

A Derivation of Sensitivity Equations of the Error Components to Analyze Performance in the Direct Fire Control System

Jaehun Kim[†] · Euiwhan Kim^{**} · Jeongyeob Lee^{***} · Gunkook Kim^{****}

ABSTRACT

In the direct Gun Fire Control System(GFCS), it is essential to analyze the impact of the specific error components on the hit probability to optimize the system design. For this purpose the sensitivity equations of these error components are conveniently used, but it is too difficult to get those equations for the complex system with too many system elements. Normally sensitivity analysis is performed using numerical and statistical methods for the ground combat system. This method requires much computation, and makes us difficult to estimate the sensitivity change of specific error component intuitively for the changing operating conditions. In this paper we propose a set of sensitivity equations deriving from closed form solution of the ballistic differential equation for the bullet. They are handy equations with very little computations, easy to understand the physical meaning of the related system variables. Some simulation results are shown to demonstrate usefulness of our algorithm for the 30mm projectile.

Keywords : Closed form Ballistic Solution, Sensitivity Analysis, Error Components, Hit Probability

직사화기 성능분석을 위한 오차요소별 민감도 식 유도

김재훈[†] · 김의환^{**} · 이정엽^{***} · 김건국^{****}

요 약

직사화기 사격통제장치에서 최적 설계를 위해서는 특정 오차요소가 명중률에 미치는 영향을 파악해야 한다. 이를 위해 가장 좋은 방법은 이들 오차요소에 대한 민감도 식을 구하는 것이나, 체계가 복잡하면 이를 정량적으로 유도하기가 쉽지 않다. 보통 제한된 운용조건에 대해 수치방법으로 민감도를 계산하며, 지상전투차량 등에서 널리 활용되고 있다. 그러나 이 방법은 다량의 시뮬레이션에 의존해야 하므로, 연산 시간이 많이 소요되고 데이터에 의존하므로, 대공화기와 같이 운용조건이 넓게 변화할 경우 민감도가 어떻게 변화할지 직관적으로 이해하는 데 어려움이 있다. 본 논문은 직사화기 탄도에 대한 닫힌 형태 탄도식을 유도하고, 이 식으로부터 오차요소별로 체계 종합오차에 대한 민감도 식을 유도하고, 이들의 영향을 종합하여 명중률을 계산하는 방법을 보인다. 유도된 민감도 식은 수치적분 방법과 달리 연산처리 시간이 짧으면서도 관련 변수 간 물리적 이해가 쉬워 체계설계 시 다양한 운용조건에 대해 편리하게 활용될 수가 있다. 30mm 탄에 대한 시뮬레이션을 통해 본 논문의 유용성을 보인다.

키워드 : 닫힌 형태 탄도해, 민감도 분석, 오차요소, 명중률

1. 서 론

지상 전투차량 및 대공화기 체계와 같은 직사화기체계에 명중률을 최적화하기 위해서는 체계 구성요소들이 명중률에 미치는 영향을 파악해야 한다. 이러한 목적으로 민감도 분석을 실시하며, 체계에서 독립적인 오차요소가 체계

종합오차에 미치는 영향을 분석한다[1-3].

민감도 분석은 복잡한 체계 특성상 보통 수치적인 방법에 의존하는 경우가 많은데, 체계 운용조건이 단순할 경우에는 효과적이거나, 표적의 이동 속도가 크고, 고각의 변화가 심한 대공화기 경우는 너무나 많은 운용조건이 발생하므로(4장 시뮬레이션 결과 Fig. 3~Fig. 13 참조), 수치적분 방법으로 각각의 경우에 대해 민감도를 계산하고 이를 저장하여 활용하는 방법은 연산 시간이 너무 많이 소요된다. 또한 운용조건이 조금만 달라져도 이것을 그대로 활용할 수가 없어서 Interpolation 해서 써야 하거나, 수치적분 방법으로 많은 시간을 들여서 새로 계산해야 하므로 매우 불편하다[1-3].

제일 좋은 방법은 수치적분 방법으로 민감도를 계산하는

[†] 정 회 원 : 사격통제연구소 대표
^{**} 정 회 원 : 아주대학교 시스템공학과 교수
^{***} 정 회 원 : 현대로템 수석연구원
^{****} 정 회 원 : 현대로템 선임연구원
Manuscript Received : September 8, 2015
First Revision : December 4, 2015
Accepted : December 4, 2015
* Corresponding Author : Gunkook Kim(gunkook34@hyundai-rottem.co.kr)

것이 아니라 체계의 관련 요소들로 구성된 정량적인 식으로 유도하고 필요 시마다 즉각적으로 계산하여 이용하는 것이다. 그러나 탄의 비행은 비선형미분방정식으로 기술되고, 체계 구성장비는 상호 간에 기능이 복잡하게 연결되어 특정 오차요소에 대해 체계종합 오차에 미치는 민감도 식을 유도하는 것은 쉽지가 않다[3].

본 논문은 이러한 문제점을 해결하기 위한 방안의 하나로 탄도미분방정식에 대한 닫힌 형태 해를 유도하고, 이를 이용하여 체계 명중률에 영향을 미치는 오차요소에 대한 민감도 식을 도출하는 방법을 제시하고, 이것을 이용하여 명중률을 계산하는 방법을 제시한다. 또한, 30mm 탄에 대한 시뮬레이션을 통해 다양한 사거리 및 고각 조건에서 본 논문에서 제시한 민감도 식의 유용성을 보인다.

서론에 이어 2장에서는 직사화기 탄도해에 대한 닫힌 형태 탄도식을 바탕으로 초고각(super-elevation), 방위각 및 탄자비행시간(TOF: Time Of Flight) 등 주요 변수에 대한 민감도 식을 유도한다. 3장에서는 2장에서 제시한 민감도 식을 바탕으로 체계 명중률을 계산하는 방법을 제시하며, 4장에서는 2장, 3장에 제시한 식을 바탕으로 30mm 대공화기에 대한 시뮬레이션을 수행하고, 그 결과를 제시한다. 마지막으로 5장에서는 결론을 맺는다.

2. 직사화기 탄도해 오차요소 식 유도

여기서는 탄도미분방정식에 대한 닫힌 형태 해를 유도하고, 이를 바탕으로 명중률 계산에 필요한 초고각, 방위각 오차요소 및 탄자비행시간 오차요소를 계산하기 위한 민감도 관련 식을 유도한다.

2.1 닫힌 형태 탄도해

직사화기 탄도식은 중력 반대방향과 이에 수직인 수평면 상에서 3축으로 Fig. 1과 같이 정의된다. 직사화기 탄도는 탄을 질점(point mass)으로 고려한 다음의 Equation (1)~(3)의 비선형미분방정식으로 기술할 수가 있으며, 지상전투차량 및 대공화기 등에 널리 사용하고 있다[4, 7, 9, 10].

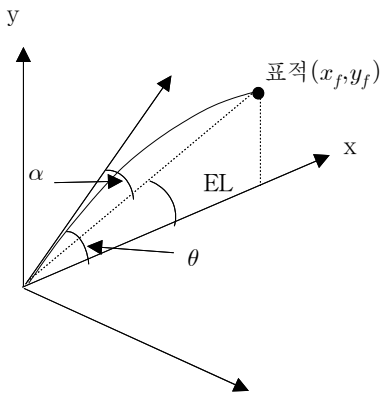


Fig. 1. Definition of Ballistic Trajectory Axis

$$\ddot{x}(t) = H(t)\dot{x}(t) \tag{1}$$

$$\ddot{z}(t) = H(t)\dot{z}(t)$$

$$\ddot{y}(t) = H(t)\dot{y}(t) - g \tag{2}$$

여기서 g 는 중력가속도이다.

$$H(t) = -\left(\frac{iS}{2w}\right)(\rho_g e^{-f_a y}) C_d v(t) \tag{3}$$

여기서 w 는 탄의 질량, S 는 탄의 단면적, i 는 탄의 형상을 나타내는 form factor이다. 또한 ρ_g 는 포 위치에서 공기 밀도, f_a 는 고도에 따른 공기밀도 감쇄 계수, $y(t)$ 는 탄의 고도이고, C_d 는 공기저항계수 및 $v(t)$ 는 표적의 속도이다.

Equation (1)~(3)으로 정의된 미분방정식은 비선형 미분방정식으로 일반적으로 닫힌 형태 해를 얻기가 어려워 수치적분 방법으로 계산한다[3-4]. 그러나 실시간 사격통제장치 등을 위해서는 수치적분 방법을 활용할 수가 없어서, 직사화기 운용조건을 고려하여 위 식을 근사화하여 닫힌 형태의 탄도해를 유도하여 사용한다[5, 7].

미분방정식을 근사화하기 위해서는 몇 가지 가정을 하게 되는데, 첫째 공기저항계수(C_d)를 지수 함수로 모델링할 수가 있어야 한다. 보통 공기저항이 적고 탄의 속도가 높은 탄의 경우는 C_d 가 다음과 같이 지수함수로 모델링할 수가 있다는 것이 잘 알려져 있다[5].

$$C_d = A_1 \left(\frac{v}{v_s}\right)^{-0.5} \tag{4}$$

여기서 v 는 탄속, v_s 는 음속에 해당하며, A_1 은 Equation (4)에 따라 지수로 모델링할 때 해당 계수이다.

둘째 가정은 Equation (3)에서 탄이 비행 중 받게 되는 공기밀도의 영향을 대표하는 등가고도를 다음과 같이 모델링할 수가 있다고 가정하는 것이다. Siacci 등에 의해 처음 제시된 이 방법은 지상 및 대공화기 체계에 널리 활용되고 있다[5-7].

$$\bar{y} = k_y(r, EL) y_f \tag{5}$$

셋째로 Equation (1)~(3)을 종합한 다음 거리 식에서

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{\dot{x}}{v} \ddot{x} + \frac{\dot{y}}{v} \ddot{y} + \frac{\dot{z}}{v} \ddot{z} \\ &= H(t)v(t) - g \sin(\theta(t)) \\ &\approx H(t)v(t) \end{aligned} \tag{6}$$

첫째 항과 비교하여 둘째 항의 크기가 작아서 이를 상대적으로 무시할 수가 있다고 가정하는 것이다.

위에서 기술한 세 가지 가정은 고속의 탄속을 유지하는 대부분의 지상 및 대공화기 체계에 대해 유효하며, 이를 적

용하면 Equation (1)~(3)의 탄도미분방정식은 상미분방정식이 되어 닫힌 형태의 해로 유도할 수가 있다[5-7, 9, 10].

표적의 거리를 R, 고각을 EL이라 하고, 탄이 표적까지 도달하는 비행시간을 T_f , 탄이 비행 중 중력에 의한 낙하(Q)를 보상하도록 부여하는 추가적인 고각을 초고각(super-elevation)으로서 α 로 표기하면 다음 식을 얻을 수가 있다[5-7].

$$T_f = \frac{R}{B - \beta R} \quad (7)$$

$$Q = \frac{1}{2}gT_f^2(1 - \frac{2\beta}{3B}R) \quad (8)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{R \sin EL + Q}{R \cos EL} - EL \quad (9)$$

여기서 B는 포구초속, $\beta = \frac{C_1 \sqrt{B}}{2}$ (10)

$$C_1 = (\frac{iS}{2w})(\rho_g e^{-f_a \bar{y}}) A_1 \sqrt{v_s} \quad (11)$$

$$\rho_g = \rho_s \frac{P}{273 + T} \quad (12)$$

여기서 ρ_s 는 표준상태 공기밀도, P는 포위지에서 대기압(mb), T는 기온($^{\circ}C$)이고, v_s 는 음속이다.

한편, 바람에 의해 탄도에 미치는 영향은 직사화기의 경우 거리 풍은 크기가 작아서 무시하고, 측풍에 대해서만 고려하며 다음과 같이 계산한다[4-7].

$$D_{wc} = V_{wc} \cdot (T_f - \frac{R}{B}) \quad (13)$$

여기서 V_{wc} 는 측풍속이다.

2.2 탄도해 민감도 식 유도

앞 절에서 정의된 탄도해 식을 이용하면, 탄도해에 영향을 주는 변수에 대한 민감도 식을 도출할 수가 있다.

1) 초고각 민감도 식 유도

발사 고각을 $\theta(=\alpha + EL)$, 표준 고각을 EL, 초고각을 α 라 하면,

$$\tan \alpha = \tan(\theta - EL) = \frac{\tan \theta - \tan EL}{1 + \tan \theta \tan EL} \quad (14)$$

α 가 작다고 할 때,

$\tan \alpha \approx \alpha$ 라 여길 수가 있으므로,

$$\alpha = \frac{\tan \theta - \tan EL}{1 + \tan \theta \tan EL} \quad (15)$$

여기서 $\tan EL = \frac{y}{x}$, $\tan \theta = \frac{y+Q}{x}$ 를 대입하고 Fig. 2를 참고하면,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(y+Q)x - xy}{x^2 + y^2 + yQ} \\ &= \frac{xQ}{R^2 + yQ} \\ &= \frac{Q \cos EL}{R + Q \sin EL} \end{aligned} \quad (16)$$

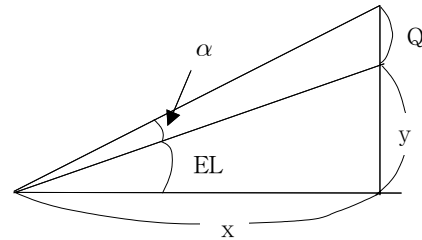


Fig. 2. Relations of Elevation Variables

Equation (7)을 Equation (8)에 대입하면,

$$Q = \frac{gR^2}{2(B - \beta R)^2} (1 - \frac{2\beta}{3B}R) \quad (17)$$

그러면 Equation (16)은 $\alpha = f_{\alpha}(R, EL, B, \beta)$ 로 표현되어 초고각은 R, EL, B, β 를 독립변수로 갖는 함수가 된다. 또한 β 는 Equation (10)~(12)에 의해 P, T, \bar{y} 식이므로, 초고각을 이들 변수에 대해 1차 미분하면 아래 식과 같은 민감도 식을 유도할 수가 있다.

$$\begin{aligned} \delta \alpha &= \frac{d\alpha}{dR} \delta R + \frac{d\alpha}{dB} \delta B + \frac{d\alpha}{dT} \delta T \\ &+ \frac{d\alpha}{dP} \delta P + \frac{d\alpha}{d\bar{y}} \delta \bar{y} + \frac{d\alpha}{dEL} \delta EL \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{d\alpha}{dR} = \frac{\cos EL (R \frac{dQ}{dR} - Q)}{(R + Q \sin EL)^2} \quad (19)$$

$$\frac{dQ}{dR} = \frac{gR(B - \beta R + \frac{\beta^2 R^2}{3B})}{(B - \beta R)^3} \quad (20)$$

$$\frac{d\alpha}{dB} = \frac{\frac{dQ}{dB} R \cos EL}{(R + Q \sin EL)^2} \quad (21)$$

$$\frac{dQ}{dB} = \frac{gR^2(\beta BR - \beta^2 R^2 - 3B^2)}{3B^2(B - \beta R)^3} \quad (22)$$

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\frac{dQ}{d\beta} R \cos EL}{(R + Q \sin EL)^2} \quad (23)$$

$$\frac{dQ}{d\beta} = \frac{gR^2(2B - \beta R)}{3B(B - \beta R)^3} \quad (24)$$

$$\frac{d\alpha}{dT} = \frac{d\alpha}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} \quad (25)$$

$$\frac{d\alpha}{dP} = \frac{d\alpha}{d\beta} \frac{d\beta}{dP} \quad (26)$$

$$\frac{d\alpha}{d\bar{y}} = \frac{d\alpha}{d\beta} \frac{d\beta}{d\bar{y}} \quad (27)$$

Equation (25)~(27)에서

$$\frac{d\beta}{dT} = - \frac{\beta(-0.303_1 T_k + v_s)}{v_s T_k} \quad (28)$$

$$\frac{d\beta}{dP} = \frac{K_c e^{-f_{a\bar{y}}}}{v_s^{\alpha_1} T_k} \frac{\sqrt{B}}{2} \quad (29)$$

$$\frac{d\beta}{d\bar{y}} = -\beta f_{a\bar{y}} k_y \frac{\sqrt{B}}{2} \quad (30)$$

또한,

$$\frac{d\alpha}{dEL} = \frac{-Q(Q + R \sin EL)}{(R + Q \sin EL)^2} \quad (31)$$

한편, Equation (18)로부터 초고각의 민감도에 영향을 미치는 거리, 포구초속, 기온, 기압, 고도 및 고각 등 6가지 변수들은 상호 간에 독립적으로 작용하므로, Equation (18)로 결합한 전체 오차는 이들 각각의 오차들의 특성을 이용하여 계산할 수가 있다. 즉, 이들 오차들의 각각의 평균을 $v_R, v_B, v_T, v_P, v_{\bar{y}}, v_{EL}$ 이라 하고, 분산을 $\sigma_R^2, \sigma_B^2, \sigma_T^2, \sigma_P^2, \sigma_{\bar{y}}^2, \sigma_{EL}^2$ 이라 하면, Equation (18)로 종합한 오차는 다음과 같은 바이어스(v_α)와 분산(σ_α^2)을 갖는다.

$$v_\alpha = S_{\alpha,R} v_R + S_{\alpha,B} v_B + S_{\alpha,T} v_T + S_{\alpha,P} v_P + S_{\alpha,\bar{y}} v_{\bar{y}} + S_{\alpha,EL} v_{EL} \quad (32)$$

$$\sigma_\alpha^2 = S_{\alpha,R}^2 \sigma_R^2 + S_{\alpha,B}^2 \sigma_B^2 + S_{\alpha,T}^2 \sigma_T^2 + S_{\alpha,P}^2 \sigma_P^2 + S_{\alpha,\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{y}}^2 + S_{\alpha,EL}^2 \sigma_{EL}^2 \quad (33)$$

여기서,

$$S_{\alpha,R} = \frac{\delta\alpha}{\delta R}, S_{\alpha,B} = \frac{\delta\alpha}{\delta B}, S_{\alpha,T} = \frac{\delta\alpha}{\delta T}, S_{\alpha,P} = \frac{\delta\alpha}{\delta P}, S_{\alpha,\bar{y}} = \frac{\delta\alpha}{\delta \bar{y}}, S_{\alpha,EL} = \frac{\delta\alpha}{\delta EL}$$

$$v_R = E[\delta R], v_B = E[\delta B], v_T = E[\delta T], v_P = E[\delta P], v_{\bar{y}} = E[\delta \bar{y}], v_{EL} = E[\delta EL]$$

위에서 $E[x]$ 는 x에 대한 평균값을 의미한다.

2) 방위각 민감도 식 유도

탄도의 측면에 작용하는 힘은 측풍과 Drift이다.

Drift는 회전 안정 탄(spin stabilized projectile)의 경우 탄의 회전모멘트와 탄이 중력에 의해 곡선을 그리면서 받는 자이로 세차운동 효과로 탄이 측면으로 휘는 현상으로, 질점 탄도방정식으로는 기술이 되지 않는다. 보통 별도의 보조 식으로 따로 계산하며, 본 논문에서는 Drift에 의한 민감도는 고려하지 않는다[7].

측풍속에 의한 탄의 측면 이동식은 Equation (13)으로 표현되었으므로, 관련된 변수에 대해 다음과 같이 민감도를 구할 수가 있다.

$$D_{wc} = v_{wc} \cdot (t - \frac{R}{B}) = v_{wc} \cdot (\frac{R}{B - \beta R} - \frac{R}{B}) \approx v_{wc} \cdot \beta (\frac{R}{B})^2 \quad (34)$$

$$\delta D_{wc} = \frac{dD_{wc}}{dv_{wc}} \delta v_{wc} + \frac{dD_{wc}}{d\beta} \delta \beta + \frac{dD_{wc}}{dB} \delta B + \frac{dD_{wc}}{dR} \delta R \quad (35)$$

여기서 v_{wc} 는 측풍속이고

$$\frac{dD_{wc}}{dv_{wc}} = \beta (\frac{R}{B})^2, \frac{dD_{wc}}{d\beta} = (\frac{R}{B})^2 v_{wc} \quad (36)$$

$$\frac{dD_{wc}}{dB} = -\frac{2v_{wc}\beta R^2}{B^3}, \frac{dD_{wc}}{dR} = \frac{2\beta R v_{wc}}{B^2}$$

또한,

$$\delta \beta = \frac{d\beta}{dT} \delta T + \frac{d\beta}{dP} \delta P + \frac{d\beta}{d\bar{y}} \delta \bar{y} \quad (37)$$

이고, $\frac{d\beta}{dT}, \frac{d\beta}{dP}, \frac{d\beta}{d\bar{y}}$ 는 Equation (28)~(30)으로 계산할 수가 있으므로, Equation (36)을 Equation (35)에 대입하여 정리하면,

$$\delta D_{wc} = \frac{dD_{wc}}{dv_{wc}} \delta v_{wc} + \frac{dD_{wc}}{dB} \delta B + \frac{dD_{wc}}{dR} \delta R + \frac{dD_{wc}}{dT} \delta T + \frac{dD_{wc}}{dP} \delta P + \frac{dD_{wc}}{d\bar{y}} \delta \bar{y} \quad (38)$$

여기서

$$\frac{\delta D_{wc}}{\delta T} = (\frac{R}{B})^2 v_{wc} \frac{d\beta}{dT}, \frac{\delta D_{wc}}{\delta P} = (\frac{R}{B})^2 v_{wc} \frac{d\beta}{dP} \quad (39)$$

$$\frac{\delta D_{wc}}{\delta \bar{y}} = (\frac{R}{B})^2 v_{wc} \frac{d\beta}{d\bar{y}}$$

Equation (38)을 거리 R, 고각 EL 위치의 표적에 대한 방위각 변화량으로 환산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta Az_{vwc} &= \tan^{-1} \frac{\delta D_{wc}}{R \cos EL} \\ &\approx \frac{\delta D_{wc}}{R \cos EL} \end{aligned} \quad (40)$$

이것을 Equation (38)로부터 방위각 민감도에 영향을 미치는 측풍속, 포구초속, 거리, 기온, 기압 및 고도 등 6가지 변수들은 상호 간에 독립적으로 작용하므로 이들 전체를 종합한 오차는 Equation (32), (33)과 유사한 방법으로 다음과 같이 계산할 수가 있다.

즉, Equation (38)로 종합한 방위각 오차의 바이어스(u_ϕ)와 분산(σ_ϕ^2) 값은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} u_\phi &= (S_{\phi,vwc} u_{vwc} + S_{\phi,B} u_B + S_{\phi,R} u_R \\ &+ S_{\phi,T} u_T + S_{\phi,P} u_P + S_{\phi,\bar{y}} u_{\bar{y}}) / R \cos EL \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi^2 &= (S_{\phi,vwc}^2 \sigma_{vwc}^2 + S_{\phi,B}^2 \sigma_B^2 + S_{\phi,R}^2 \sigma_R^2 \\ &+ S_{\phi,T}^2 \sigma_T^2 + S_{\phi,P}^2 \sigma_P^2 + S_{\phi,\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{y}}^2) / (R \cos EL)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

여기서

$$\begin{aligned} S_{\phi,vwc} &= \frac{\delta D_{wc}}{\delta v_{wc}}, S_{\phi,B} = \frac{\delta D_{wc}}{\delta B}, S_{\phi,R} = \frac{\delta D_{wc}}{\delta R}, \\ S_{\phi,T} &= \frac{\delta D_{wc}}{\delta T}, S_{\phi,P} = \frac{\delta D_{wc}}{\delta P}, S_{\phi,\bar{y}} = \frac{\delta D_{wc}}{\delta \bar{y}} \end{aligned}$$

3) 탄자비행시간 민감도 식 유도

탄자비행시간은 Equation (7)로 주어졌고, 이에 대한 민감도 식은 다음과 같다.

$$T_f = \frac{R}{B - \beta R} \text{ 를 이용하면}$$

$$\begin{aligned} \delta T_f &= \frac{dT_f}{dR} \delta R + \frac{dT_f}{dB} \delta B + \frac{dT_f}{dT} \delta T \\ &+ \frac{dT_f}{dP} \delta P + \frac{dT_f}{d\bar{y}} \delta \bar{y} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{dT_f}{dR} = \frac{B}{(B - \beta R)^2} = \frac{B T_f^2}{R^2} \quad (44)$$

$$\frac{dT_f}{dB} = \frac{-R}{(B - \beta R)^2} = -\frac{T_f^2}{R} \quad (45)$$

$$\frac{dT_f}{d\beta} = \frac{R^2}{(B - \beta R)^2} = T_f^2 \quad (46)$$

$$\frac{dT_f}{dT} = \frac{dT_f}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} \quad (47)$$

$$\frac{dT_f}{dP} = \frac{dT_f}{d\beta} \frac{d\beta}{dP} \quad (48)$$

$$\frac{dT_f}{d\bar{y}} = \frac{dT_f}{d\beta} \frac{d\beta}{d\bar{y}} \quad (49)$$

Equation (47)~(49)에서 $\frac{d\beta}{dT}, \frac{d\beta}{dP}, \frac{d\beta}{d\bar{y}}$ 는 Equation (28)~(30)으로 구할 수가 있다.

Equation (43)으로부터 거리, 포구초속, 기온, 기압 및 고도의 5가지 변수들의 오차로 인한 탄자비행시간 종합오차를 다음과 같이 구할 수가 있다.

탄자비행시간 오차의 바이어스(u_{T_f})와 분산($\sigma_{T_f}^2$) 값은

$$\begin{aligned} u_{T_f} &= S_{T_f,R} u_R + S_{T_f,B} u_B + S_{T_f,T} u_T \\ &+ S_{T_f,P} u_P + S_{T_f,\bar{y}} u_{\bar{y}} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{T_f}^2 &= S_{T_f,R}^2 \sigma_R^2 + S_{T_f,B}^2 \sigma_B^2 + S_{T_f,T}^2 \sigma_T^2 \\ &+ S_{T_f,P}^2 \sigma_P^2 + S_{T_f,\bar{y}}^2 \sigma_{\bar{y}}^2 \end{aligned} \quad (51)$$

표적이 등속 운동을 한다고 가정할 때, 표적의 수평 및 수직 속도를 각각 $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ 라 하면, 탄자비행시간 후의 표적 위치는 다음과 같다.

$$x(t + T_f) = x(t) + T_f \dot{x}(t)$$

$$y(t + T_f) = y(t) + T_f \dot{y}(t)$$

또한 탄자비행시간 후의 표적예측위치 오차는 다음과 같이 구할 수가 있다.

$$\delta x_{tf} = \delta x(t) + T_f \delta \dot{x}(t) + \delta T_f \dot{x}(t) \quad (52)$$

$$\delta y_{tf} = \delta y(t) + T_f \delta \dot{y}(t) + \delta T_f \dot{y}(t) \quad (53)$$

이 식으로부터 각각의 오차평균 및 분산을 다음과 같이 정의할 수가 있다.

$$u_{tf} = \overline{\delta x_{tf}} = \overline{\delta x} + T_f \overline{\delta \dot{x}} + \overline{\delta T_f} \dot{x}(t) \quad (54)$$

$$\sigma_{u_{tf}}^2 = \sigma_x^2 + T_f^2 \sigma_{\dot{x}}^2 + \sigma_{T_f}^2 \dot{x}(t)^2 \quad (55)$$

$$v_{tf} = \overline{\delta y_{tf}} = \overline{\delta y} + T_f \overline{\delta \dot{y}} + \overline{\delta T_f} \dot{y}(t) \quad (56)$$

$$\sigma_{v_{tf}}^2 = \sigma_y^2 + T_f^2 \sigma_{\dot{y}}^2 + \sigma_{T_f}^2 \dot{y}(t)^2 \quad (57)$$

앞에서 초고각 및 방위각 오차요소가 각도로 정의되었으므로, 3장에서 이들을 종합한 오차를 구하기 위하여는 Equation (54)~(57)의 계산 결과를 R로 나누어 각도단위로 환산할 수 있다.

3. 민감도를 이용한 명중률 분석

대공화기 체계에서 포사격 시 명중률은 탄이 비행하여 표적 중심과 떨어진 오차(탄착오차) 크기의 함수로 표시할 수가 있다.

탄착오차에 영향을 미치는 요소는 체계에서 표적예측 및 탄도 계산에 영향을 미치는 수많은 오차요소들이 중첩되어 발생한다. 중앙극한정리에 의하면 독립적인 많은 오차요소들이 중첩될 경우에는 종합오차는 가우시안 분포를 이루게 되므로 종합오차 평균 및 분산은 각각의 오차로부터 다음과 같이 계산할 수가 있다.

즉, 각각의 오차들의 평균 및 분산을 u_i, σ_i^2 , 여기서 $i=1 \dots N$ 이라 하면, 전체 탄착 오차의 평균 u 및 분산 σ^2 는 다음과 같다.

$$u = \sum_{i=1}^N u_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \quad (58)$$

이때 표적의 크기가 d 로 주어지면, 명중률은 다음 식으로 구할 수가 있다[8].

$$Pr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{y-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \exp\left[-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (59)$$

수직 및 수평 크기를 갖는 표적에 대한 명중률은 탄착오차의 수평 및 수직 오차 성분을 고려하여 계산할 수가 있다. 수평성분을 x , 수직성분을 y 그리고 탄착오차의 평균 및 분산을 각각 (u, σ_x^2) 및 (v, σ_y^2) 라 하면, 명중률은

$$Pr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sigma_y} \int_{y-\frac{dy}{2}}^{\frac{dy}{2}} \int_{x-\frac{dx}{2}}^{\frac{dx}{2}} \exp\left[-\frac{(x-u)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-v)^2}{2\sigma_y^2}\right] dx dy \quad (60)$$

2장에서 구한 초고각 오차요소는 수직오차를 유발하고 방위각 오차요소는 수평오차를 유발하며, 탄자비행시간 오차는 표적 이동 방향에 따라 수평 및 수직성분 오차에 영향을 미치므로, 탄착오차 식은 다음과 같이 된다.

수평성분 :

$$u = u_\phi + u_{tf} + u_{etc.x} \quad (61)$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_\phi^2 + \sigma_{utf}^2 + \sigma_{etc.x}^2 \quad (62)$$

수직성분 :

$$v = v_\alpha + v_{tf} + v_{etc.y} \quad (63)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_{utf}^2 + \sigma_{etc.y}^2 \quad (64)$$

위에서 u_ϕ 는 방위각 오차요소 평균, v_α 는 초고각 오차요소 평균, $u_{tf.x}$ 는 탄자비행시간 오차에 의한 수평성분 예측오차 평균, $u_{etc.x}$ 는 기타 다른 시스템 오차요소에 의한 수평 오차 평균을 의미한다. 또한, v_α 는 초고각 오차요소 평균, $v_{tf.y}$ 는 탄자비행시간 오차에 의한 수직성분 예측오차 평균, $v_{etc.y}$ 는 기타 다른 시스템 오차요소에 의한 수직 오차평균을 의미한다. 위에서 구한 수평 및 수직성분 오차식을 이용하면 Equation (60)으로부터 명중률을 구할 수가 있다.

4. 시뮬레이션

여기서는 30mm 탄에 대하여 앞 절에서 제시한 민감도 식에 대한 시뮬레이션을 수행한다.

표적의 거리를 1km, 2km, 3km에 대해 각각 고각을 0도에서 60도까지 10도 간격으로 변경하면서, 시뮬레이션한 결과를 보인다. 대기조건은 표준대기조건을 기준으로 하였다. (기온 15도, 기압 1013mb)

4.1 초고각에 대한 민감도 결과

초고각에 영향을 미치는 요소는 Equation (18)로부터 거리, 포구초속, 기온, 기압, 고도 및 표적고각 등 6가지이다. 이들 요소들을 각각 10씩 변화시켰을 때 초고각 변동을 구해보면 Fig. 3, Fig. 4와 같다. 이들 그림으로부터 각 요소들에 대한 민감도는 거리와 고각에 따라 변화가 큰 것을 알 수가 있다. 기온, 기압, 고도에 대한 변동이 상대적으로 작은 것을 알 수가 있으며, 고각과 탄속 및 거리에 대한 민감도가 상대적으로 크다는 것을 알 수가 있다.

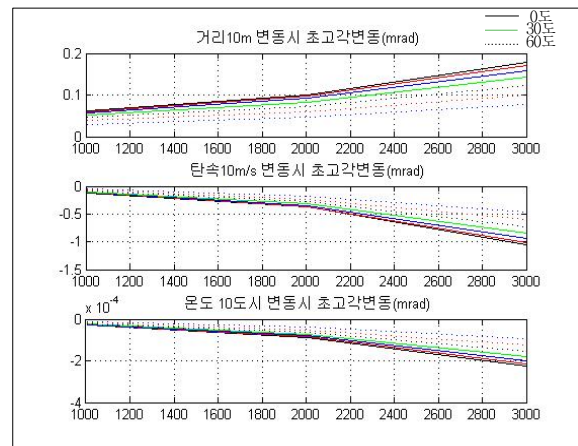


Fig. 3. Sensitivity 1 to the Super-Elevation

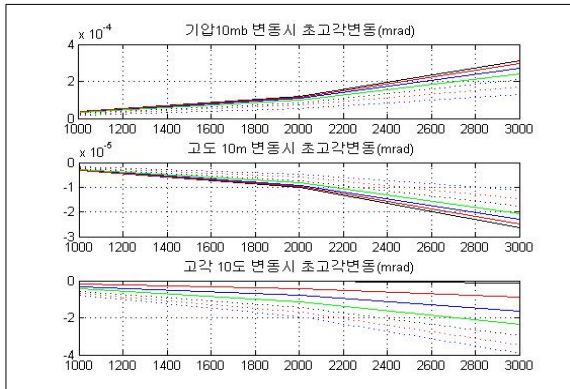


Fig. 4. Sensitivity 2 to the Super-Elevation

만일 거리, 포구초속, 기온, 기압, 고도 및 고각의 오차가 각각 바이어스 0, 표준편차 5라고 가정하면, 이들 오차에 의한 전체 오차는 Equation (32), (33)으로부터 바이어스 0, 분산은 다음 Fig. 5와 같다.

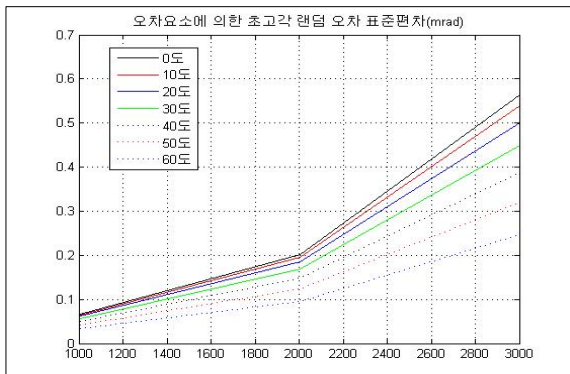


Fig. 5. Standard Deviation Error Due to Super-Elevation Error Components

4.2 측풍에 대한 방위각 민감도 결과

Fig. 6, Fig. 7은 Equation (36), (39)에 따라 탄도방위각에 영향을 미치는 요소들에 대한 민감도를 계산한 결과이다.

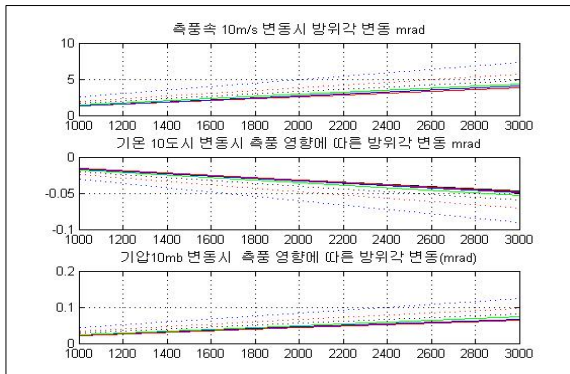


Fig. 6. Sensitivity 1 to the Azimuth Due to Wind

측풍속 민감도는 10m/s 변화 시 계산한 결과이고, 기온, 기압, 고도, 탄속 및 거리에 대한 민감도 계산 시는 측풍속

크기를 5m/s 기준으로 계산하였다. 거리 및 고각이 변화함에 따라, 측풍속에 대한 민감도가 크게 변화함을 알 수가 있다.

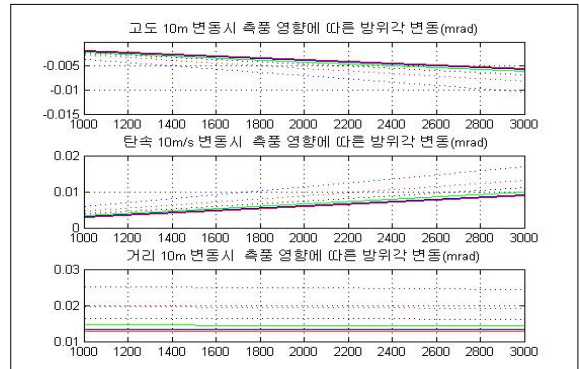


Fig. 7. Sensitivity 2 to the Azimuth Due to Wind

만일 측풍속, 거리, 포구초속, 기온, 기압, 고도 등 6가지 변수 오차가 각각 바이어스 0, 표준편차 5라고 가정하면 이들 오차에 의한 전체 방위각 오차는 Equation (41), (42)로부터 바이어스 0, 분산은 다음 Fig. 8과 같다.

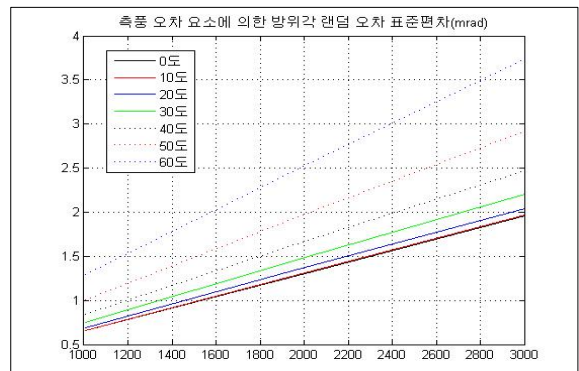


Fig. 8. Standard Deviation Error Due to Wind Error Components

4.3 탄자비행시간에 대한 민감도 결과

Fig. 9, Fig. 10은 Equation (43)~(49)에 따라 탄자비행시간에 영향을 주는 거리, 탄속, 기온, 기압 등을 10씩 변화시켰을 때 민감도를 나타낸 것이다.

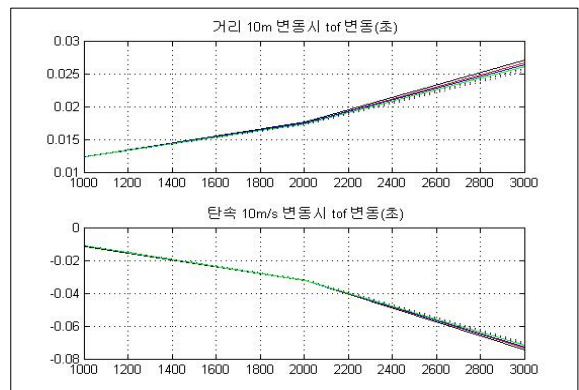


Fig. 9. Sensitivity 1 to TOF

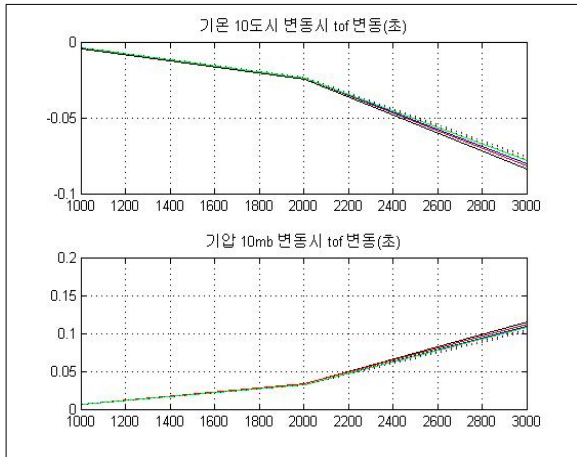


Fig. 10. Sensitivity 2 to TOF

탄자비행시간에 영향을 미치는 거리, 포구초속, 기온, 기압, 고도 등 5가지 요소들에 의한 종합오차는 Equation (50), Equation (51)로 구할 수가 있다. 이들 각각의 오차가 바이어스 0, 표준편차 5인 크기를 갖는다고 하면 탄자비행시간 종합오차의 바이어스는 0, 표준편차는 다음 Fig. 11과 같다.

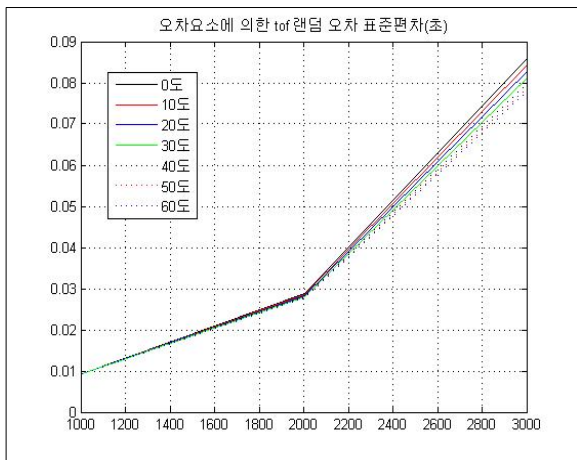


Fig. 11. Standard Deviation Error Due to TOF Error Components

탄자비행시간 후 표적위치 예측오차를 고려하기 위해 Equation (54)~Equation (57)로 주어진 오차 성분을 고려하자. 표적의 속도가 수평방향으로 200m/s, 수직방향 0m/s, 그리고 수평 및 수직 위치 오차 평균은 각각 0, 표준편차는 각각 1m, 0m라 하고, 속도 오차의 평균은 각각 0, 표준편차는 1m/s, 0m/s라 하면 표적위치 예측오차는 다음과 같다.

$$u_{tof} = 0, v_{tof} = 0, \sigma_{vtof} = 0$$

$$\sigma_{u_{tof}}^2 = 1 + T_f^2 + \sigma_{t_{tof}}^2 200^2$$

Fig. 11의 조건을 적용하여 수평방향의 예측오차 표준편차($\sigma_{u_{tof}}/R$)를 나타내면 다음 Fig. 12와 같다.

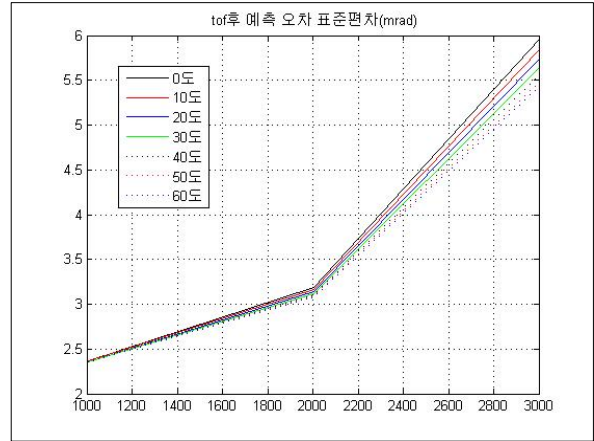


Fig. 12. Standard Deviation for the Predicted Position after TOF

4.4 민감도 결과를 활용한 명중률 분석

3장에서 기술한 바와 같이 체계의 개별 오차들이 탄착오차에 미치는 크기들이 파악되면, Equation (61)~Equation (64)와 같이 수평 및 수직 오차 성분의 평균 및 분산을 계산할 수가 있다. 그러면, 이들 값을 Equation (60)에 대입하여 명중률을 구할 수가 있다.

여기서는 민감도 식을 활용하여 명중률을 계산하는 한 예를 보인다. 초고각, 측풍 및 탄자비행시간 오차에 의한 예측위치오차 조건을 Fig. 5, Fig. 8 및 Fig. 12와 같이 가정하고, 탄 자체의 분산을 수평, 수직 각각 1mrad, 그 외 체계의 다른 오차요소들을 무시하면, Equation (60)에 의해 체계 명중률을 계산할 수가 있다. 이때 표적의 크기를 수평 6m, 수직 4m라 하면, 관련 식은 다음과 같다.

$$u = v = 0$$

$$\sigma_x^2 = (\sigma_\phi R)^2 + \sigma_{u_{tof}}^2 + (\sigma_{ammo} R)^2$$

$$\sigma_y^2 = (\sigma_\alpha R)^2 + \sigma_{v_{tof}}^2 + (\sigma_{ammo} R)^2$$

$$dx = 6, dy = 4$$

$$Pr = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sigma_y} \int_{y=-\frac{dy}{2}}^{y=\frac{dy}{2}} \int_{x=-\frac{dx}{2}}^{x=\frac{dx}{2}} \exp\left[-\frac{(x-u)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-v)^2}{2\sigma_y^2}\right] dx dy$$

위에서 언급한 조건을 적용하여 명중률을 계산하면 다음 Fig. 13과 같다.

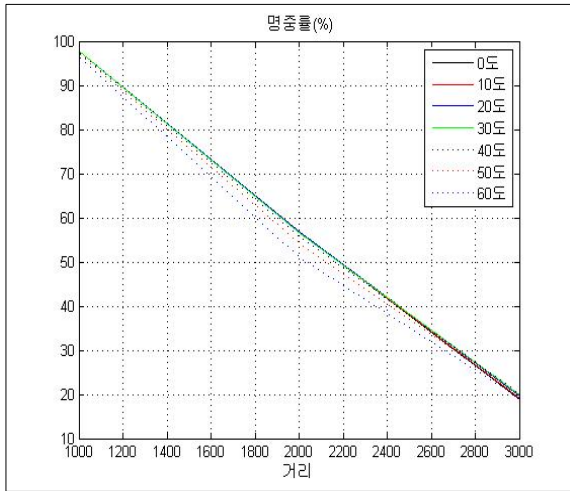


Fig. 13. Hit Probability Using System Error Components

여기서는 특정한 표적 조건에 대해 명중률을 계산하는 방법을 보였지만, 앞에서 제시한 식을 이용하고 원하는 데이터를 적용하면 체계의 일반적인 모든 운용조건에 대해서도 명중률을 계산할 수가 있다.

5. 결론

본 논문에서는 직사화기 명중률에 영향을 미치는 체계 초고각, 방위각 및 탄자비행시간 오차요소들에 대한 민감도 식을 유도하고, 이들을 이용하여 체계 명중률을 계산하는 방법을 제시하였다.

기존에 민감도 분석은 수치적인 방법에 의존하여 사거리 및 고각의 운용범위가 넓은 대공화기 명중률 분석 등에는 시간이 너무 많이 걸리고, 관련 변수 간 영향에 대한 직관적인 이해가 어려웠다.

본 논문에서 제시한 민감도 식은 이러한 문제점을 해소하고, 실시간으로 오차요소를 분석하고 체계의 명중률 개선을 위한 설계를 보완하는 데 활용될 수가 있다. 본 논문에서는 30mm 대공화기에 대한 시뮬레이션을 통해 본 논문에서 제시한 민감도 식의 유용성을 보였다.

References

[1] Jongkyu Kim, et al., "A study on the error sources and hit probability of fire control system," ADD, Aug., 1987.
 [2] Chang Deok Yang, et al., "A Design of Anti-Aircraft Artillery Model for the Surface-to-Air Virtual Engagement," *Jouranl of Korean Military Science Technology*, Vol.14, No.4, pp.639-647, Aug., 2011.

[3] Kang Park, et al., "Sensitivity analysis of design parameters of an anti-aircraft gun for hit probability enhancement," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol.27, Issue.10, pp.3043-3046, Jul., 2013.
 [4] Herrmann, "Exterior Ballistics," U. S. Naval Institute, 1935.
 [5] JF. V. Johnson, et al., "Formulation of An Advanced Anti-Aircraft Gun Director," General Electric Company, 1973.
 [6] Jangil kim, et al., "Introduction to modern gun effectiveness model(MGEM) (EDAP-419-83058)," ADD, 1983.
 [7] Jaehun Kim, "Real time processing ballistic algorithm for small Battleship Fire control system (CESD-519-92155)," ADD, Mar., 1992.
 [8] Chie-ryong Choi, et al., "A Study on the Hit Probability Under Various Target Speeds and Ranges using the Specific Firing Results of the BIHO Air Defense Gun System (GWSD-406-940586)," ADD, 1994.
 [9] Paul Weinacht, et al., "Analytical Prediction of Trajectories for High-Velocity Direct-Fire Munitions," ARL, 2005.
 [10] George Klimi, "Exterior Ballistics," X libraris LLC, 2014.



김재훈

e-mail : kjh1132a@nate.com
 1981년~1984년 서울대학교 전기공학과 (학사/석사)
 2003년 충남대학교 전자공학과(박사)
 1984년~2006년 국방과학연구소 책임연구원
 2006년~2010년 국방기술품질원 책임연구원

2010년~현 재 사격통제연구소 대표

관심분야: 사격통제 장치 설계 기법, 체계시험평가 기법



김의환

e-mail : keuiwhan@ajou.ac.kr
 1979년 서울대학교 공업교육과(학사/석사)
 1989년 미국 MIT 재료공학과(석사/박사)
 1979년~2012년 국방과학연구소
 2012년~현 재 아주대학교 시스템공학과 교수

관심분야: 시스템 분석/시험평가, 시스템엔지니어링 프로세스



이 정 엽

e-mail : yeobbi@hyundai-rotem.co.kr
1993년 한양대학교 기계공학과(학사/석사)
2011년 한양대학교 메카트로닉스공학과
(박사)
1993년~2000년 현대중공업(과장)
2000년~2001년 현대모비스 선임연구원

2002년~현 재 현대로템 수석연구원

관심분야: 시스템 설계/분석, 무인지상차량, 차륜형장갑차



김 건 국

e-mail : gunkook34@hyundai-rotem.co.kr
2003년 중앙대학교 제어계측공학과(학사)
2015년 광운대학교 방위사업학과(석사)
2015년~현 재 아주대학교 시스템공학과
박사과정
2002년~2009년 삼성탈레스 선임연구원

2009년~현 재 현대로템 선임연구원

관심분야: 사격통제시스템, 명중률 분석, 전투차량설계