Journal of The Institute of Electronics and Information Engineers Vol.52, NO.12, December 2015 http://dx.doi.org/10.5573/ieie.2015.52.12.089
ISSN 2287-5026(Print) / ISSN 2288-159X(Online)

논문 2015-52-12-10

임의발생 불확실성 및 외란을 고려한 시간지연시스템의 강인비약성 H_∞ 제어기 설계 알고리듬

(Robust and Non-fragile H_∞ Controller Design Algorithm for Time-delayed System with Randomly Occurring Uncertainties and Disturbances)

양 승 협*, 백 승 현*, 이 준 영*, 박 홍 배**

(Seung Hyeop Yang, Seung Hyun Paik, Jun Yeong Lee, and Hong Bae Park©)

요 약

본 논문에서는 임의적으로 발생하는 폴리토프 불확실성과 외란을 고려한 시간지연시스템의 강인비약성 H_∞ 제어기설계 알고리듬을 다룬다. 먼저 임의적으로 발생하는 불확실성과 외란을 가지는 시간지연시스템을 설계하고, Lyapunov 안정성 분석과 H_∞ 성능지수를 기반으로 강인비약성 H_∞ 제어기가 존재하기 위한 충분조건을 선형행렬부등식(LMI, linear matrix inequality)의 형태로 제시한다. 구한 충분조건은 변수치환과 슈어 여수(Schur complement) 정리를 바탕으로 파라미터의 함수를 포함한 파라미터화 선형행렬부등식(PLMI, parameterized linear matrix inequality)으로 표현할 수 있으므로 PLMI의 모든 해로부터 제어기이득과 비약성을 만족하는 제어기 섭동영역 및 H_∞ 성능을 만족하는 노옴 한계치 γ를 한번에 구할 수 있다. 마지막으로 예제와 모의실험에서 제안한 강인비약성 H_∞ 제어기가 임의적으로 발생하는 불확실성 및 외란, 시간지연이 있더라도 폐루프시스템을 안정화시키고 H_∞ 성능을 보장함을 확인하고 확정적인 불확실성을 기반으로 설계한 제어기와 성능을 비교한다.

Abstract

This paper provides a robust and non-fragile H_∞ controller design algorithm for time-delayed systems with randomly occurring polytopic uncertainties and disturbances. First, we design time-delayed system considering randomly occurring uncertainties and disturbances. Next, The sufficient condition for the existence of robust and non-fragile H_∞ controller is presented by LMI(linear matrix inequality) using Lyapunov stability analysis and H_∞ performance measure. Since the obtained condition can be expressed as a PLMI(parameterized linear matrix inequality) by changes of variables and Schur complement, all solutions including controller gain, degrees of controller satisfying non-fragility, H_∞ norm bound γ can be calculated simultaneously. Finally, numerical examples are given to illustrate the performance and the effectiveness of the proposed robust and non-fragile H_∞ controller compared with the deterministic uncertainty model even though there exists randomly occurring uncertainties, disturbances and time delays.

Keywords : Robust control, non-fragile, H_∞, randomly occurring, time-delay

* 학생회원, ** 정회원, 경북대학교 IT대학 전자공학부
(School of Electronics Engineering, the College of IT Engineering, Kyungpook National University)
© Corresponding Author(E-mail: hbpark@knu.ac.kr)
※ 이 논문은 2012학년도 경북대학교 학술연구비에 의하여 연구되었음.
Received ; August 3, 2015 Revised ; November 23, 2015
Accepted ; December 1, 2015

Ⅰ. 서 론

물리적 시스템은 일반적으로 시간지연을 가지고 있으며 무시할 수 있을 만큼 작다고 여겨지므로 간단한 모델링을 위해 고려하지 않는 경우가 많았다. 그러나

시간지연은 응답의 진동(oscillation) 및 성능저하를 야기하거나 전체 시스템을 불안정하게 할 수 있음이 밝혀지면서 시간지연 시스템에 관한 다양한 연구가 수행되었다[1~4]. 또한, 시스템에 유입되는 외부잡음을 고려하지 않는 경우 전체시스템이 불안정해질 수 있으므로 이러한 문제를 해결하기위해 H_∞ 이론이 대두된 이후로 제어기에서부터 필터링문제까지 확장 및 발전하면서 현재까지 연구가 지속되고 있다[1~4].

제어기 설계 대상의 모델링이 명확하지 않은 경우를 고려하여 불확실성을 가지는 시스템의 안정성을 다루는 강인(robust) 제어이론은 초창기의 주파수영역을 기반으로 한 고전 제어기법에서 상태변수모델에 기반한 현대 제어기법으로 발전하였으며 불확실성의 묘사방법에 따라 여러 분야의 제어기 설계 및 최적화 연구에 활용되면서 현재까지 관련연구가 지속적으로 이루어지고 있다[5~6]. 또한 시스템 뿐만 아니라 제어기의 설계 및 구현과정에서 불확실성을 발생하고 이러한 불확실성이 전체 폐루프시스템의 성능과 안정성을 해칠 수 있음이 밝혀지면서[7] 이러한 제어시스템의 안정화와 성능향상을 위한 연구가 지속적으로 이루어지고 있다[5~11].

최근 확률(stochastic) 시스템의 안정성 해석을 바탕으로 확률적으로 발생할 수 있는 비선형성, 불확실성, 외란 및 시간지연에 대한 연구가 이슈가 되고 있다. 복잡한 네트워크시스템에서 네트워크가 사라지는 현상을 바탕으로 유기적인 네트워크를 모델링하기 위해 임의적으로 발생하는 비선형성(randomly occurring non-linearity)을 고려한 연구가 대두되었고[12], 비선형성 뿐만 아니라 불확실성도 임의적으로 발생할 수 있음을 보이면서 임의적으로 발생하는 불확실성(randomly occurring uncertainties: ROU) 개념이 소개되었으며[13], 이 연구들을 모티브로 임의발생 시간지연(randomly occurring delays) 현상을 연구한 제어기 설계기법[14], 고장검출[15], 필터 설계기법[16] 등 관련연구가 다양한 분야에 적용되고 있다. 또한 임의적으로 발생하는 비선형성, 시간지연, 불확실성의 개념이 네트워크시스템과 같은 확률기반시스템뿐만 아니라 기존 물리시스템에 확장 적용한 연구가 타당성을 입증함으로써 관심을 받고 있다[17~18]. 관련 연구들을 살펴보면 확정적으로 발생하는 불확실성(deterministically occurring uncertainties: DOU) 모델링기법에 비해 ROU 모델링기법이 실제 시스템의 불확실성을 표현하기에 보다 적합하다고 간주되는 추세이며 실제에 가까운 시스템을 모사하기 위해 시스템의 불안정요소인 시간지연, 임의적으로 발생하는 외란(randomly occurring disturbances: RODs) 및 ROU 요소를 함께 고려하는 것은 충분한 가치가 있다고 할 수 있다.

앞에서 언급한 내용들을 토대로, 본 논문에서는 ROU 및 ROD를 고려한 강인비약성 H_∞ 제어기 설계 연구를 진행한다. 우선 임의적으로 발생하는 폴리토프 불확실성을 기반으로 전체 제어시스템을 설계하고, 리아푸노프 안정성을 바탕으로 시스템의 불확실성, 제어이득섭동, 시간지연, 외란을 고려한 강인비약성 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건을 LMI로 유도한 후, 유도한 충분조건을 간단한 상수계수를 가지는 PLMI의 형태로 변형하고 그 해로부터 임의발생 불확실성과 외란을 고려한 강인비약성 H_∞ 제어기와 비약성의 정도, H_∞ 노옴 한계치 γ를 구한다. 마지막으로 수치예제와 모의실험을 통해 제안한 제어기의 성능을 검증한다.

Ⅱ. 문제 설정

파라미터 불확실성을 가지는 선형 시변지연시스템

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t,\pi)x(t) + A_d(t,\pi)x(t-d(t)) \\
&\quad + B(t,\pi)u(t) + B_w w(t) \\
y(t) &= C(t,\pi)x(t) \\
x(t) &= 0,\ t \le 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

을 고려한다. 여기서 $x(t) \in R^n$은 상태, $u(t) \in R^m$은 제어입력, $w(t) \in R^l$은 외란, $y(t) \in R^p$는 제어된 출력이다. 시스템행렬 $A(t,\pi)$, $A_d(t,\pi)$, $B(t,\pi)$, $C(t,\pi)$는 적절한 차원을 가지고 다음의 시변구조를 만족하는 불확실성을 가진다고 가정한다.

$$
\begin{aligned}
A(t,\pi) &= A_0 + \sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)A_i, \\
A_d(t,\pi) &= A_{d0} + \sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)A_{di}, \\
B(t,\pi) &= B_0 + \sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)B_i, \\
C(t,\pi) &= C_0 + \sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)C_i,
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$\pi(t) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{L}\pi_i(t) = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, L.$$

여기서 L은 시스템행렬의 매개변수 불확실성의 개수를 표현하는 값이며 $d(t)$는

$$0 \leq d(t) < \infty,\ \dot{d}(t) \leq \overline{d} < 1 \tag{3}$$

를 만족하는 시변 시간지연이다. 실제 제어시스템의 불안정정을 야기하는 불확실성 문제를 도식화하기 위해 서로 독립인 두 개의 확률변수 $\alpha(t)$와 $\delta(t)$를 도입하여 ROU 및 외란을 가지는 시스템을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A(t,\pi_\alpha)x(t) + A_d(t,\pi_\alpha)x(t-d(t)) \tag{4}$$

$$+ B(t,\pi_\alpha)u(t) + \delta(t)B_w w(t)$$

$$y(t) = C(t,\pi_\alpha)x(t).$$

여기서

$$A(t,\pi_\alpha) = A_0 + \alpha(t)\sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)A_i, \tag{5}$$

$$A_d(t,\pi_\alpha) = A_{d0} + \alpha(t)\sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)A_{di},$$

$$B(t,\pi_\alpha) = B_0 + \alpha(t)\sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)B_i,$$

$$C(t,\pi_\alpha) = C_0 + \alpha(t)\sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)C_i$$

이고, 확률변수 $\alpha(t)$와 $\delta(t)$는 베르누이 확률분포를 따르며

$$\mathrm{Prob}\{\alpha(t)=1\}: E\{\alpha(t)\} = E_\alpha, \tag{6}$$

$$\mathrm{Prob}\{\alpha(t)=0\}: E\{\alpha(t)\} = 1 - E_\alpha,$$

$$\mathrm{Prob}\{\delta(t)=1\}: E\{\delta(t)\} = E_\delta,$$

$$\mathrm{Prob}\{\delta(t)=0\}: E\{\delta(t)\} = 1 - E_\delta.$$

의 성질을 가진다. 여기서 $E_\alpha, E_\delta \in [0 \quad 1]$는 시스템에 불확실성과 외란이 발생할 확률을 나타내는 알려진 상수이다.

파라미터 불확실성 시스템에 제어기 이득섭동을 고려하여 시스템 (4)를 위한 제어기를

$$u(t) = [K_0 + \Delta K(t)]x(t) \tag{7}$$

$$= K(t,\mu)x(t)$$

와 같은 형태로 두고 비약성을 만족하는 제어기이득 섭동영역을 공칭 제어기(nominal controller)에 대하여 다시 정리하면 (7)은

$$K(t,\mu) = K_0 + \sum_{j=1}^{L}\mu_j(t)\widetilde{K}_j \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{L}\mu_j(t) = 1, \quad \widetilde{K}_j = K_j - K_0$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서 $K(t,\mu)$는 비약성을 만족하는 시변 제어기이득의 섭동영역, K_j는 제어기이득 섭동영역의 꼭지점(vertex), $\widetilde{K}_j$는 제어기이득섭동의 비약성의 정도를 나타낸다. 시스템에 발생하는 불확실성과 마찬가지로 임의적으로 발생하는 제어기의 이득섭동 등의 불확실성을 모사하기 위해

$$\mathrm{Prob}\{\beta(t)=1\}: E\{\beta(t)\} = E_\beta, \tag{9}$$

$$\mathrm{Prob}\{\beta(t)=0\}: E\{\beta(t)\} = 1 - E_\beta$$

의 성질을 만족하는 또 다른 확률변수 $\beta(t)$를 도입하여 (7)과 (8)을 다시 쓰면

$$u(t) = K(t,\mu_\beta)x(t) \tag{10}$$

$$K(t,\mu_\beta) = K_0 + \beta(t)\sum_{j=1}^{L}\mu_j(t)\widetilde{K}_j$$

로 나타낼 수 있다.

(1)-(10)으로부터 최종적으로 ROU와 ROD를 고려한 폐루프시스템은

$$\dot{x}(t) = A_K(t,\pi_\alpha,\mu_\beta)x(t) + A_d(t,\pi_\alpha)x(t-d(t))$$

$$+ \delta(t)B_w w(t) \tag{11}$$

$$y(t) = C(t,\pi_\alpha)x(t)$$

으로 표현할 수 있으며 여기서

$$A_K(t,\pi_\alpha,\mu_\beta) = A(t,\pi_\alpha) + B(t,\pi_\alpha)K(t,\mu_\beta) \tag{12}$$

이다. 주요결과를 유도하기 전에 다음 보조정리를 제시한다.

보조정리 1[19]. 임의의 대칭행렬

$$L=\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

에 대하여 다음은 서로 등가이다.

1) $L<0,$ (14)

2) $L_{11}<0,\ L_{22}-L_{12}^T L_{11}^{-1} L_{12}<0,$

3) $L_{22}<0,\ L_{11}-L_{12}L_{22}^{-1}L_{12}^T<0.$

또한 앞으로의 수식전개 간편성을 위해

$$\begin{aligned} &A_{K\pi\mu}:=A(t,\pi_\alpha,\mu_\beta),\ \ A_\pi:=A(t,\pi_\alpha), && (15)\\ &A_{d\pi}:=A_d(t,\pi_\alpha), \quad\ B_\pi:=B(t,\pi_\alpha), \\ &C_\pi:=C(t,\pi_\alpha), \qquad K_\mu:=K(t,\mu_\beta) \end{aligned}$$

를 정의한다.

Ⅲ. 주요 결과

본 장에서는 ROU와 ROD를 고려한 시간지연시스템의 강인비약성 H_∞ 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법을 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 볼록 최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 제안하고 이를 PLMI의 형태로 나타낸다.

보조정리 2. 시간지연시스템 (1)에 상태궤환 제어기 (10)을 적용한 폐루프시스템 (11)을 고려한다. 파라미터 불확실성 및 시간지연이 존재하는 폐루프시스템 (11)에 대하여 행렬부등식

$$E\left\{\begin{bmatrix} A_{K\pi\mu}^T P+PA_{K\pi\mu}+R & PA_{d\pi} & \beta(t)PB_w & C_\pi^T \\ * & -(1-\bar{d})R & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}\right\}<0 \tag{16}$$

을 만족하는 양한정행렬 P, R이 존재하면, 폐루프시스템 (11)은 (3)을 만족하는 시간지연에 대해서 H_∞ 노옴이 γ한계치를 보장하며 자승적으로 안정하다. 여기서 $*$는 대칭행렬의 주대각선 아래에 놓이는 요소이다.

증명. Lyapunov 함수를

$$V(x(t)):=x(t)^TPx(t)+\int_{t-d(t)}^{t}x(\tau)^TRx(\tau)d\tau \tag{17}$$

로 설정하고 미분을 구하면

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,t)&=\dot{x}(t)^TP\,x(t)+x(t)^TP\,\dot{x}(t) && (18)\\ &\quad+\frac{d}{dt}\int_{t-d(t)}^{t}x(\tau)^TRx(\tau)d\tau \\ &\le x(t)^T\left[A_{K\pi\mu}^TP+PA_{K\pi\mu}+R\right]x(t) \\ &\quad+x(t)^T\left[PA_{d\pi}\right]x(t-d(t)) \\ &\quad+x(t-d)^T\left[A_{d\pi}^TP\right]x(t) \\ &\quad-(1-\bar{d})x(t-d(t))^TRx(t-d(t)) \\ &=\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}^T \varXi \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이고 여기서

$$\varXi=\begin{bmatrix} A_{K\pi\mu}^TP+PA_{K\pi\mu}+R & PA_{d\pi} \\ A_{d\pi}^TP & -(1-\bar{d})R \end{bmatrix} \tag{19}$$

이다. H_∞ 성능지수함수를

$$J=E\left\{\int_0^\infty\left[y(t)^Ty(t)-\gamma^2w(t)^Tw(t)\right]dt\right\} \tag{20}$$

로 정의하면 구간 $t\le 0$에서 $x(t)=0$이라는 초기조건으로부터 (20)은

$$\begin{aligned} J&=E\left\{\int_0^\infty\left[y(t)^Ty(t)-\gamma^2w(t)^Tw(t)\right]dt\right\} && (21)\\ &=E\left\{\int_0^\infty\left[y(t)^Ty(t)-\gamma^2w(t)^Tw(t)+\dot{V}(x,t)\right]dt\right\} \\ &\quad-E\{V(\infty)\}+E\{V(0)\} \\ &\le E\left\{\int_0^\infty\left[y(t)^Ty(t)-\gamma^2w(t)^Tw(t)+\dot{V}(x,t)\right]dt\right\} \end{aligned}$$

으로 변환할 수 있으며, $\Psi(t)$를

$$\Psi(t)=\left[x(t)^T \ \ x(t-d(t))^T \ \ w(t)^T\right]^T \tag{22}$$

로 두면 H_∞ 성능조건은

$$J \le \int_0^\infty \Psi(t)^T Z_{\pi\mu}\, \Psi(t)dt \tag{23}$$

으로 표현할 수 있다. 여기서 $Z_{\pi\mu}$는

$$Z_{\pi\mu}=\begin{bmatrix} \overline{A} & PA_{d\pi} & \delta(t)PB_w \\ * & -(1-\overline{d})R & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \tag{24}$$

이며

$$\overline{A}=A_{K\pi\mu}^T P+PA_{K\pi\mu}+R+C_\pi^T C_\pi, \tag{25}$$

이다. 따라서 $t \ge 0$일 때 $Z_{\pi\mu}<0$을 만족하면 시간지연과 외란이 존재하는 시스템 (1)은 H_∞ 노옴 한계치 γ를 보장하면서 자승적으로 안정하다. (16)은 (24)에 슈어 여수정리를 이용하면 변환가능하다. ■

정리 1. 시간지연시스템 (1)을 고려한다. 외란과 불확실성, 시간지연이 존재하는 폐루프시스템 (11)에 대하여 행렬부등식

$$E\left\{\begin{bmatrix} U_1 & \delta(t)B_w & QC_\pi^T & Q \\ * & -\rho I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -S \end{bmatrix}\right\}<0 \tag{26}$$

을 만족하는 행렬 M_0, $M_j\,(j=1,2,\cdots,L)$과 양한정 행렬 Q, S가 존재하면 폐루프시스템 (11)은 H_∞ 노옴 한계치 γ와 비약성을 보장하면서 자승적으로 안정하다. 여기서

$$U_1=QA_\pi^T+A_\pi Q+B_\pi M_0+M_0^T B_\pi^T \tag{27}$$
$$+\sum_{j=1}^{L}\mu_j(t)\beta(t)\left[B_\pi M_j+M_j^T B_\pi^T\right]$$
$$+(1-\overline{d})^{-1}A_{d\pi}R^{-1}A_{d\pi}^T,$$

$$S=R^{-1},\ Q=P^{-1},\ \rho=\gamma^2,$$
$$M_0=K_0 Q,\ M_j=\widetilde{K}_j Q$$

이다.

증명. 보조정리 2의 (16)은

$$E\left\{\begin{bmatrix} U_2 & PA_{d\pi} & \delta(t)PB_w & C_\pi^T \\ * & -(1-\overline{d})R & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}\right\}<0 \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow E\left\{\begin{bmatrix} U_3 & A_{d\pi} & \delta(t)B_w & QC_\pi^T \\ * & -(1-\overline{d})R & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}\right\}<0 \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow E\left\{\begin{bmatrix} U_4 & A_{d\pi} & \delta(t)B_w & QC_\pi^T & Q \\ * & -(1-\overline{d})R & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix}\right\}<0 \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow E\left\{\begin{bmatrix} U_1 & \delta(t)B_w & QC_\pi^T & Q \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix}\right\}<0 \tag{31}$$

으로 표현할 수 있다. 여기서

$$U_2=A_\pi^T P+PA_\pi+K_\mu^T B_\pi^T P+PB_\pi K_\mu+R, \tag{32}$$
$$U_3=QA_\pi^T+A_\pi Q+QK_\mu^T B_\pi^T+B_\pi K_\mu Q+QRQ,$$
$$U_4=QA_\pi^T+A_\pi Q+B_\pi M_0+M_0^T B_\pi^T$$
$$+\sum_{j=1}^{L}\mu_j(t)\beta(t)\left[B_\pi M_j+M_j^T B_\pi^T\right]$$

이며 변수치환과 보조정리 1의 슈어 여수정리를 통해 (26)으로 정리할 수 있다. ■

제안한 강인비약성 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건은 다음 정리 2와 같이 PLMI의 형태로 표현할 수 있다.

정리 2. 파라미터 불확실성을 가지는 시간지연시스템 (1)에 대하여

$$\Omega_p=x^T Y_0(z)x+E_\alpha\sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)x^T Y_i(z)x \tag{34}$$
$$+E_\beta\sum_{j=1}^{L}\mu_j(t)x^T Y_j(z)x$$

$$+E_\alpha E_\beta \sum_{1\le i\le j\le L} \pi_i(t)\mu_j(t)x^T Y_{ij}(z)x<0$$

을 만족하는 행렬 M_0, $M_j(j=1,\,2,\,\cdots,L)$와 양한정 행렬 Q, S 및 양의 상수 ρ가 존재하면 H_∞ 노옴 한계치인 γ와 비약성을 만족시키며 자승적으로 안정하다. 여기서

$$Y_0(z)=\begin{bmatrix} U_5 & E_\delta B_w & QC_0^T & Q \\ E_\delta B_w^T & -\rho I & 0 & 0 \\ C_0 Q & 0 & -I & 0 \\ Q & 0 & 0 & -S \end{bmatrix}, \tag{35}$$

$$Y_i(z)=\begin{bmatrix} U_6 & 0 & QC_i^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_i Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_j(z)=\begin{bmatrix} B_0 M_j+M_j^T B_0^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_j(z)=\begin{bmatrix} B_i M_j+M_j^T B_i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이고

$$\begin{aligned} U_5 &= QA_0^T+A_0 Q+B_0 M_0+M_0^T B_0^T \\ &\quad +(1-\overline{d})^{-1}A_{d0}R^{-1}A_{d0}^T, \\ U_6 &= QA_i^T+A_i Q+B_i M_0+M_0^T B_i^T \\ &\quad +(1-\overline{d})^{-1}A_{di}R^{-1}A_{di}^T \end{aligned} \tag{36}$$

이다.

증명. 정리 2의 부등식 (26)은

$$E\left\{\begin{bmatrix} U_7 & \delta(t)B_w & QC_\pi^T & Q \\ * & -\rho I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{L}\mu_j(t)\beta(t)\left[B_\pi M_j+M_j^T B_\pi^T\right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}<0 \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow E\Bigg\{ & \begin{bmatrix} U_8 & \delta(t)B_w & QC_0^T & Q \\ \delta(t)B_w^T & -\rho I & 0 & 0 \\ C_0 Q & 0 & -I & 0 \\ Q & 0 & 0 & -S \end{bmatrix} \\ & +\sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)\alpha(t)\begin{bmatrix} U_9 & 0 & QC_i^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_i Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & +\sum_{j=1}^{L}\mu_j(t)\beta(t)\begin{bmatrix} B_0 M_j+M_j^T B_0^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & +\sum_{i=1}^{L}\pi_i(t)\alpha(t)\sum_{j=1}^{L}\mu_j(t)\beta(t) \\ & \times\begin{bmatrix} B_i M_j+M_j^T B_i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Bigg\}<0 \end{aligned} \tag{38}$$

와 같이 정리할 수 있고, 여기서

$$\begin{aligned} U_7 &= QA(t,\pi)^T+A(t,\pi)Q \\ &\quad +B(t,\pi)M_0+M_0^T B(t,\pi)^T \\ &\quad +(1-\overline{d})^{-1}A_d(t,\pi)R^{-1}A_d(t,\pi)^T, \\ U_8 &= U_5 = QA_0^T+A_0 Q \\ &\quad +B_0 M_0+M_0^T B_0^T+(1-\overline{d})^{-1}A_{d0}R^{-1}A_{d0}^T, \\ U_9 &= U_6 = QA_i^T+A_i Q \\ &\quad +B_i M_0+M_0^T B_i^T+(1-\overline{d})^{-1}A_{di}R^{-1}A_{di}^T \end{aligned} \tag{39}$$

이며 정리한 부등식 (38)의 기댓값을 구한 후 계수를 정리하면 (34)와 같이 PLMI의 형태로 제어기 존재조건을 구할 수 있다. ■

(34)는 Q, ρ, S와 M_0, $M_j\,(j=1,2,\cdots,L)$항이 존재하는 파라미터화 선형행렬부등식이다. 그러므로 제안한 강인비약성 H_∞ 공칭제어기 K_0와 비약성을 만족하는 제어기이득섭동영역 $\widetilde{K}_j$은 PLMI (34)의 해를 구한 후 $K_0=M_0Q^{-1}$, $\widetilde{K}_j=M_jQ^{-1}$ $(j=1,2,\cdots,L)$로부터 계산할 수 있고 H_∞ 노옴의 한계치 γ는 $\gamma=\sqrt{\rho}$로부터 얻을 수 있다. 또한 $\alpha=1$, $\beta=1$, $\delta=1$로 설

정하면 확정적으로 발생하는 불확실성과 외란을 고려한 시스템에 대하여 제어기를 설계할 수 있다.

Ⅳ. 예제 및 모의 실험

본 장에서는 수치예제와 모의실험을 통해 본 논문에서 제안한 제어기의 유효성을 검증한다.

우선 ROU를 고려한 연속시간지연시스템 (4)의 변수로

$$A(t,\pi_\alpha)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\alpha(t)\pi_1(t)\begin{bmatrix}0.6 & 0.6\\ 0.3 & -0.6\end{bmatrix}+\alpha(t)\pi_2(t)\begin{bmatrix}-0.6 & -0.6\\ -0.3 & 0.6\end{bmatrix},$$
$$A_d(t,\pi_\alpha)=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.1 & -0.2\end{bmatrix}+\alpha(t)\pi_1(t)\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.05 & -0.1\end{bmatrix}+\alpha(t)\pi_2(t)\begin{bmatrix}-0.1 & -0.1\\ -0.05 & 0.1\end{bmatrix}, \quad (40)$$
$$B(t,\pi_\alpha)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\alpha(t)\pi_1(t)\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}+\alpha(t)\pi_2(t)\begin{bmatrix}-0.1\\ -0.1\end{bmatrix},$$
$$B_w=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$
$$C(t,\pi_\alpha)=[1\ \ 1]+\alpha(t)\pi_1(t)[0.1\ \ 0.1]+\alpha(t)\pi_2(t)[-0.1\ \ -0.1]$$

를 고려한다. 여기서 파라미터 $\pi_1(t)$, $\pi_2(t)$와 시변지연 $d(t)$는 각각

$$\pi_1(t)=\sin^2 t,\ \ \pi_2(t)=\cos^2 t, \quad (41)$$
$$d(t)=1+0.4\sin(t)$$

를 만족한다. 시스템에 불확실성이 나타날 확률의 기댓값을 $E_\alpha=0.7$, 제어기에 불확실성이 나타날 확률의 기댓값을 $E_\beta=0.6$, 외란이 발생할 확률의 기댓값을 $E_\delta=0.7$로 설정하고 MATLAB의 LMI 도구상자를 이용하여 (34)의 해를 구하면

$$P=\begin{bmatrix}0.6041 & 0.3034\\ 0.3034 & 0.5818\end{bmatrix}, \quad (42)$$
$$R=\begin{bmatrix}0.1891 & -0.0309\\ -0.0309 & 0.3563\end{bmatrix},$$
$$M_0=[-38.7544\ \ 12.8231],$$
$$M_1=[-17.7823\ \ 16.3189],$$
$$M_2=[24.6605\ \ -12.6278],$$
$$\rho=0.3822$$

이고, (42)와 (27)로부터 제어이득과 비약성을 만족하는 섭동의 정도 및 H_∞ 노옴 한계치 γ를

$$K_0=[-19.5233\ \ -4.2964], \quad (43)$$
$$\widetilde{K}_1=[-5.7926\ \ 4.0993],$$
$$\widetilde{K}_2=[11.0678\ \ 0.1346],$$
$$\gamma=0.6183$$

과 같이 구할 수 있다. 모의실험을 위해 제어기 이득섭동 파라미터 $\mu_1(t)$와 $\mu_2(t)$를

$$\mu_1(t)=\sin^2 2t,\ \ \mu_2(t)=\cos^2 2t \quad (44)$$

로 설정한다. 그림 1은 모의실험을 위해 적용한 $E_\delta=0.7$을 만족하는 ROD, 그림 2는 $E_\alpha=0.7$, $E_\beta=0.6$을 만족하는 확률변수 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$의 궤적을 도식한 그림이다.

다음으로 DOU를 모델링한 제어시스템과 ROU를 고려한 제어시스템 각각에 ROU를 적용하고 얻은 제어출력의 궤적을 그림 3에 보이고 각 시스템 제어응답의 차이를

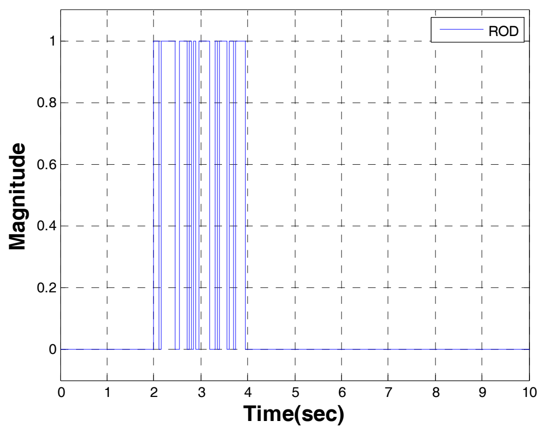

그림 1. 임의 발생 외란
Fig. 1. Randomly occurring disturbance.

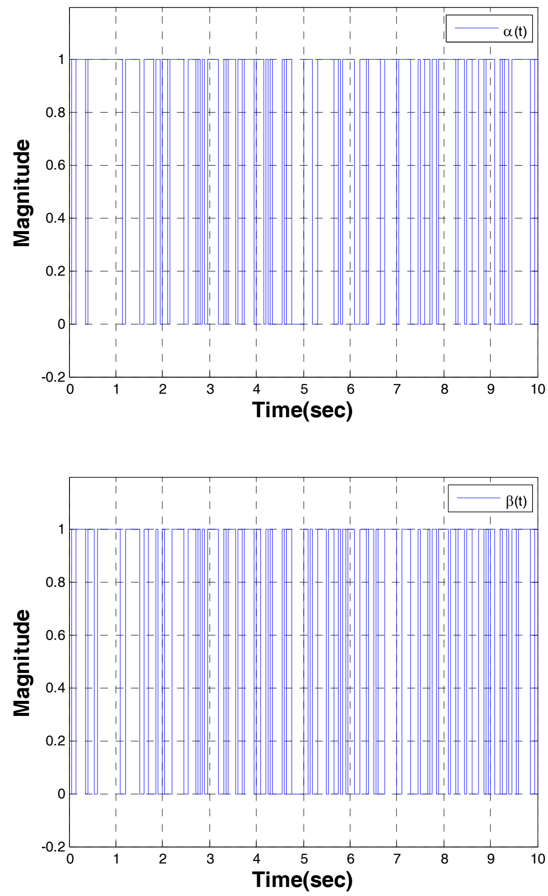

그림 2. 확률변수 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$

Fig. 2. Stochastic variable $\alpha(t)$ and $\beta(t)$.

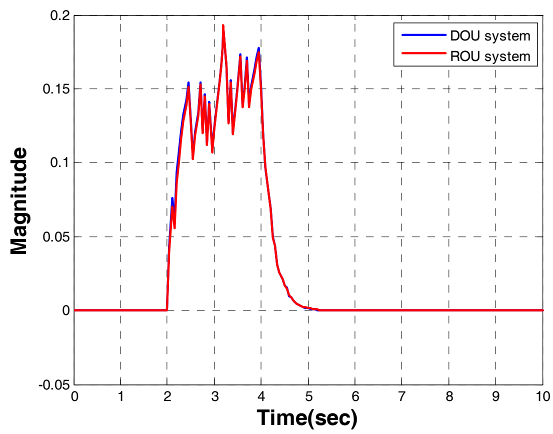

그림 3. 각 시스템의 제어출력

Fig. 3. Control outputs of each system.

도식한 궤적을 그림 4에 보인다. 그림 3에서 볼 수 있듯이 제안한 제어기가 외란입력의 영향을 $\gamma=0.6183$ 이하로 줄여 H_∞ 안정화를 달성함을 알 수 있으며, 그림 4로

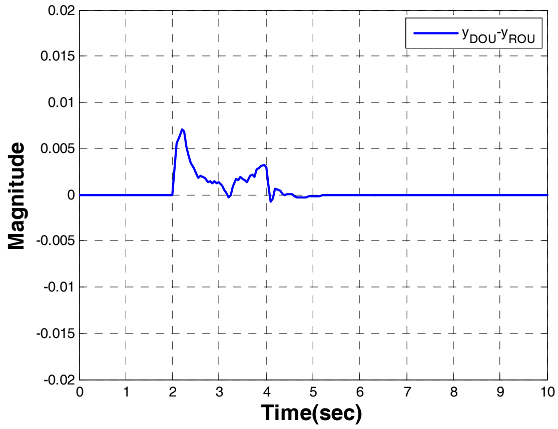

그림 4. 제어출력의 차

Fig. 4. Difference of control outputs.

부터 DOU를 고려한 제어시스템에 비해 본 논문에서 제안한 ROU를 고려한 제어시스템이 외란의 영향을 적게 받음에 따라 제어출력의 차가 대부분 양수임을 확인할 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 ROU 및 ROD를 고려한 강인비약성 H_∞ 제어기 설계에 관한 연구를 수행하였다. 불확실성을 폴리토프 불확실성으로 설계하고 임의발생 요소를 고려하기 위해 베르누이 확률분포를 따르는 확률변수를 도입하여 시스템을 수학적으로 모델링하였으며, 제안한 제어기의 안정성을 리아푸노프 안정성을 바탕으로 증명하고 제어기 존재조건을 파라미터화 선형행렬 부등식의 형태로 제시하였다. 제안한 제어기 존재 조건을 만족하는 해를 MATLAB의 LMI 도구상자를 이용하여 구하고 수치예제를 통해 제안한 제어기의 성능을 검증하였다.

REFERENCES

[1] J. Qui, G. Feng, and J. Yang, “A New Design of Delay-Dependent Robust H_∞ Filtering for Discrete-Time T-S Fuzzy Systems With Time-Varying Delay,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 17, no. 5, pp. 1044-1058, 2009.

[2] Z. Wu, H. Su, and J. Chu, “H_∞ filtering for singular Markovian jump systems with time

delay," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 20, no. 8, pp. 939-957, 2010.

[3] Z. Wu, H. Su, and J. Chu, "H_∞ filtering for singular systems with time-varying delay," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 20, no. 11, pp. 1269-1284, 2010.

[4] J. Lin, S. Fei, and Q. Wu, "Reliable H_∞ Filtering for Discrete-Time Switched Singular Systems with Time-Varying Delay," *Circuit Syst. Signal Process*, vol. 31, no. 3, pp. 1191-1214, 2012.

[5] S. Xu, J. Lam, and L. Zhang, "Robust D-stability Analysis for Uncertain Discrete Singular Systems With State Delay," *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl.*, vol. 49, no. 4, pp. 551-555, 2002.

[6] J. K. Kim, S. H. Yang, Y. S. Kwon, K. H. Bang, and H. B. Park, "Robust and Non-fragile H_∞ Decentralized Fuzzy Model Control Method for Nonlinear Interconnected System with Time Delay," *Journal of the IEIE-SC*, vol. 47, no. 6, pp. 64-72, 2010.

[7] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Robust, fragile, or optimal," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 8, pp. 1098-1105, 1997.

[8] W. M. Haddad and J. R. Corrado, "Robust resilient dynamic controller for systems with parametric uncertainty and controller gain variations," *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 2837-2841, 1998.

[9] D. Famularo, C. T. Abdallah, A. Jadbabaie, P. Dorato, and W. M. Haddad, "Robust non-fragile LQ controllers: The static state feedback case," *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 1109-1113, 1998.

[10] A. Jadbabie, C. T. Abdallah, D. Famulraro, and P. Dorato, "Robust, non-fragile and optimal controller via linear matrix inequalities," *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Philadelphia, Pennsylvania, pp. 2842-2846, 1998.

[11] J. H. Kim, S. K. Lee, and H. B. Park, "Robust and non-fragile H_∞ control of parameter uncertain time-varying delay systems," *SICE*, Morioka, pp. 927-932, 1999.

[12] Z. Wang, Y. Wang, and Y. Liu, "Global Synchronization for Discrete-Time Stochastic Complex Networks With Randomly Occurred Nonlinearities and Mixed Time Delays," *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 21, no. 1, pp. 11-25, 2010.

[13] Z. Wang, H. Gao, and L. K. Stergioulas, "Robust Sliding Mode Control for Discrete Stochastic Systems with Mixed Time Delays, Randomly Occurring Uncertainties, and Randomly Occurring Nonlinearities," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 59, no. 7, pp. 3008-3015, 2012.

[14] H. Dong, Z. Wang, D. W. C. Ho, and H. Gao, "Robust H_∞ fuzzy output feedback control with multiple probabilistic delays and multiple missing measurements," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 18, no. 4, pp. 712-725, 2010.

[15] H. Dong, Z. Wang, J. Lam, and H. Gao, "Fuzzy-model-based robust fault detection with stochastic mixed time delays and successive packet dropouts," *IEEE Trans. Syst.*, vol. 42, no. 2, pp. 365-376, 2012.

[16] B. Shen, Z. Wang, H. Shu, and G. Wei, "H_∞ filtering for nonlinear discrete-time stochastic systems with randomly varying sensor delays," *Automatica*, vol. 45, no. 4, pp. 1032-1037, 2009.

[17] K. H. Kim, M. J. Park, O. M. Kwon, and E. J. Cha, "Delay-dependent Robust H_∞ Control of Uncertain Linear Systems with Time-Varying Delays and Randomly Occurring Disturbances," *The Trans. of KIEE*, vol. 62, no. 5, pp. 679-687, 2013.

[18] K. H. Kim, M. J. Park, and O. M. Kwon, "Reliable Control for Linear Dynamic Systems with Time-varying Delays and Randomly Occurring Disturbances," *The Trans. of KIEE*, vol. 63, no. 7, pp. 976-986, 2014.

[19] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[20] P. Apkarian and H. D. Tuan, "Parameterized LMIs in control theory," *Proc. IEEE Conf. Contr.*, Florida, pp. 152-157, 1998.

[21] H. D. Tuan and P. Apkarian, "Relaxations of parameterized LMIs with control applications," *Int. J. of Robust Nonlinear Control*, vol. 9, pp. 59-84, 1999.

저 자 소 개

양 승 협(학생회원)
2008년 경북대학교 전자전기 컴퓨터학부 학부.
2010년 경북대학교 전자전기 컴퓨터학부 석사.
2015년 경북대학교 IT대학 전자공학부 박사.
<주관심분야: 견실제어, 임베디드시스템, 신호처리>

이 준 영(학생회원)
2012년 경북대학교 전자전기 컴퓨터학부 학사.
2015년 경북대학교 IT대학 전자공학부 석사.
2015년~현재 경북대학교 IT대학 전자공학부 박사과정.
<주관심분야: 전자후각시스템, 임베디드시스템, 센서네트워크.>

백 승 현(학생회원)
2006년 경북대학교 전자전기 컴퓨터학부 학사.
2008년 경북대학교 전자전기 컴퓨터학부 석사.
2011년 경북대학교 IT대학 전자공학부 박사 수료.
<주관심분야: 전자후각시스템, 임베디드시스템, 이동통신, 센서네트워크.>

박 홍 배(정회원)-교신저자
1977년 경북대학교 전자공학과 학사.
1979년 경북대학교 전자공학과 석사.
1988년 University of New Mexico 전자공학과 박사.
1988년~현재 경북대학교 IT대학 전자공학부 교수
<주관심분야: 견실제어, 임베디드시스템, 전자후각시스템>