주 변형률(principal strain)을 구하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n_{dim}} \boldsymbol{\varepsilon}^i \mathbf{n}^i \otimes \mathbf{n}^i = \boldsymbol{\varepsilon}_+ + \boldsymbol{\varepsilon}_- \quad (8)$$

주 변형률의 부호에 따라 양과 음의 변형률로 나누어, 균열진전은 인장에 의하여 진행되고 음수를 가지는 주 변형률은 균열진전에 영향을 주지 않는다고 가정한다.

자유에너지(free energy)도 이에 따라 양과 음으로 나누어, 양과 음의 주 변형률에 따른 에너지를 구분하여 다음과 같이 정의하게 된다.

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = [(1-d)^2] \Psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (9)$$

$\Psi_0^+$ 와  $\Psi_0^-$ 는 기준에너지(reference energy)인  $\Psi_0$ 를 주 변형률 성분 에 따라서, 가산 분할(additive decomposition)한 자유에너지이며, 예를 들어 등방성 탄성재료의 경우

$$\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda \text{tr}^2[\boldsymbol{\varepsilon}]/2 + \mu \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] \quad (10)$$

를 적절하게 분할하게 된다. 위에 정의된 자유에너지는 변형률  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 과 균열상장  $0 \leq d \leq 1$ 의 함수로 표현되어 변형장과 균열상장이 결합(coupled)된 형태가 된다. 자유에너지로부터 응력은 다음과 같이 정의되며, 이 역시 변형장과 균열상장의 함수가 된다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \quad (11)$$

### 3.3 이력장(History Field)을 고려한 균열상장 모델

변형장 및 균열상장을 포함한 에너지 변화율 범함수를 형성하여 변분법을 적용하면 결합장 방정식(coupled field equation)을 얻을 수 있다(Miehe 등, 2010). 이력장(history field)을 최대 양의 기준에너지(positive reference energy)로 정의하면,

$$H(\mathbf{x}, t) = \max[\Psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, s))], \quad s \in [0, t] \quad (12)$$

최종적으로 다음과 같은 변형장과 균열장의 지배방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \rho \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ g_c l \nabla^2 d - \left( \frac{g_c}{l} + 2\mathbf{H} \right) d + 2\mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기에서,  $g_c$ 는 파괴에너지(fracture energy),  $\rho$ 는 밀도,  $\mathbf{b}$ 는 체적력(body force)이다. 식 (13)의 두 번째 지배방정식은 균열상장 거동에 관한 것으로 변수  $\mathbf{H}$ 에 변형장 변수가 포함되어 균열상장과 변형장이 결합된 형태가 된다.

유도된 지배방정식은 널리 사용되는 Galerkin기법 등을 적

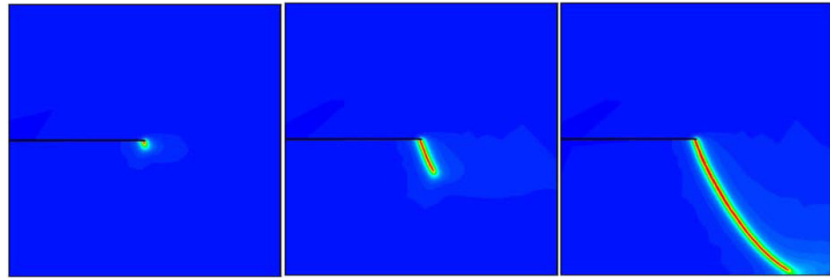


그림 3 단순 전단 하중을 받는 당부 균열 시편의 균열진전 해석(Miehe 등, 2010)

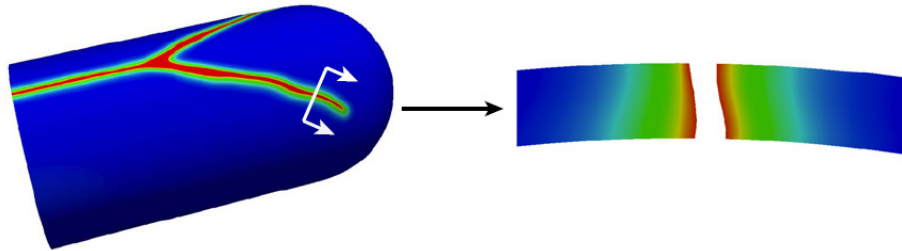


그림 4 균열상장 모델을 이용한 압력 용기의 동적 하중에 의한 균열분기 진전 해석(Borden 등, 2012)

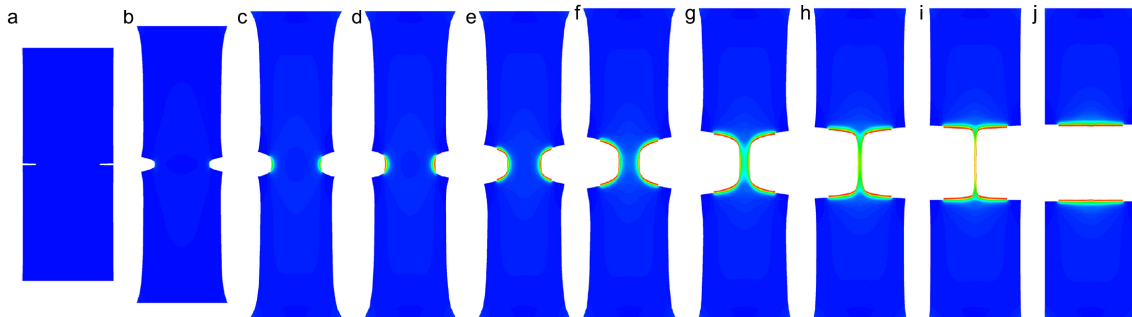


그림 5 대변형 상장 모델 기법을 적용한 탄성 고무재료의 균열진전 해석(Miehe와 Schänzel, 2014)

용한 유한요소해석 절차로 형상화될 수 있다. 적절한 가정에 따라 강한 연결이 되어 있는 두 지배방정식을 순차적으로 해석할 수 있는 기법(staggered solution)을 사용하여 해석이 가능하고, 두 지배방정식을 연립으로 동시에 해를 구하는 대신 반복(iterative) 해석에 의한 효율적인 해석기법을 적용할 수 있다.

#### 4. 상장 파괴 모델의 적용 예

소개된 이론은 미소변형을 기반으로 하였으며, 해석 문제에 따라 요구되는 이론의 확장을 통하여 다양한 문제의 해석 가능성이 제시되고 있다. 본 절에서는 다양한 균열상장 모델 기법의 대표적인 몇 가지 예를 제시한다.

그림 3은 단순 전단(simple shear) 하중이 상단을 따라 오른 쪽으로 작용하고 하단은 고정된 기본적인 모드 II 균열 시편의

균열진전 해석결과이다. 전단하중에 의해서 단부 균열(edge crack)의 선단이 아래쪽으로 진전되는 것을 확인할 수 있다(Miehe, 2010). 해석 중 격자 재생성 필요없이 균열이 해석 경계까지 진전될 수 있어 균열상장 모델이 균열진전 해석에 유용한 도구가 될 수 있음을 보여주는 좋은 예이다.

동적 하중하의 균열진전 문제에도 상장 파괴 모델의 적용 사례가 발표되었다(Borden 등, 2012). 그림 4에는 신속한 내부 압력 증가에 따라 압력 용기에 균열이 진전하는 해석을 보여주는데, 균열진전이 매우 빠른 경우 발생하는 균열분기(crack branching)를 모사 가능한 것을 제시하고 있다.

균열상장 모델은 대변형(large deformation) 균열진전 해석에도 적용이 가능하다. Miehe와 Schänzel(2014)에서는 대변형이 진행되는 탄성 고무재료의 균열진전 해석기법을 체계화 하여, 그림 5에서와 같이 대변형을 동반하는 재료의 양측단

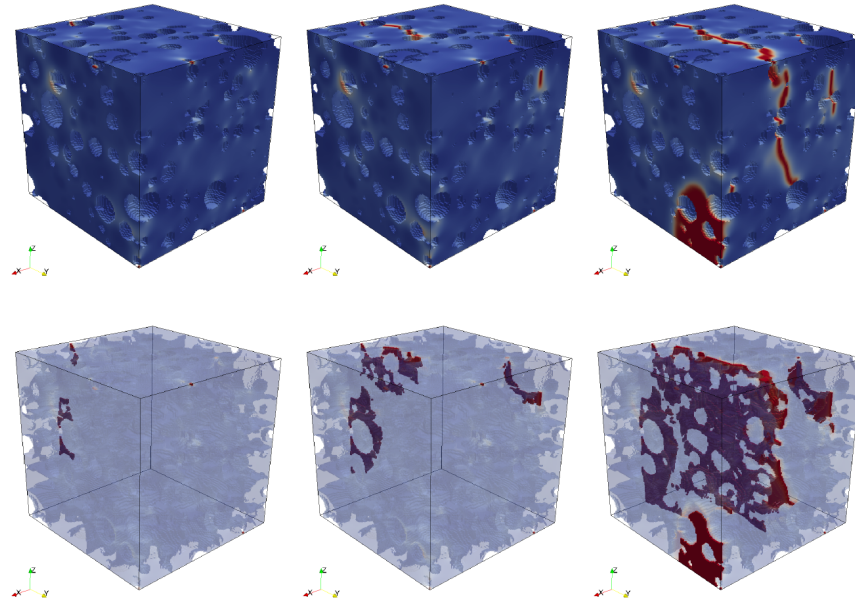


그림 6 균열상장 모델을 적용하여 임의의 구형 공극이 분포된 시멘트 페이스트 내의 균열발생 및 진전 해석 결과(Han 등, 2015)

부균열(double edge crack) 진전 해석이 가능함을 제시하였다.

그림 6은 복잡한 미세구조 공극 분포를 가지는 재료에 인장력이 가해졌을 때 균열이 발생하고 진전하는 해석을 균열상장 모델로 해석한 결과이다. 공극이 임의로 분포하여 균열의 발생 시점을 사전에 파악하기 어려운 복잡한 3차원 미세구조의 균열발생 및 진전 문제를 균열상장 모델로 해석이 가능하다는 것을 보여주고 있다(Han 등, 2015).

### 5. 결론

본 기사에서는 최근 주목을 받고 있는 균열상장 이론의 핵심과 적용 예를 살펴보았다. 제시된 예제를 통하여 알 수 있듯이 균열상장 모델은 난해한 균열진전 해석문제에 활용이 가능한 것을 알 수 있으며, 모델을 확장하여 여러 분야에 적용 가능성을 검증하는 연구가 활발히 진행되고 있다.

균열상장 모델은 난해한 균열진전 해석이 가능한 장점이 있는 반면에 단점도 존재한다. 특히, 유한요소 격자의 조밀성이 그것이다. 정확한 해를 구하기 위한 상장모델의 일반적 특성에 따라 균열진전 경로의 유한요소의 크기가 매우 작아야만 정확한 해를 얻을 수가 있으며, 이는 고성능 및 고용량의 계산 환경을 요구하게 된다. 그러나 지속적으로 향상되는 컴퓨터의 성능과 용량을 고려하면 균열상장 모델에 필요한 계산을 보다

손쉽게 수행할 수 있는 시기가 올 것으로 생각된다.

균열상장 모델을 다양한 분야에 적용한 연구결과가 발표되고는 있지만, 실제 실험결과를 정확히 표현하기 위한 모델링 변수 결정 기법이나 재료 특성을 고려한 모델 개발 등에 대한 폭 넓은 연구가 요구되고 있다. 기존 기법으로는 해의 수렴성 문제로 해석하지 못했던 난해한 균열진전 문제를 균열상장 모델로 정확도를 크게 포기하지 않고 용이한 계산을 수행할 수 있을 날을 기대해 본다.

### 6. 참고문헌

1. Borden, M., Verhoosel, C., Scott, M., Hughes, T., Landis, C., 2002. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 48, 797-826.
2. Han, T.-S., Zhang, X., Chung, S.-Y., Linder, C., 2015. *USNCCM13*, San Diego, USA.
3. Miehe, C., Hofacker, M., Welschinger, F., 2010. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 199, 2765-2778.
4. Miehe, C., Schänzel, L.-M., 2014. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 65, 93-113.
5. Ngo, D., Scordelis, A., 1967. *J. Amer. Conc. Inst.* 64, 152-163. 