가우시안 이진 대칭 채널에서 쇄상부호의 최적 내 · 외 부호율에 관한 연구

이예훈* 정회원

Optimum Inner and Outer Code Rates for Concatenated Codes in Gaussian Binary Symmetric Channels

Ye Hoon Lee* *Regular Members*

요 약

본 논문에서는 가우시안 이진 대칭 채널에서 쇄상부호를 사용할 때의 최적 내·외 부호율에 관하여 연구한다. 쇄상부호의 전체 부호율이 고정되어 있을 때, 내 부호율이 감소할수록 내 부호의 오류 검출 능력은 향상되지만, 반대로 외 부호의 오류 정정 능력은 감소하게 된다. 이러한 trade-off 관계를 이용하여 본 논문에서는 쇄상부호의 최대 성능 이득을 얻기 위한 내 부호와 외 부호에의 최적의 중복(redundancy) 분포에 관하여 연구한다. 분석한 결과, 가우시안 이진 대칭 채널에서는 외 부호화율을 최소화하고 내 부호화율을 최대화함으로써 전체 쇄상부호 시스템의 성능을 극대화 시킬 수 있음을 알 수 있었다.

Key Words : Concatenated code; code rate; optimum redundancy; Gaussian channel; binary symmetric channel.

ABSTRACT

In this paper, we address a problem of finding the optimum inner and outer code rates for a concatenated code in Gaussian binary symmetric channels. Clearly, as the inner code rate decreases, the error detection capability of the inner code increases. However, decreasing the inner code rate implies a decrease in error-correction capability of the outer code when overall code rate is fixed. With this notion in mind, we examine the optimum distribution of redundancy on the outer and inner codes to achieve a maximum performance gain in the concatenated coding scheme. Our analysis shows that the maximum coding gain can be obtained when the inner code rate is maximized and the outer code rate is minimized under the constraint of total code rate is fixed.

I. 서 론

쇄상부호(concatenated code)는 내 부호(inner code)와 외 부호(outer cde)의 결합에 의한 오류 정정 부호(eror cntrol cding)의 일종으로서 블록 길이를 증가시킴에 따라 지수적으로 감소하는 오류 확률을 가지면서 다항 시간(plynomial tme) 복호 복잡도를 만족하는 부호화 방식 중 하나이다[1]. 이러한 쇄상부호는 과거 1970년대 우주 통신부터 사용이 되기 시작하여 최근에는 디지털 TV 방송을 위한 오류 정정 부호 방식으로 채택이 되었다[2]. 쇄상부호 방식에서 가장 일반적으로 많이 사용되는 외 부호는 리드-솔로몬(Reed-Solomon) 부호인데, 그 이유는 리드-솔로몬 부호가 최대 거리 부호로서 redundancy를 효율적으로 잘 사용할 수 있고 연집 오류를 정정할 수 있는 능력이 있기 때문이다[3]. 본 논문에서도 외 부호로 리드-솔로몬 부호를 사용하기로 한다.

또한 본 논문에서는 내 부호로서 오류 검출 및 정정 능력이 있는 이진 블록 부호를 고려한다. 내 부호는 e_c개의 오류를 정정할 수 있고 e_d개의 오류를 검출할 수 있다고 가정한다. 단, 내 부호의 최소 거리(minimum distance)를 d_{mim}이라 할 때 $e_c+e_d<d_{mim}$을 만족하여야 한다. 오류가 검출될 경우, 모든 내 부호 심볼은 소거(erased)된다. 그러나, 내 부호에 의해서 오류가 검출되지 않거나 또는 정정되지 않는 경우는 내 부호의 복호화기 출력에 오류가 발생하게 되는데 외

※ 이 연구는 서울과학기술대학교 교내 학술연구비 (일부)지원으로 수행되었습니다.
*서울과학기술대학교 전자IT미디어공학과 (y.lee@snut.ac.kr)
접수일자 : 2014년 5월 27일, 수정완료일자 : 2014년 6월 9일, 최종게재확정일자 : 2014년 6월 11일

부호는 이러한 내 부호에 의해 발생하는 소거 혹은 오류 심볼들을 정정하게 된다.

쇄상부호의 전체 부호화율(code rate)이 고정되어 있을 때, 내 부호의 부호화율을 감소시키면 내 부호의 오류 검출 능력은 향상된다. 그러나, 전체 부호화율이 고정되어 있으므로 이것은 또한 외 부호의 오류 정정 능력의 감소를 야기시킨다. 그러므로, 전체 쇄상부호의 블록 오류 확률을 최소화 시키는 최적의 내 부호와 외 부호의 부호율 조합이 있을 것임을 예측할 수 있다. 본 논문에서는 이러한 최적 부호율을 가우시안(Gaussian) 이진 대칭 채널(binary symmetric channel)에서 분석하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 우선 II절에서는 가우시안 이진 대칭 채널에 관하여 설명한다. III절에서는 쇄상부호 시스템의 개요 및 본 논문에서 고려하는 쇄상부호를 서술한다. IV절에서 최적의 쇄상부호 성능을 가져오는 최적의 내·외 부호화율에 관하여 분석하고, 그 실험 결과를 V절에서 다룬다. 마지막으로 VI절에서는 본 논문의 결과를 마무리하여 끝맺음한다.

Ⅱ. 가우시안 이진 대칭 채널

채널은 입력 알파벳 A_X와 출력 알파벳 A_Y를 가지는데 모두 실수 집합의 한 원소이다. 전송 시간 i에서의 채널 입력 신호를 X_i, $i=1,2,\cdots$ 라 두고, 그에 해당하는 채널의 출력 신호를 Y_i, $i=1,2,\cdots$ 라 두면 $Y_i = X_i + Z_i$로 주어지는데 여기서 Z_i, $i=1,2,\cdots$ 는 서로 독립이며 동일하게 분포되어 있는 가우시안 랜덤 변수로서 평균은 0, 분산은 $\sigma^2 = N_0/2$ 이다. 이러한 가우시안 채널 모델은 그림 1과 같다.

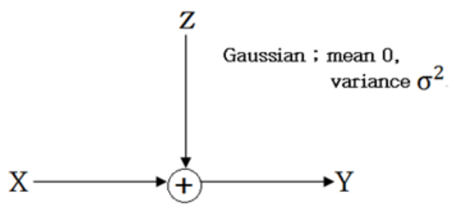


그림 1. 가우시안 채널

디지털 통신의 관점에서 변조기, 복조기, 그리고 채널을 묶어서 입력 심볼, 출력 심볼, 그리고 교차 확률로 특징지울 수 있다[4]. 가장 간단한 형태로는 교차 확률이 시불변(time invariant)이고 심볼에 따라 그 확률이 독립인 이산 무기억 채널(discrete memory channel)이 있으며 이진 심볼을 전송하는 경우 다음과 같은 이진 대칭 채널(binary symmetric channel)로 모델링 되어진다.

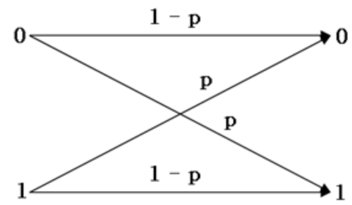


그림 2. 이진 대칭 채널

그림 2에서 채널 교차 확률 p는 이진 위상 변조(binary phase-shift keying) 방식의 경우 다음과 같이 주어진다.

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \tag{1}$$

(1)에서

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \tag{2}$$

이다.

Ⅲ. 쇄상부호 시스템

본 논문에서 적용하는 쇄상부호 시스템의 개요는 그림 3과 같다. 전송되는 정보는 우선 (n, k) 외 부호로 부호화된다. 외 부호화기를 거친 심볼은 다시 (N, K) 내 부호화기를 통하여 다시 부호화되는데, 내 부호화기, 채널, 내 복호화기를 묶어서 슈퍼채널(super channel)이라고 부르게 된다. 본 논문에서는 내 부호와 외 부호의 심볼 알파벳 크기를 각각 M_i, M로 표현한다.

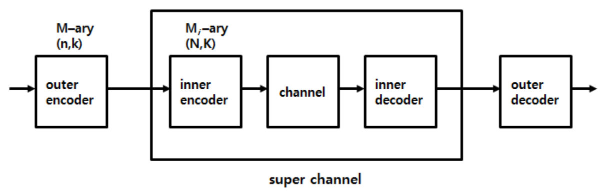


그림 3. 쇄상부호 시스템

최종적으로 쇄상부호는 한 코드워드(codeword) 당 M_i 사이즈의 채널 심볼 nN개 중에서 정보 심볼 kK개를 가지게 된다. 전체 부호율은 $rR = kK/nN$ 이며, r과 R는 각각 $r = k/n$, $R = K/N$ 로 정의된 외 부호율과 내 부호율이다. 본 논문에서는 외 부호로 이미 언급했듯이 리드-솔로몬 부호를 사용하였으며 내 부호로는 이진 오류 검출 부호만을 고려하였다. 또한 한 외 부호 심볼이 하나의 내 부호 코드워드를 구성한다고 가정한다. 내 부호가 오류를 검출하면 모든 내 부호 코드워드는 소거시키게 되며, 결국 이것은 한 외 부

호 심볼의 소거를 가져오게 된다. 내 부호로 오류가 검출되지 않은 경우도 또한 생길 수 있는데, 결국 최종적으로 내부호는 그림 4와 같은 M진 소거 및 오류 채널(M-ary erasures and errors channel)를 발생시키게 된다.

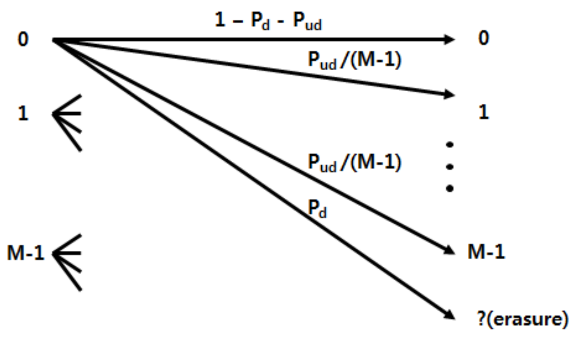


그림 4. M진 소거 및 오류 채널

내 부호가 오류 검출로만 사용될 경우, 미 검출 오류는 채널에서의 오류 패턴이 0이 아닌 내 부호의 코드워드와 동일한 경우에 발생한다[5]. 이진 대칭 채널의 경우 채널의 오류 패턴이 부호 길이 N을 가진 내 부호의 특정한 코드워드와 일치할 확률은 $p^i(1-p)^{N-i}$이므로, 미검출 오류 확률(undetected error probability) P_{ud}는 다음과 같이 주어진다.

$$P_{ud} = \sum_{i=1}^{N} A_i\, p^i (1-p)^{N-i} \tag{3}$$

(3)에서 A_i는 내 부호의 무게 분포(weight distribution)이다.

내 부호 심볼에 오류가 발생하지 않을 확률, 즉 오류 미발생 확률(corrected error probability)은 다음과 같다.

$$P_c = (1-p)^N \tag{4}$$

그러므로, 오류 검출 확률(probability of detected error)는 다음과 같이 주어진다.

$$P_d = 1 - P_{ud} - P_c \tag{5}$$

리드-솔로몬 외 부호의 최소 거리 성질로부터 (n,k) 리드-솔로몬 부호는 $e=n-k$ 개의 소거 심볼 혹은 그 절반인 $t=(n-k)/2$ 개의 오류 심볼을 정정할 수 있다. 일반적으로 말하면 (n,k) 리드-솔로몬 부호는 $2t+e$ 의 값이 $n-k$ 를 넘지 않는 범위 내에서 e개의 소거 심볼과 t개의 오류 심볼의 어떠한 조합도 정정할 수 있는 것이다. 그러므로 외 부호 코드워드의 블록 오류 확률 P_E는 다음과 같이 주어진다.

$$P_E = \sum_{2t+e>n-k} \binom{n}{t,e} P_d^e P_{ud}^t (1-P_d-P_{ud})^{n-t-e} \tag{6}$$

(6)에서

$$\binom{n}{t,e} = \frac{n!}{t!e!(n-t-e)!} \tag{7}$$

이다.

Ⅳ. 최적의 내 · 외 부호율 분석

최적의 부호율을 분석하기 위하여 본 논문에서는 (6)의 블록 오류 확률을 다음과 같이 근사화 하였다.

$$P_E \approx Q\left[\frac{\sqrt{n}\,(1-\frac{k}{n}-P_d-2P_{ud})}{\sqrt{P_d-P_d^2+4P_{ud}-4P_{ud}^2-4P_dP_{ud}}}\right] \tag{8}$$

본 논문에서는 또한 미 검출 오류 확률이 오류 검출 확률에 비하여 매우 작다고 가정하였다. 즉, $P_{ud} \ll P_d$. 이러한 가정은 대부분의 실제적인 환경에서 유효한 가정이다. 그러면, 식 (8)에서 P_{ud}와 P_d^2과 연관된 항을 무시하면 다음과 같은 근사화 식을 얻을 수 있다.

$$P_E \approx Q\left[\frac{\sqrt{n}\,(1-\frac{k}{n}-P_d)}{\sqrt{P_d}}\right] \tag{9}$$

결국 전체 쇄상부호 시스템의 블록 오류 확률을 최소화하기 위해서는 $(1-\frac{k}{n}-P_d)/\sqrt{P_d}$ 가 최대화되어야 하며, 이것은 결국 P_d와 k/n이 동시에 최소화되어야 한다는 것을 의미한다. 이것은 외 부호화율을 최소화하고 내 부호화율을 최대화함으로써 전체 쇄상부호 시스템의 성능을 극대화 시킬수 있다는 것을 의미한다. 단, 이것은 $P_{ud} \ll P_d$ 인 환경에서만 유효하다는 것을 주지하여야 한다.

V. 실험 결과 및 토의

본 논문에서는 내 부호로서 패리티 검사 부호를 이용하여 실험 결과를 고찰하였다. 패리티 검사 부호의 무게 분포는 다음과 같이 잘 알려져 있다[6].

$$A_i = \begin{cases} \binom{N}{i}, & i = even \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{10}$$

전체 쇄상부호의 부호율 rR은 0.3과 0.5의 경우에 실험을 행하였으며, 내 부호의 길이 N을 6부터 10까지 변화시킬 때 패리티 검사 부호의 구조는 그림 5와 같다.

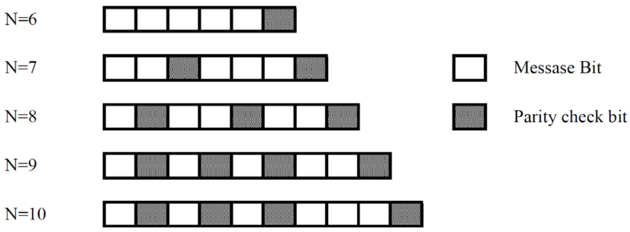


그림 5. 패리티 검사 부호의 길이 N 에 따른 구조

그림 5와 같은 패리티 검사 부호의 구조를 적용했을 때 각각에 대하여 미 검출 오류 확률 P_{ud}는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N=6,\quad P_{ud}=\sum_{i=2,4,6}\binom{6}{i}p^i(1-p)^{6-i}$$
$$N=7,\quad P_{ud}=1-\left[1-\binom{3}{2}p^2(1-p)\right]\left[1-\sum_{i=2,4}\binom{4}{i}p^i(1-p)^{4-i}\right]$$
$$N=8,\quad P_{ud}=1-(1-p^2)\left[1-\binom{3}{2}p^2(1-p)\right]^2 \tag{11}$$
$$N=9,\quad P_{ud}=1-(1-p^2)^3\left[1-\binom{3}{2}p^2(1-p)\right]$$
$$N=10,\quad P_{ud}=1-(1-p^2)^5$$

표 1과 표 2에 내 부호로서 $(N,5)$ 패리티 검사 부호를 사용하고 외 부호로는 $(32,k)$ 리드-솔로몬 부호를 사용하였을 때 P_{ud}, P_d, P_E 값을 나타내었다. 본 논문에서 가정한 조건, $P_{ud}\ll P_d$ 이 만족함을 확인할 수 있으며 최적의 부호율은 $N=6$ 일 때, 즉 내 부호의 부호화율이 최소일 때임을 확인할 수 있다. 이것은 앞 VI절에서의 이론적 분석의 결과로도 예측 가능한 결과이기도 하다. 그러므로, 가우시안 이진 대칭 채널에서는 쇄상부호를 적용할 때 내 부호에 최소의 redundancy를 두고 외 부호에 최대의 redundancy를 배분하는 것이 최적의 성능을 얻는다는 것을 알 수 있다.

표 1. 내 부호가 $(N,5)$ 패리티 검사 부호이며 외 부호가 $(32,k)$ 리드-솔로몬 부호일 때의 P_{ud}, P_d, P_E 의 값 ($rR=0.3$, $p=0.01$)

N	k	P_{ud}	P_d	P_E
6	11	1.441e-03	5.708e-02	3.976e-17
7	13	8.849e-04	6.705e-02	1.228e-14
8	15	6.939e-04	7.656e-02	8.056e-12
9	17	5.969e-04	8.589e-02	3.465e-09
10	19	4.999e-04	9.512e-02	6.936e-07

표 2. 내 부호가 $(N,5)$ 패리티 검사 부호이며 외 부호가 $(32,k)$ 리드-솔로몬 부호일 때의 P_{ud}, P_d, P_E 의 값 ($rR=0.5$, $p=0.01$)

N	k	P_{ud}	P_d	P_E
6	19	1.441e-03	5.708e-02	1.028e-08
7	22	8.849e-04	6.705e-02	9.413e-06
8	25	6.939e-04	7.656e-02	2.952e-03
9	28	5.969e-04	8.589e-02	1.429e-01
10	32	4.999e-04	9.512e-02	9.599e-01

V. 결 론

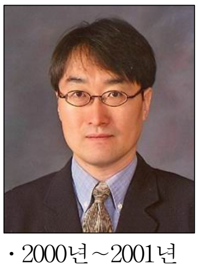
본 논문에서는 가우시안 이진 대칭 채널에서 쇄상부호를 사용할 때 최적의 내 부호율과 외 부호율의 조합을 연구하였다. 이론적 분석 및 실험적 결과를 바탕으로 쇄상부호의 성능을 극대화 하는 최적의 부호율 조합은 내 부호율을 최대화하고 외 부호율을 최소화하는 것임을 밝힐 수 있었다. 즉, 이것은 쇄상부호의 전체 부호율이 고정되어 있을 때 가능한 외 부호에 최대의 redundancy를 배분하여 외 부호의 소거 및 오류 정정 능력을 극대화하는 것이 가장 최적이라는 것을 의미하는 것이다.

참 고 문 헌

[1] G. D. Forney, Concatenated Codes, MIT Press, Cambridge, MA, 1966.
[2] Z. Yang, M. Han, C. Pan, A. Men, and L. Yang, "A novel scheme of coding and modulation for digital television terrestrial broadcasting,"Proc. of IEEE PIMRC, pp. 376-379, 2003.
[3] T. Blahut, Theory and Practice of Error Control Codes, Addison Wesley Pub. Co, 1983.
[4] G. C. Clark and J. B. Cain, Error Control Coding for Digital Communications, Plenum Press, New York, 1982.
[5] E. R. Berlekamp, Algebraic Coding Theory, Aegean Park Press, 1984.
[6] J. H. Wolf, et. All, On the probability of undetected error for linear block codes," IEEE trans. on Communications, vol. 30, pp. 317-324, Feb. 1982.

저자

이 예 훈 (Ye Hoon Lee) **정회원**



· 1990년 2월 : KAIST 전기 및 전자공학과 학사졸업
· 1992년 2월 : KAIST 전기 및 전자공학과 공학석사
· 2000년 2월 : KAIST 전기 및 전자공학과 공학박사
· 2000년~2001년 : LG전자 차세대 단말연구소 선임연구원
· 2001~2003년 : Research Associate, New Jersey Institute of Technology, U.S.A.
· 2003~2005년 : 삼성종합기술원 i-Networking Lab, 전문연구원
· 2005년~현재 : 서울과학기술대학교 전자IT미디어공학과 부교수
<관심분야> : 통신이론, 이동통신, 위성통신 등