Q 사면안정해석시 일반적으로 한계평형해석에 의해 안전율을 구하는 방법인 결정론적인 방법이 널리 이용되고 있으나 그러한 방법 대신 신뢰성에 기반하여 확률론적인 방법으로 사면의 안정성을 판단하는 방법으로는 어떠한 방법들이 있는지요?

A

김 범 주
동국대학교 건설환경공학과 부교수

신뢰성 이론을 이용한 사면안정해석에서는 기본적으로 해석에 적용되는 입력값을 모두 확률변수로 고려하게 되며 이 때문에 해석의 결과값도 파괴 확률로 구해지게 된다. 이러한 개념을 이용한 방법으로는 여러 방법이 존재하며 이들을 요약하여 간단히 설명하면 다음과 같다.

1) 파괴확률을 직접 적분을 통하여 구하는 방법 (Direct integration method)

안전율(FS)에 대한 확률밀도함수를 직접 적분하여 파괴확률(P_f)을 구하는 방법으로서 P_f는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$P_f = \int_{FS<1} f_{FS}(FS)dFS \tag{1}$$

위 방법을 사용하기 위해서는 FS에 대한 확률밀도함수인 $f_{FS}(FS)$ 를 알고 있어야 한다는 점에서 적용성이 높지 않아 일반적으로 널리 사용되지는 않는다.

2) 점 추정법 (Point estimate method, PEM)

점 추정법(PEM)은 입력 확률변수의 정확한 분포를 모르는 경우 그 대신 $f_{FS}(FS)$ 의 통계 모멘트에 대한 근사치를 이용하는 방법이다. 즉, 이 방법에서는 연속함수인 입력 확률변수에 대한 확률분포 대신 개별(discrete) 혹은 "통합(lumped)"된 등가의 분포를 이용하고, 이 때 n개의 입력 확률변수들에 따른 FS의 평균과 분산은 다음 식을 이용하여 구한다.

$$\mu_{FS} = \sum_{i=1}^{2^n} P_i(FS_i) \tag{2}$$

$$\sigma_{FS}{}^2 = \sum_{i=1}^{2^n} P_i(FS_i)^2 - \mu_{FS}{}^2 \tag{3}$$

위 식에서 P_i는 가중계수로서 $\sum_{i=1}^{2^n} P_i = 1$가 된다.

FS의 평균과 표준편차를 구하면, 이들을 이용하여 파괴 확률로 표현될 수 있는 신뢰도 지수(β)를 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\beta = \frac{\mu_{FS} - 1}{\sigma_{FS}} \tag{3}$$

점 추정법은 각 입력 확률변수의 확률밀도함수가 어떠한 형태인지 알지 못해도 적용이 가능한 장점이 있는 반면, 성능함수 (performance function)가 과도하게 비선형(non-linear)이거나 비대칭(asymmetric)인 경우에는 해석 결과에 오류가 생기는 단점이 있다. 이 방법에서는 총 2^n개의 성능함수가 필요하고 가중계수 P_i를 통하여 입력변수간의 공간 상관성(spatial correlation)을 고려한다.

3) 일계 이차 모멘트 법 (First order second moment method, FOSM)

이 방법은 FS의 평균과 분산을 입력 확률변수들의 평균점에서 성능함수(혹은 한계상태함수, 즉 여기서는 FS에 대한 식)를 Taylor 전개하여 일차항까지만을 이용하여 선형화하여 구한 일차, 이차 모멘트인 평균과 분산값으로 근사화시켜 구하는 방법이다. 이 때 신뢰도 지수는 다음 식과 같이 표현된다.

$$\beta = \frac{FS(\mu_{X_i}) - 1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial FS}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial FS}{\partial X_j}\right)Cov[X_i, X_j]}} \tag{4}$$

위 식에서 n은 확률변수의 수, $\mu_{\chi i}$는 각 확률변수의 평균, $Cov[X_i, X_j]$는 X_i와 X_j의 공간 상관성을 고려한 공분산(covariance)을 의미한다.

이 방법도 입력 확률변수의 확률밀도함수를 알 필요가 없다는 장점이 있으나 대신 성능함수(performance function)를 어떻게 정의하느냐에 따라 계산되는 신뢰도 지수에 큰 차이가 발생할 수 있다는 단점이 있다.

4) 일계 신뢰도 법 (First order reliability method, FORM)

이 방법은 소위 Hasofer-Lind 신뢰도 지수(Hasofer and Lind, 1974)라는 아래 식 (5)와 같이 표현되는 신뢰도 지수 식을 이용하는 방법이다. 이 방법에서는 기본적으로 확률변수들의 평균이 성능함수의 안전측에 놓여 있다고 가정한다. 그리고 여기서 신뢰도 지수는 평균값과 한계상태면 (limit state surface) 사이의 최단 거리로 구해지게 된다.

$$\beta = \min_{g=0}\sqrt{\left\{\frac{X_i - \mu_i^N}{\sigma_i^N}\right\}[R]^{-1}\left\{\frac{X_i - \mu_i^N}{\sigma_i^N}\right\}} \tag{5}$$

위 식에서 X_i는 i번째 확률변수, μ_i^N는 i번째 확률변수의 정규화된 평균, α_i^N는 i번째 확률변수의 정규화된 표준편차, 그리고 $\{(X_i-\mu_i^N)/\alpha_i^N\}$은 표준화된 n 확률변수들의 벡터, [R]과 g는 상관행렬과 한계상태함수(limit state function)를 각각 의미한다.

이 방법은 신뢰도 지수가 성능함수(performance function)의 형태에 영향을 받지 않는 장점 때문에 최근에 많이 사용되고 있는 편이다.

5) 몬테카를로 시뮬레이션 방법 (Monte Carlo simulation, MCS)

이 방법은 수치적으로(numerically) 일련의 난수를 반복적으로 발생시켜 충분한 수의 표본집단을 생성함으로서 파괴가 발생한 시뮬레이션 횟수를 전체 시뮬레이션 횟수로 나누어 직접적으로 파괴확률을 계산하는 방법이다. 따라서, 이 방법은 위에 열거한 타 방법들에 의한 결과를

확인하는 데 주로 사용된다. 그리고, 성능함수의 확률밀도함수를 알고 있거나 산정이 가능하다면 시뮬레이션의 횟수를 충분히 줄일 수 있다.

[참고문헌]

1. Griffiths, D.V., Huang, J., and Fenton, G.A., Comparison of slope reliability methods of analysis, in Proceedings of GeoFlorida 2010: Advances in Analysis, Modeling, and Design, West Palm Beach, Florida, Feb 2010.
2. Hasofer, A. M. and Lind, N. C. (1974). "Exact and invariant second moment code format." J. Engrg. Mech. Div., 100(1):111 – 121.