기초강좌

헬름홀츠 공명기

김 재 은
(대구가톨릭대학교 기계자동차공학부)

1. 머리말

빈 병 입구 주위에 입으로 바람을 보내보면 제법 큰 울림 소리가 발생한다. 이는 누구나 한 번쯤은 재미삼아 경험해 보았을 현상으로서 헬름홀츠 공명(Helmholtz resonance, cavity resonance)이라는 원리에 기반한다. 헬름홀츠 공명기(Helmholtz resonator ; 그림 1)를 좀 더 일반적으로 정의하면, 개구부(neck)가 존재하고 내부에 기체를 포함하는 닫힌 공간(공동, cavity)이라 정의할 수 있겠다. 헬름홀츠는 이러한 장치를 이용하여 복합음에서 단일음을 분리해 내고, 배음 및 중첩음에 대한 메커니즘을 밝힌 바 있다.

헬름홀츠 공명은 음향학에서 매우 중요한 개념으로서 호루라기, 오카리나와 같은 악기 및 음향 필터, 소음 제어(흡음) 등에 널리 응용되고 있다. 자동차 소음기(muffler)에의 적용은 이미 널리 알려진 사실이고, 최근에는 주행 정숙성을 위해 타이어의 트레드 홈에 이 원리를 적용한 사례도 보고 되고 있다. 또한, 음향/진동과 관련하여 최근에 ‘뜨거운’ 분야로 떠오르고 있는 음향 메타 물질(acoustic metamaterials)의 연구에 있어서도 중요한 몫을 담당하고 있다.

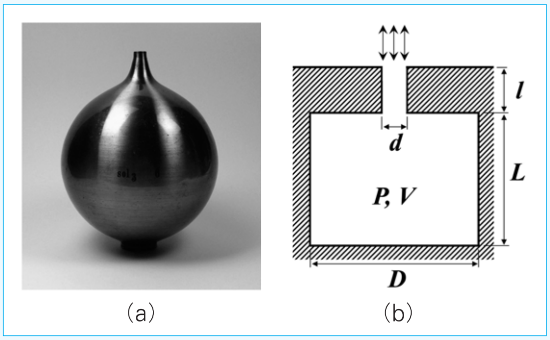

그림 1 (a) Helmholtz의 설계안(약 1890년~1900년)을 기반으로 제작된 공명기(Wikipedia) 및 (b) 개념도

이번 강좌에서는 헬름홀츠 공명기의 원리를 살펴보았다. 사용된 음향 변수들에 대한 표기법은 주로 Kinsler 등[1]을 기준으로 하였다.

2. 헬름홀츠 공명기의 기본 원리

2.1 공기 스프링

헬름홀츠 공명기는 그림 2에 나타낸 바와 같이

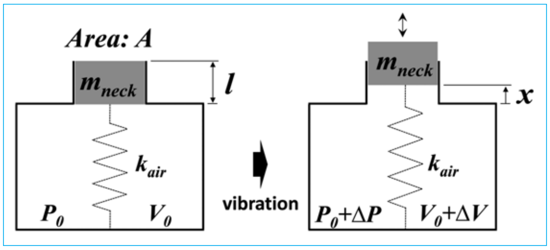

그림 2 질량-스프링계로 표현된 헬름홀츠 공명기($P_0(V_0)$: 평형 상태에서의 압력(부피))

* E-mail : jekim@cu.ac.kr

일반적으로 1 자유도 질량-스프링 계로 표현된다. 이 경우 개구부에서의 공기가 질량의 역할을, 공동 내부의 공기가 스프링의 역할을 하게 된다. 따라서, 헬름홀츠 공명기의 공진 주파수(resonance)를 구하기 위해서는 공기 스프링(air(pneumatic) spring)의 등가 강성을 유도할 필요가 있다.

· 기체의 등가 스프링 계수

열전달을 수반하는 기체의 압축과 팽창은 다음과 같은 폴리트로픽(polytropic) 과정에 의해 기술된다.

$$PV^k = \text{상수} \tag{1}$$

위 식에서 P와 V는 각각 임의의 시간에서의 기체의 압력 및 부피를 나타낸다. 또한, k는 폴리트로픽 지수로서 등온(isothermal) 과정인 경우에 $k=1$이며, 가역 단열(reversible adiabatic) 과정인 경우 $k = c_p / c_v$ $(=\gamma)$ (c_p: 정압 비열, c_v: 정적 비열)에 의해 1.4의 값을 갖는다. 따라서, 열 손실이 있는 일반적인 경우 $1 \le k \le \gamma$의 관계가 성립한다.

그림 2에서 개구부의 기체 질량$(m_{neck} = \rho_0 Al)$이 x만큼 이동하였을 경우 공동 내부의 부피 및 압력 증가량을 각각 ΔV, ΔP로 표현하면, 식 (1)의 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$P_0 V_0^k = (P_0 + \Delta P)(V_0 + \Delta V)^k \tag{2}$$

위 식을 정리하면 아래와 같다.

$$1 = \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^k \tag{3}$$

위 식에서 $\Delta V / V_0 \ll 1$을 고려하면 이항 전개에 의해 $(1 + \Delta V / V_0)^k = 1 + k\Delta V / V_0$의 관계가 성립한다. 따라서, 식 (3)의 전개에서 $\Delta P / P_0 \ll 1$에 의해 고차항을 무시하면 다음의 관계를 얻게 된다.

$$\Delta P = -kP_0 \frac{\Delta V}{V_0} \tag{4}$$

그런데, 그림 2로부터 $A \cdot x = \Delta V$과 $F = \Delta P \cdot A$인 관계를 이용하면 힘(기체 스프링이 질량 m_{neck}에 작용하는 힘으로서 복원력)는 다음과 같이 표현된다.

$$F = -kP_0 \frac{\Delta V}{V_0} \cdot A = -kP_0 \frac{A^2}{V_0} \cdot x \tag{5}$$

따라서, 기체에 의한 등가 스프링 상수 k_{air}는 다음과 같다.

$$k_{air} = \frac{kP_0 A^2}{V_0} \tag{6}$$

· 일반적인 유체에 대한 등가 스프링 계수

헬름홀츠 공명기는 공동 내부에 기체(공기)가 있을 경우에 해당하는 사항이나, 참고로 액체를 포함하는 유체(fluid)에 대한 등가 스프링 계수도 유도해 보도록 한다. 피스톤 주사기에 액체가 채워 있을 경우를 고려하면 되겠다.

가역 단열 과정에서 이상 기체를 포함한 일반적인 유체의 압력 및 밀도 변동 사이의 관계식은 테일러 전개에서 고차항을 제외하고 다음과 같이 나타낸다.

$$P - P_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) \tag{7}$$

위 식에서 체적 탄성계수(bulk modulus) B는 다음과 같이 정의된다.

$$B = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \tag{8}$$

식 (7) 및 (8)을 이용하면 아래와 같은 유체의 상태 방정식(state equation)을 얻는다.

$$p = B\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = B\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -B\frac{\Delta V}{V_0} \tag{9}$$

위 식에서 $p = P - P_0$로서 압력 변동을 나타내고, 음향학에서의 주 변수가 된다. 또한 위 식의 마지막 식은 질량 보존의 법칙에 의해 다음의 관계가 성립함을 이용하였다.

$$\begin{aligned}&(\rho_0 + \Delta\rho)(V_0 + \Delta V) = \rho_0 V_0 \\ &\quad\rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\Delta V}{V_0}\end{aligned} \tag{10}$$

따라서, 유체 등가 스프링이 외부에 가하는 복원력은 다음과 같고,

$$F = pA = -BA\frac{\Delta V}{V_0} \tag{11}$$

앞서 기체의 경우와 마찬가지로 위 식에 $A \cdot x = \Delta V$ 관계식을 대입하면 아래의 관계식을 얻는다.

$$F = -\frac{BA^2}{V_0}x \tag{12}$$

따라서, 유체의 등가 스프링 상수 k_{fluid}는 다음과 같다.

$$k_{fluid} = \frac{BA^2}{V_0} \tag{13}$$

참고로 식 (6) 및 식 (13)을 비교하면 $B = kP_0$가 되고, 이 관계를 이용하면 다음과 같이 등온 및 단열 과정 기체의 체적 탄성 계수 관계를 얻을 수 있다.

$$B = P_0\,(\text{등온 과정});\quad B = \gamma P_0\,(\text{단열 과정}) \tag{14}$$

위 식의 체적 탄성 계수에 대한 표현은 일반적으로 식 (1)을 밀도에 의해 다시 표현하고, 식 (8)을 이용하여 구할 수도 있다.

공기 중에서 소리가 전파될 때는 일반적으로 열 구배가 작고 공기의 열전도도가 작으므로, 공기 입자들 간의 열 교환은 매우 작다고 가정한다. 즉, 단열 과정으로 간주하여, 폴리트로픽 지수 $k = \gamma$의 관계가 성립한다.

2.2 헬름홀츠 공명기의 공진 주파수

앞서 유도된 결과를 이용하면 그림 2에 나타낸 헬름홀츠 공명기의 공진 주파수 ω_n (rad/s)은 다음과 같다.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{air}}{m_{neck}}} = \sqrt{\frac{kP_0A^2}{V_0\rho_0 Al}} = \sqrt{\frac{kP_0}{\rho_0}}\sqrt{\frac{A}{V_0 l}} \tag{15}$$

그런데, 위의 식은 실용적으로 사용하기에 다소 불편하다. 따라서, 식 (14)의 결과 및 선형 음향 파동 방정식에서 파동의 위상 속도 c에 대한 식 $\left(c = \sqrt{B/\rho_0}\right)$을 이용하여, 다음과 같이 Hz단위로 표현된 공진 주파수식을 얻게 된다.

$$f_n = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{V_0 l}} \tag{16}$$

2.3 공진 주파수 계산식의 가정 및 제약

식 (16)은 일반적으로 실험 결과와는 잘 맞지 않는다. 이는 질량 m_{neck}의 운동에는 개구부의 공동 및 외부 근처의 질량도 관여하게 되는데 m_{neck}는 입구 길이 l에만 해당하는 질량으로서 이에 대한 고려가 제외되어 있다. 따라서, m_{neck}는 실제의 운동 질량보다 작게 계산되어 고유 진동수가 높게 계산된다. 따라서, 식 (16)은 다음과 같이 수정된다.

$$f_n = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{V_0(l + l_m)}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{V_0 l_{eq}}} \tag{17}$$

위 식에서 $l_{eq} = l + l_m$이며, 단면이 반지름 r인 원형 개구부에 대해서는 끝단(공동 내부 쪽 또는 개구부 외부)의 조건에 따라(그림 3 참조) 한쪽 끝단에 대해 다음과 같은 수정이 필요하다[2].

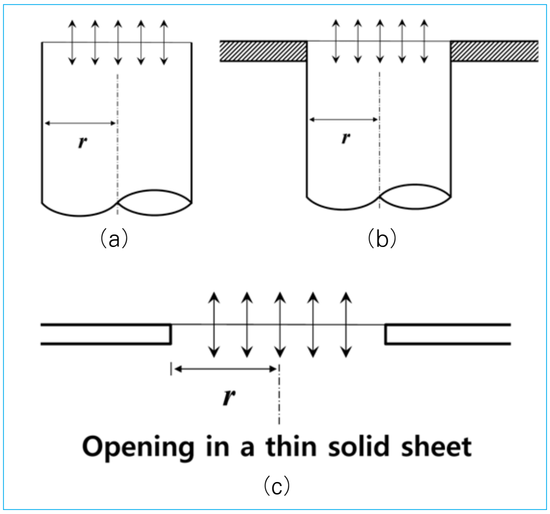

그림 3 긴 개구부의 외부 끝단 조건 ((a) 플랜지가 없는 경우(unflanged end, free end), (b) 플랜지가 있는 경우(wide flanged end)) 및 (c) 플랜지가 있는 짧은 개구부

$$l_m = \alpha \times r \tag{18}$$

α =0.61(플랜지가 없는 긴 개구부)

α =0.82(플랜지가 있는 긴 개구부)

α =0.79(플랜지가 있는 짧은 개구부)

위 식에서 플랜지는 충분한 크기를 갖는 것으로 가정하며, 개구부가 짧고 길다는 기준은 $2r/l$의 값에 의한다. 식 (18)에 의하면, 플랜지가 있는 유한한 길이의 개구부의 경우 α의 값은 0.79 ~ 0.82 사이에 존재함을 알 수 있다. 참고로 플랜지가 있는 긴 개구부의 경우, 개구부 단면에 수직인 유체의 속도 분포가 단면적에 걸쳐 균일하면 0.85의 값을 가지며, 0.82 대신 사용하는 경우도 있다[1]. 실험을 통해 유한한 크기의 플랜지가 있는 개구부의 경우에 α는 0.61 ~ 0.82의 값을 갖는 것으로 알려져 있다.

위에서 개구부의 단면이 원형인 경우에 대해 기술하였으나 사각형 등의 다른 형태에 대해서는 $r=\sqrt{A/\pi}$에 의해 단면적이 같은 가상의 원형을 고려하면 된다.

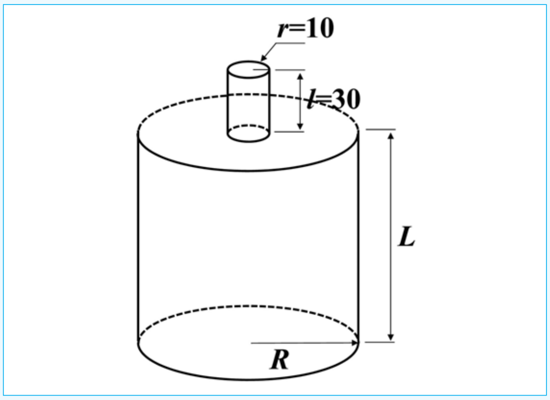

그림 4 헬름홀츠 공명기 예제(단위: mm)

지금까지의 유도과정에서 음파의 파동 방정식 및 풀이 과정은 전혀 이용되지 않았다. 즉, 개구부의 집중 질량 및 공동 내 공기의 등가 스프링만으로 구성된 1 자유도계의 특성이 사용되었다.

어쩌면 제일 중요한 가정이 먼저 언급되지 않았다. 즉, 공진 주파수에 해당하는 파장 λ가 개구부 및 공동의 치수(l, r, L, R) 보다 상당히 클 때에만, 앞에서의 유도 과정과 같이 개구부는 집중 질량 m_{neck}로 간주될 수 있다.

3. 예제

앞에서 유도된 결과를 이용하여 간단한 예제를 풀어보도록 하자. 덕트(duct)의 유동 소음을 저감하기 위해 그림 4에 보인 바와 같은 헬름홀츠 공명기를 설계하고자 한다. 저감 대상 소음의 주파수 (f_n)는 200 Hz라고 하며, $2R=L$이 되도록 하려고 한다. 공명기 내의 기체는 공기이고 21 °C, 101.3 kPa에서 밀도(ρ_0)가 1.2 kg/m^3, 음파 속도는 343.8 m/s라고 한다.

먼저 개구부의 수정된 길이를 구하자. 덕트에 부착할 것이기에 공동 내부뿐만 아니라 개구부 외부의 끝단 모두 플랜지가 있는 것으로 간주할

수 있다. 개구부의 길이는 짧지 않기에 $\alpha = 0.82$를 적용한다. 따라서,

$$l_{eq} = 30 + 2 \times 0.82 \times 10 = 46.4 \text{ mm} \quad (19)$$

가 되고, 식 (17)에 의해 공동의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{c^2 \times r^2}{f_n^2 \times l_{eq}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\left(343.8 \times 10^3\right)^2 \times 10^2}{200^2 \times 46.4} \quad (20)$$
$$= 5.07 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

위의 결과로부터 $V_0 = \pi R^2 L = 2\pi R^3$에 의해 R = 43.2 mm이 된다. 따라서, L = 86.4 mm이다. 참고로 200 Hz 음파의 파장 λ는 $\lambda = c / f_n$에 의해 약 1.72 m가 되는데, 이는 공명기의 치수 (l, r, L, R)보다 매우 크다.

4. 맺음말

생활 환경 소음에 대한 문제가 매우 중요한 관심사가 되었다. 소음을 저감하기 위한 다양한 연구가 진행되어 오고 있는데, 헬름홀츠 공명기 및 1/4 파장관 등은 이를 위한 대표적인 원리로 사용되고 있다. 이 원리는 음향 에너지 제어를 위한 음향 메타물질 및 구조의 연구에서도 중요한 역할을 하고 있다. 소음 저감은 가능한 넓은 대역폭에서 음향 투과 손실을 최대화하는 것이 그 목적일 것이다.

이번 강좌는 소음 저감의 중요한 수단 중의 한 방법으로 적용되고 있는 헬름홀츠 공명의 원리에 대해 다루었다. 앞에서 유도한 공명기의 공진주파수 계산식은 공동의 부피(V_0), 개구부의 단면적(A) 및 길이(l)의 함수로만 표현되어 있어 쉽게 사용할 수 있는 장점이 있지만, 설계 목적에 맞는 관련 치수에 대한 조합이 상당히 많이 존재할 수 있고 기하학적 특징에 대한 정보가 포함되어 있지 않다. 이에 대해 계산식의 실용성과 더불어 정확도를 높이려는 연구[3]가 계속되고 있다. KSNVE

참고문헌

(1) Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B. and Sanders, J. V., 1999, Fundamentals of Acoustics(4th ed.), John Wiley & Sons, Inc.

(2) Hall, D. E., 1987, Basic Acoustics, John Wiley & Sons, Inc.

(3) 류호경, 정성진, 이진우, 2014, 형상 정보를 고려한 덕트 소음 저감용 헬름홀츠 공명기 설계, 대한기계학회논문집A., Vol. 38, No. 4, pp. 459~468.