

에너지보존과 토크평형을 이용한 제로터 유압모터의 배제용적 해석
 - 내부로터 공·자전 경우 -

An Analysis on Volumetric Displacement of Gerotor Hydraulic Motor using Energy Conservation and Torque Equilibrium
 - Second Report: The Case of a Revolving and Rotating Inner Rotor -

김성동^{1*} · 김대명² · 함영복³

S. D. Kim, D. M. Kim and Y. B. Ham

Received: 01 Aug. 2014, Revised: 08 Oct. 2014, Accepted: 11 Oct. 2014

Key Words : Volumetric Displacement(배제용적), Energy Conservation(에너지 보존), Torque Equilibrium(토크 평형), Gerotor Hydraulic Motor(제로터 유압모터)

Abstract: It is difficult to analytically derive a volumetric displacement formula for a gerotor hydraulic motor due to the complexity of the geometric shape of its gear lobes. This work proposes an analytical method for the volumetric displacement, a relatively easy method based upon two physical concepts: conservation between hydraulic energy and mechanical shaft energy, and torque equilibrium for the rotor's motion. The first research using these concepts was conducted on inner and outer rotors rotating with respect to each rotor axis. This work represents the second report conducted on an inner rotor revolving as a planetary motion on the stationary outer rotor. The formula equations regarding the volumetric displacement and flow rate are derived, and the proposed formula about the volumetric displacement is proven to be the same as another analytical displacement formula: the so-called vane length method. From the formula, volumetric displacement is calculated for an example geometry of the gear lobes. The resultant displacement is confirmed to be the same as the value calculated from the chamber volume method. The proposed analytical formula can be utilized in the analysis and design of gerotor hydraulic motors. Because it is based on torque equilibrium, this formula can provide a better understanding of torque performance, such as torque ripple, in designing a gerotor type motor.

기호 설명

T_L : load torque on a pump/motor shaft

$V_{2\pi}$: volumetric displacement per one revolution

F_k : force induced by pressure distribution

Q_t : instantaneous flow rate

\vec{P}_c : coordinates of pitch point

m : number of outer rotor's lobes

r_c : radius of outer rotor's circular part

* Corresponding author: sdkim@kumoh.ac.kr

1 Department of Intelligent Mechanical Engineering, Kumoh National Institute of Technology, Gumi 054-478-7395, Korea

2 D. M. Kim: Department of R&D, DeaHwa Industrial Machinery Inc., Korea.

3 Y. B. Ham: Extreme Energy Machinery lab, Korea Institute of Machinery & Materials Industrial Machinery, Korea.

Copyright © 2014, KSFC

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Subscripts

1 : inner rotor

2 : outer rotor

1. 서 론

제로터 형은 주로 소형 유압 펌프에 사용되고 있으며, 고정 외부로터에 공·자전하는 내부로터를 적용하는 경우에는 저속·고토크용 유압모터로도 응용되어지고 있다. 일반적으로 제로터는 내접 물림운동을 하며, 모터로 응용되는 경우에 외부로터가 고정 상태에서 내부로터가 공전과 자전이 복합한 운동 형태를 취하기도 하는데, 기구학적으로 유성기어에 해당되어서 감속비를 크게 하는 효과를 얻는다.

제로터 펌프/모터에 관한 학술적 연구 분야는 크게 기어형상의 설계(1-9)와 펌프/모터의 용적과 유량에 관한 연구(10-13), 정밀가공의 생산기술과 성능에 관한 연구(16)로 나누어지는데 생산기술에 관한 학술적 연구는 많지 않다.

외부로터는 외부 기어에 해당되고 일반적으로 설계 및 가공의 편의를 위하여 원호곡선을 치형으로 사용한다. 내부로터의 형상은 외부로터의 치형에 의해 창성되며, 트로코이드 곡선으로 만들어진다.

일반적으로 제로터 유압 펌프/모터는 기하학적 형상이 매우 복잡하여, 기하학적인 방법으로 용적을 산출하는 것은 매우 어렵다. 제로터 펌프/모터의 배제용적에 관한 연구는 다음에 설명하는 두 가지 방법 중에 하나로 생각할 수 있다.

일부의 이전 연구(10, 11)에서 내부로터와 외부로터의 접촉점 사이의 용적을 직접 산출하는 방법을 이용하여 배제용적을 산출하는 방법을 제시 하였다. 결과공식의 수식이 매우 복잡하여서 설계에 반영하기에 어려움이 따른다.

다수의 연구(14,15)에서 내·외부로터의 접촉점의 길이를 이용한 배제용적 산출 공식을 소개하였다. 하지만 배제용적에 대한 개념적 소개만 하였으며 결과공식의 유도과정이 생략되었다. 또한 내·외부 로터가 동시에 회전하는 경우에 대하여만 공식을 제시하였으며, 외부로터가 고정된 상태에서 내부로터가 공전과 자전운동이 복합된 형태로 운동하는 경우에 대하여 연구와 결과가 제시되지 않았다.

본 연구에서는 제로터 모터에서 공급되는 유압에너지와 출력 축 에너지 사이의 에너지 보존원리와 로터에 대한 토크평형을 이용하여 배제용적과 유량을 산출하는 방법을 고찰하였다. 내부로터와 외부로터가 맞물려 회전하는 경우에 대한 일차 연구(13)에 이어서, 본 연구에서는 Fig. 1에서 보여주는 바와 같이 정지되어 있는 외부로터에 맞물린 내부로터가 공

전과 자전의 유성 운동하는 형태에 대하여 고찰하였다. 에너지 보존과 토크 평형을 적용하여 모터의 배제용적과 유량에 관한 공식을 유도하였다. 유도된 배제용적의 공식은 회전날개길이(12)의 공식과 동일함을 증명하였다. 또 다른 검증 방법을 위하여, 형상이 주어진 내부로터와 외부로터 사이에 형성되는 틈새 용적의 변화량을 CAD 윤곽면적 산출기능을 이용하여 수치해석적 방법으로 산출하였다. 이와 같이 챔버용적 산출의 방법으로 구한 배제용적이 본 연구에서 제시한 공식으로부터 산출한 배제용적과 동일함을 확인하였다.

배제용적 산출과정에서 내부로터와 외부로터 사이의 접촉점이 도출되어야 하며, 접촉점 산출 과정도 소개한다.

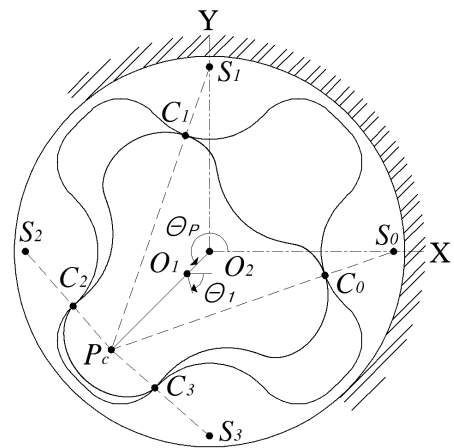


Fig. 1 Driving principle: The inner rotor rotates θ_1 and revolves θ_p in the stationary outer rotor

2. 에너지보존과 토크평형을 이용한 배제용적

2.1 에너지 보존 원리

Fig. 2의 유압모터에서 공급되는 유압에너지와 출력축의 기계적 토크에너지 사이에 에너지보존 원리를 적용한다. 해석의 편의를 위하여 효율이 100%인 이상적인 경우로 가정하고, 고압부의 압력은 p 이며, 저압부의 압력은 0인 상태로 간주한다. 또, 내부로터에 출력구동축이 연결되어서 자전회전(Fig. 1에서 θ_1)만을 출력하는 경우로 국한한다. 즉, 모터 축에 부과되는 부하토크만이 내부로터로 전달되도록 기구가 설치되며, 반경방향의 반작용력은 베어링 부에서 흡수하는 것으로 가정한다.

이상의 가정에서 모터 축의 $\Delta\theta_1$ 회전에 대하여 다

음 식과 같은 에너지보존의 식이 성립한다.

$$T_L \Delta\theta_1 = p \Delta V \quad (1)$$

여기서 T_L 은 모터의 축에 인가되는 부하토크를 의미하며, ΔV 은 $\Delta\theta_1$ 회전에 상응하는 유체 공급 용적이거나 배제용적이다.

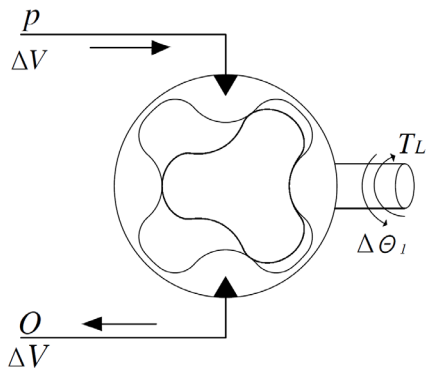


Fig. 2 Input hydraulic energy and output torque energy

2.2 토크 평형

(1)식에서의 토크 T_L 은 Fig. 3 에서 보여주는 바와 같은 내부로터 자유 물체도에 대한 힘의 토크평형 방정식으로부터 압력의 함수로 구해질 수 있다. R_k 는 내·외부로터의 접촉점 C_k 에서 작용력을 의미하며, F_k 는 압력 p 에 의한 유체 작용력을 의미한다.

외부로터는 고정된 상태이며 스스로 평형을 이루며 필요한 추가의 정보를 얻지 못한다. Fig. 3의 자유 물체도에서 내부로터는 자전운동과 공전운동을 하는 상태이며, 축에 인가되는 부하토크 T_L 과 유체력 F_k 와 접촉력 R_k 만이 작용한다. 유체력이 로터 단면에 작용하는 효과는 단면의 투영면적에 의하여 결정되며, 단면의 형상에는 무관하여 다음의 식과 같이 표현된다.

$$F_k = p b L_{C_i C_j} \quad (2)$$

$$L_{C_i C_j} = \sqrt{(X_{C_j} - X_{C_i})^2 + (Y_{C_j} - Y_{C_i})^2} \quad (3)$$

여기서 $L_{C_i C_j}$ 는 Fig. 4에 그려져 있는 바와 같이 이웃하는 접촉점 C_i 와 C_j 사이의 거리를 의미하며, b 는 내·외부로터의 두께이다.

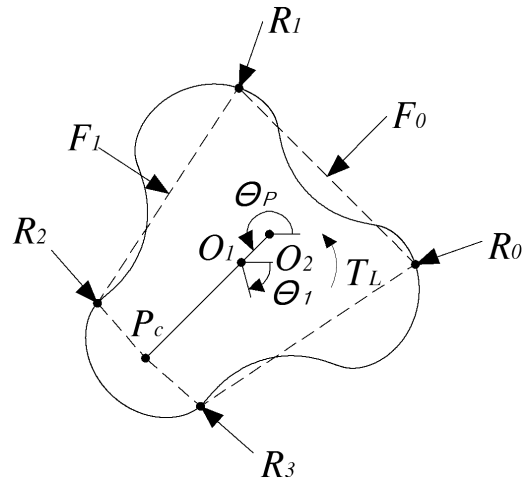


Fig. 3 Free body diagram for the inner rotor

제로터 설계이론²⁾에 의하면 내·외부로터 사이의 접촉마찰력을 무시할 경우에 모든 접촉력 R_k 는 피치점 P_c 를 향한다. 내·외부로터의 접촉점에서 모든 작용력 R_k 가 피치점을 향하므로 피치점에 대한 모멘트 효과는 형성되지 않는다. 피치점 P_c 를 중심으로 한 모멘트 평형식은 부하 토크 T_L 과 유체력 F_k 의 토크 효과가 균형을 이룬다.

$$T_L = \sum_{k=0}^h T_k \quad (4)$$

$$T_k = p b [(Y_{C_j} - Y_{C_i}) (\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2} - Y_p) + (X_{C_j} - X_{C_i}) (\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2} - X_p)] \quad (5)$$

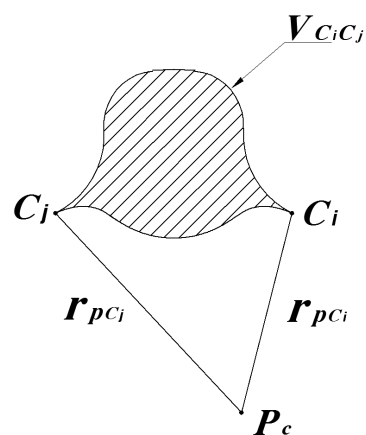


Fig. 4 Volume of a camber between two contact points of C_i and C_j

여기서 T_k 는 유체력 F_k 에 의하여 발생하는 토크를 의미하며, h 는 고압부 압력 p 가 작용하는 고압부

챔버의 수에 해당한다.

(5)식에서 $pb(Y_{C_j} - Y_{C_i})$ 와 $pb(X_{C_j} - X_{C_i})$ 는 유체력의 X방향 분력과 Y방향 분력을 각각 의미하며, $\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2}$ 와 $\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2}$ 는 유체력의 하중 중심의 좌표값을 각각 의미하며, $(\frac{Y_{C_j} + Y_{C_i}}{2} - Y_p)$ 와 $(\frac{X_{C_j} + X_{C_i}}{2} - X_p)$ 는 피치점을 중심으로 한 모멘트 팔의 길이를 각각 의미한다.

Fig. 3에서 내부로터와 외부로터 사이에는 외부로터 로브 수만큼 접촉점이 생기는데 접촉점 C_0 부터 C_h 까지 생성되는 챔버를 고압 챔버 혹은 흡입 챔버라고 가정하면, 전체 고압 챔버의 유체력 토크효과 $\sum T_k$ 를 고압부의 최초 접촉점 C_0 와 고압부의 최종 접촉점 C_h 만을 이용하여 표현할 수 있다. 왜냐하면 한 고압 챔버의 C_j 점 좌표는 다음 흡입 챔버의 C_i 점 좌표에 해당하여서 서로 상쇄되어지기 때문이다. 전체 토크 효과 $\sum T_k$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$\sum_{k=0}^h T_k = pb [(Y_{C_{hmax}} - Y_{C_{0min}})(\frac{Y_{C_{hmax}} + Y_{C_{hmin}}}{2} - Y_p) + (X_{C_{hmax}} - X_{C_{0min}})(\frac{X_{C_{hmax}} + X_{C_{0min}}}{2} - X_p)] \quad (6)$$

여기서 $(X_{C_{hmax}}, Y_{C_{hmax}})$ 는 피치점으로부터 가장 먼 접촉점 C_h 를 의미하며, $(X_{C_{0min}}, Y_{C_{0min}})$ 은 가장 가까운 접촉점 C_0 를 의미하기도 한다. h 는 흡입 챔버의 수이며, 외부로터의 로브 갯수인 m 이 짝수인 경우 $h = m/2$ 이며, m 이 홀수이면 내부로터의 자전회전 θ_1 의 함수로서 다음의 식으로 주어진다.

$$h = \frac{m-1}{2} \quad \text{for} \quad \frac{2k\pi}{m(m-1)} \leq \theta_1 \leq \frac{(2k+1)\pi}{m(m-1)} \quad (7)$$

$$= \frac{m+1}{2} \quad \text{for} \quad \frac{(2k+1)\pi}{m(m-1)} \leq \theta_1 \leq \frac{(2k+2)\pi}{m(m-1)}$$

여기서 k 는 0, 1, 2... ($m-1$)의 정수이다.

2.3 모터 용적과 유량

(6)식을 (4)식 및 (1)식에 적용하면 $\Delta\theta_1$ 회전에 대한 유체의 용적변화율 $\Delta V/\Delta\theta_1$ 를 구할 수 있다.

$$\frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} = b [(Y_{C_{hmax}} - Y_{C_{0min}})(\frac{Y_{C_{hmax}} + Y_{C_{hmin}}}{2} - Y_p) + (X_{C_{hmax}} - X_{C_{0min}})(\frac{X_{C_{hmax}} + X_{C_{0min}}}{2} - X_p)] \quad (8)$$

모든 고압 챔버의 용적변화율의 평균값 $\Delta V_{avg}/\Delta\theta_1$ 은 (8)식을 (7)식의 각도 구간 동안에 적분하고, 그 적분 값을 해당각도로 나누어서 구해진다.

$$\frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_1} = \frac{b \int_0^{2\pi/m(m-1)} \frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} d\theta_1}{2\pi/m(m-1)}$$

$$= \frac{m(m-1)b}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi/m(m-1)} [(Y_{C_{hmax}} - Y_{C_{0min}})(\frac{Y_{C_{hmax}} + Y_{C_{hmin}}}{2} - Y_p) + (X_{C_{hmax}} - X_{C_{0min}})(\frac{X_{C_{hmax}} + X_{C_{0min}}}{2} - X_p)] d\theta_1 \quad (9)$$

또한, 1회전 당 배제용적 $V_{2\pi}$ 는 (9)식에 1회전인 2π rad를 곱하여 구해진다.

$$V_{2\pi} = \frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_1} \cdot 2\pi$$

$$= m(m-1)b \cdot \int_0^{2\pi/m(m-1)} [(Y_{C_{hmax}} - Y_{C_{0min}})(\frac{Y_{C_{hmax}} + Y_{C_{hmin}}}{2} - Y_p) + (X_{C_{hmax}} - X_{C_{0min}})(\frac{X_{C_{hmax}} + X_{C_{0min}}}{2} - X_p)] d\theta_1 \quad (10)$$

순간 유량 $Q(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t}$$

$$= b [(Y_{C_{hmax}} - Y_{C_{0min}})(\frac{Y_{C_{hmax}} + Y_{C_{hmin}}}{2} - Y_p) + (X_{C_{hmax}} - X_{C_{0min}})(\frac{X_{C_{hmax}} + X_{C_{0min}}}{2} - X_p)]\omega_1 \quad (11)$$

여기서 ω_1 은 내부로터 자전회전 각속도이며, t 는 시간을 의미한다.

평균유량 Q_{avg} 은 다음과 같이 표현된다.

$$Q_{avg} = \frac{V_{2\pi}}{2\pi} \omega_1 \quad (12)$$

3. 내 · 외부 로터의 접촉점

제로터의 기어 설계 이론^{2, 12, 15, 16)}을 활용하면 내부로터와 외부로터의 피치원 반경 r_1, r_2 는 다음과 같이 계산된다.

$$r_1 = (m-1)e, \quad r_2 = me \quad (13)$$

여기서 r_1 은 내부로터 중심점 O_1 에서 피치점까지의 거리이며, 편심 e 는 외부로터의 중심점 O_2 와 내부로터의 중심점 O_1 사이의 거리이다.

외부로터가 고정된 상태에서 내부로터의 운동은 Fig. 1에 표현된 바와 같이 자전회전 θ_1 과 공전운동 θ_p 의 조합으로 표현될 수 있다. 피치점 P_c 의 순간중심에 대하여 자전운동에 의한 내부로터 중심점 O_1 의 변위와 고정된 외부로터 중심 O_2 에 대하여 공전 운동하는 중심점 O_1 변위는 일치한다. r_1 과 e 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$r_1 \theta_1 = -e \theta_p \quad (14)$$

초기 상태에서 내부로터가 시계방향으로 θ_1 자전 회전하면 내부로터의 중심점 O_1 은 고정된 외부로터 중심점 O_2 에 대하여 반시계방향으로 $(m-1)\theta_1$ 공전 회전한다.

(13)식과 (14)식으로부터 내부로터 자전회전각 θ_1 과 내부로터 중심점의 공전회전각 θ_p 사이에 다음의 관계가 성립한다. 해석의 편의상 부호는 생략하고 크기 관계만 나타낸다.

$$\theta_1 = \frac{1}{m-1} \theta_p \quad (15)$$

Fig. 1에서 묘사한 바와 같이 각 로브에서의 접촉점은 외부로터의 원호치형 중심점에서 피치점으로 그른 직선과 원호치형이 만나는 점이 된다. 그러므로 순간순간의 피치점의 위치를 알면 각 로브에서의 접촉점을 계산할 수 있다. 실제 가공 시에는 제로터의 원활한 운동을 위하여 틈새를 주지만 본 연구에서는 이상적인 제로터로 가정하여 모든 로브가 서로 접촉

하는 경우를 대상으로 한다.

고정되어 있는 외부로터의 원형부분의 중심 좌표 \vec{S}_k 도 일정하며, 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$\vec{S}_k = r_t \cos \frac{2k}{m} \pi \vec{i} + r_t \sin \frac{2k}{m} \pi \vec{j} \quad (16)$$

여기서 k 는 $0, 1, 2 \dots (m-1)$ 의 정수를 나타내며, \vec{i}, \vec{j} 는 고정좌표계 XO_2Y 에서 X 방향과 Y 방향의 단위벡터를 의미한다. r_t 는 외부로터의 고정 중심점 O_2 으로부터 원형부분의 중심 좌표 \vec{S}_k 까지의 거리이다. r_c 는 외부로터 원형부분의 반경이다.

순간순간의 피치점의 위치는 고정점 O_2 로부터 공전하는 O_1 의 방향으로 편심거리에 외부로터 로브 수를 곱한 값의 좌표가 된다. 외부로터의 중심점 피치점 좌표 \vec{P}_c 은 다음과 같이 나타낸다.

$$\vec{P}_c = me \cos \theta_p \vec{i} + me \sin \theta_p \vec{j} \quad (17)$$

피치점과 외부로터 원형부분의 중심 좌표 \vec{S}_k 를 연결하는 $\vec{P}_c \vec{S}_k$ 직선 식은 아래와 같고

$$Y - me \sin \theta_p = \frac{r_t \sin \frac{2k}{m} \pi - me \sin \theta_p}{r_t \cos \frac{2k\pi}{m} - me \cos \theta_p} (X - me \cos \theta_p) \quad (18)$$

중심 S_k 인 외부로터 원형 식은 다음과 같다.

$$(X - r_t \cos \frac{2k\pi}{m})^2 + (Y - r_t \sin \frac{2k\pi}{m})^2 = r_c^2 \quad (19)$$

(18)식과 (19)식의 교점이 접촉점 C_k 가 된다.

4. 회전날개 길이법 배제용적을 이용한 검증

4.1 회전날개 길이법 배제용적

Fig. 1에서 보는 바와 같이 내부로터와 외부로터 사이에 외부로터 로브 개수인 m 개의 접촉점과 m 개의 챔버공간이 형성된다. 이 중에서 절반에 해당하는 공간은 팽창하는 위상에 놓이게 되면 나머지 절반은 축소하는 위상에 위치한다. 팽창하는 챔버공간들을 합하거나 혹은 축소하는 챔버공간들을 합한 공간 용적의 변화율을 구하여 순간 용적변화율을 구하며, 구

동축 1 회전의 배제용적, 순간유량, 평균유량 등에 관한 이론식을 유도할 수도 있다.

Fig. 4에서 보여주는 인근한 두 접촉점 사이의 챔버 공간 $V_{C_i C_j}$ 의 변화율은 내부로터 거동에 대한 순간 중심인 피치점으로부터 접촉점까지의 거리의 함수로 표현된다. 내부로터가 공전운동과 자전회전의 복잡한 운동을 수행하여 챔버 공간의 용적변화율을 구하는 과정이 복잡할 것 같지만, 주어진 순간에 대한 순간중심을 알고 있을 경우에는 순간중심에 대한 자전회전운동만으로 표현이 가능하기 때문이다.

Fig. 4에서 C_i, C_j 접촉점 사이의 용적 변화 $\Delta V_{C_i C_j}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta V_{C_i C_j} = \frac{b}{2}(r_{pC_j}^2 - r_{pC_i}^2)\Delta\theta_1 \quad (20)$$

여기서 b 는 내·외부로터의 두께인데, 피치점 P_c 에 대한 접촉점 C_j 사이의 거리 r_{pC_j} 는 회전날개의 길이를 의미하며, 내부로터가 $\Delta\theta_1$ 회전하는 동안에 증가하는 챔버 면적은 $\Delta\theta_1$ 에 의하여 만들어지는 삼각형 면적인 $r_{pC_j}^2 \Delta\theta_1 / 2$ 가 된다. 동일한 방법으로 회전날개 r_{pC_i} 의 회전에 의하여 $r_{pC_i}^2 \Delta\theta_1 / 2$ 만큼 챔버 면적이 감소한다.

Fig. 1에서 접촉점 C_0 부터 C_h 까지 생성되는 챔버를 흡입 챔버라고 가정할 경우 접촉점 C_0 와 접촉점 C_h 를 이용하여 전체 흡입 챔버의 용적변화 ΔV 를 정의할 수 있다. 한 흡입 챔버의 C_j 점 좌표는 다음 흡입 챔버의 C_i 점 좌표에 해당하여서 서로 상쇄되어 지게 되며, 모든 흡입 챔버의 용적변화 ΔV 은 최대 날개길리와 최소날개 길이만의 함수로 표현된다. 전체 흡입 챔버의 용적변화 ΔV_{total} 을 구동축의 미소 회전각으로 나누어준 변화율은

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} &= \frac{\sum_{i=0}^h \Delta V_{C_i C_j}}{\Delta\theta_1} \quad (21) \\ &= \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2) \end{aligned}$$

여기서 h 는 흡입 챔버의 수이며, $r_{pC_{hmax}}$ 은 피치점과 접촉점 사이의 최대거리를 의미하고 $r_{pC_{0min}}$ 은 최소거리를 의미한다.

모든 흡입 챔버들 총 용적의 평균 변화율 $\Delta V_{avg} / \Delta\theta_1$ 은 (21)식을 (7)식의 각도 구간 동안에 적

분한 것을 해당 각도로 나누어서 구해진다.

$$\frac{\Delta V_{avg}}{\Delta\theta_1} = \frac{\int_0^{2\pi/m(m-1)} \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2) d\theta_1}{2\pi/m(m-1)} \quad (22)$$

(22)식에 2π 를 곱하여 1회전의 배제용적 $V_{2\pi}$ 이 구해진다.

$$V_{2\pi} = m(m-1) \cdot \int_0^{2\pi/m(m-1)} \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2) d\theta_1 \quad (23)$$

시간 변화에 대한 챔버용적 변화율을 순간유량으로 정의하고 이 영역이 나타내는 챔버의 면적은 각각의 중심으로부터 접촉점사이의 거리에 비례하기 때문에 다음과 같이 순간유량을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Q(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} \quad (24) \\ &= \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2) \omega_1 \end{aligned}$$

이때의 평균유량 Q_{avg} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_{avg} &= \frac{\int_0^{2\pi/m(m-1)} Q(t) d\theta_1}{2\pi/m(m-1)} \quad (25) \\ &= \frac{m(m-1)}{2\pi} \int_0^{2\pi/m(m-1)} \frac{b}{2}(r_{pC_{hmax}}^2 - r_{pC_{0min}}^2) \omega_1 d\theta_1 \end{aligned}$$

4.2 이론적 검증

2장에서 제시한 에너지보존원리와 토크평형을 이용하여 유도한 제로터 모터의 용적과 유량에 관한 결과공식들이 4장 1절에서 설명한 회전날개 길이법의 결과공식과 동일함을 증명하는 것은 (8)식이 (21)식과 동일함을 보이는 것으로 충분하다. (8)식은 다음 식과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta\theta_1} &= b [(Y_{C_{hmax}} - Y_{C_{0min}}) \left(\frac{Y_{C_{hmax}} + Y_{C_{0min}}}{2} - Y_p \right) \\ &\quad + (X_{C_{hmax}} - X_{C_{0min}}) \left(\frac{X_{C_{hmax}} + X_{C_{0min}}}{2} - X_p \right)] \\ &= \frac{b}{2} [(Y_{C_{hmax}}^2 - Y_{C_{0min}}^2) - 2(Y_{C_{hmax}} - Y_{C_{0min}}) Y_p \\ &\quad + (X_{C_{hmax}}^2 - X_{C_{0min}}^2) - 2(X_{C_{hmax}} - X_{C_{0min}}) X_p] \quad (26) \end{aligned}$$

(26)식에서 $Y_{C_{0max}}$ 항과 $Y_{C_{0min}}$ 항, $X_{C_{0max}}$ 항, $X_{C_{0min}}$ 항으로 묶은 후에 Y_p^2 항 혹은 X_p^2 항을 더하거나 빼줌으로써 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{\Delta \theta_1} &= \frac{b}{2} [(Y_{C_{0max}} - Y_p)^2 + (X_{C_{0max}} - X_p)^2 \\ &\quad - (Y_{C_{0min}} - Y_p)^2 - (X_{C_{0min}} - X_p)^2] \\ &= \frac{b}{2} (r_{pC_{0max}}^2 - r_{pC_{0min}}^2) \end{aligned} \quad (27)$$

(26)식과 (27)식으로부터 (8)식이 (21)식과 동일함이 증명되었다.

5. 챔버용적법 배제용적을 이용한 검증

5.1 챔버용적법 배제용적

제로터 모터의 1회전의 배제용적 $V_{2\pi}$ 를 산출하는 다른 방법으로서 Fig. 1과 Fig. 4에서 보여주는 내·외부로터 접촉점 사이의 챔버용적을 이용하는 방법을 고려할 수 있다.

구동축이 1회전하는 동안에 각각의 챔버는 팽창과 수축의 주기운동을 하게 되며, 각각의 챔버는 최대용적 V_{max} 와 최소용적 V_{min} 의 차이 용적을 흡입하여 토출하게 된다. 구동축이 1회전하는 동안에 흡입·토출하는 챔버의 수는 내·외륜의 자전과 공전운동에 연관된 운동의 형태와 선택된 구동축의 종류에 따라서 결정되어진다. 외부로터를 고정된 상태에서 내부로터 공·자전을 운동 형태에서 내부로터의 자전회전운동을 출력축에 연결하는 경우에는 출력축이 1회전하는 동안에 $m(m-1)$ 개의 챔버가 팽창과 수축을 반복하게 되어서 배제용적 $V_{2\pi}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} V_{2\pi} &= m(m-1)(V_{max} - V_{min}) \\ &= m(m-1)b(A_{max} - A_{min}) \end{aligned} \quad (28)$$

(28)식에서 A_{max} 와 A_{min} 는 Fig. 4의 접촉점 사이 해칭부 평면적의 최댓값과 최솟값을 의미하며, b 는 내·외부로터의 두께이다.

5.2 수치해석을 이용한 검증

에너지 보존원리와 토크 평형을 이용하여 유도한 제로터 모터의 용적과 유량에 관한 결과 공식들의 타당성을 검증하는 또 다른 방법으로서 외부로터와

내부로터의 접촉 챔버의 최대용적과 최소용적의 차이를 이용하는 (28)식의 방법으로 산출한 결과와 비교하였다.

(28)식의 챔버용적법을 적용하는 과정에서 접촉점 사이 평면적 A_{max} 와 A_{min} 를 이론적으로 산출하는 것이 매우 복잡하기 때문에 상용화된 CAD 프로그램에서 도형의 윤곽면적 기능을 이용하여 산출되었다. 에너지보존원리와 토크평형을 이용하여 배제용적을 산출하는 과정에서는 MATLAB 프로그램이 이용되었다.

Table 1에서 검증에 사용된 제로터 펌프/모터의 기본 사양을 보여주며, Fig. 5에서 기본 사양의 외부로터와 내부로터를 CAD 프로그램으로 설계한 프로파일의 모습을 보여준다. Fig. 5는 내부로터의 회전각이 0° 도 일 경우에 내부로터와 외부로터의 상태를 나타내고 있다. Fig. 6에서는 MATLAB 해석 프로그램의 플로우 차트를 보여준다.

Table 1 Specification of gerotor motor used in numerical analysis

specification	data
number of outer rotor lobes, m	4
number of inner rotor lobes, m-1	3
eccentricity, e	2.5 mm
radius of outer rotor circular part, r_c	6.5 mm
distance between O_2-S_k , r_t	16.5 mm
thickness of rotors, b	1.5 mm

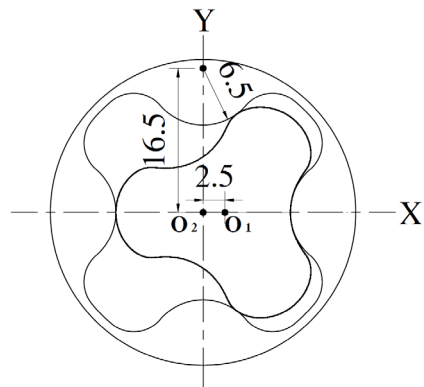


Fig. 5 Profiles of inner rotor and outer rotor used in the analysis

Fig. 7에서는 (8)식에 대한 용적변화율의 그래프를 나타낸 것이다.

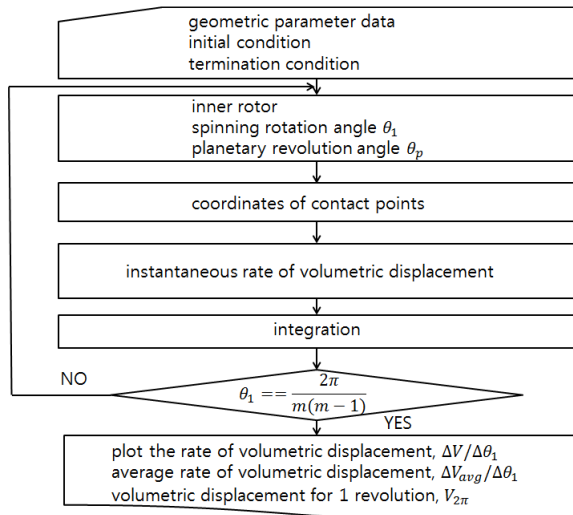


Fig. 6 Flowchart to calculate the volumetric displacement

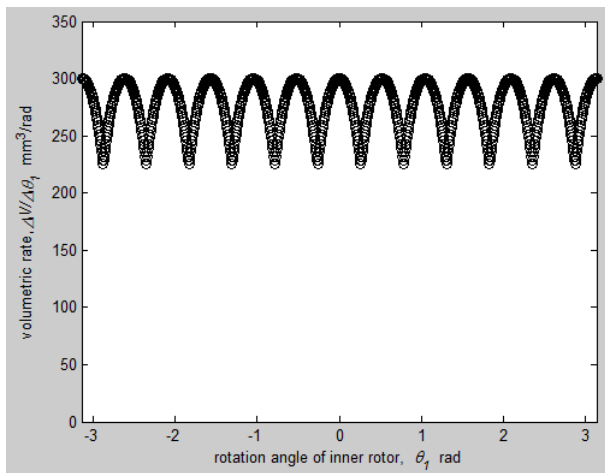


Fig. 7 Rate of the volumetric displacement, $\Delta V/\Delta\theta_1$

이때, 수평축의 물리 값이 내부로터 자전회전각인데, 자전회전각 θ_1 가 ± 0.1454 rad인 지점에서 용적 변화율이 평균용적변화율 $278.96 \text{ mm}^3/\text{rad}$ 과 동일한 지점에 해당하는데, 여기에 2π 를 곱한 1회전 당 배제용적의 결과 값은 Table 2의 좌측에서 보여준다.

이러한 결과 값은 4장에서 설명한 접촉점사이의 용적을 이용한 방법의 결과인 Table 2 우측의 결과 값과 거의 동일한 결과를 보이고 있다.

Fig. 8에서 내부로터의 공전회전각이 180° 일 때 최대면적을 가지는 챔버와 최소면적을 가지는 챔버의 모습을 보여준다. 이때, 최대면적을 가지는 챔버의 면적은 115.80 mm^2 이며 최소면적은 18.51 mm^2 의 면적을 가지며 로터의 두께는 1.5 mm 이다. 내부로터가 1 회전($\theta_1 = 2\pi \text{ rad}$)하는 동안에 3회의 공전

운동하게 되며, 공전마다 4회의 기어 물림이 발생하여, 총 12회의 기어 물림이 반복된다. (28)식에 적용하여 계산한 결과를 Table 2의 우측에서 보여준다.

Table 2 Volumetric displacement for 1 revolution

volumetric displacement	
energy conservation and torque equilibrium method	maximum and minimum of chamber volume method
$1752.67 \text{ mm}^3/\text{rev}$	$1751.22 \text{ mm}^3/\text{rev}$

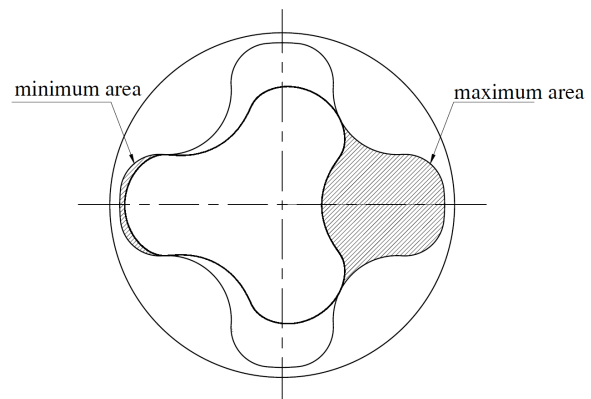


Fig. 8 Maximum and minimum areas of the chamber between two adjacent points

Table 2에서 에너지보존과 토크평형을 이용하여 산출 방법과 접촉점 사이의 최대·최소 용적을 이용한 산출 방법을 비교 한 결과에서 $1.45 \text{ mm}^3/\text{rev}$ 만큼 차이가 나타났는데 그 이유로는 CAD 프로그램 상에서 나타나는 오차라고 사료된다.

6. 결 론

본 연구의 주요 결론은 다음과 같이 요약된다.

1) 제로터 모터의 운동 형태로서 외부로터 고정 상태에서 내부로터가 공·자전 운동하는 경우에 대하여 모터에 공급되는 유압에너지와 모터 축의 기계적 에너지 사이의 에너지 보존·원리와 로터에 대한 토크평형을 이용한 개념으로 모터의 배제용적과 유량을 산출하는 방법을 제시하였다.

2) 유압에너지와 모터 축의 기계적 에너지 사이의 에너지 보존·원리와 로터에 대한 토크평형을 이용하여 배제용적을 산출하는 결과공식이 회전날개 길이법의 배제용적 결과공식과 동일함을 이론적으로 증명하였다.

3) 또 다른 검증 방법으로서 접촉점 사이의 챔버 용적의 최댓값과 최솟값을 이용하여 산출한 배제용적이 에너지보존원리와 로터에 대한 토크평형을 이용한 배제용적과 일치함을 확인하였다.

4) 에너지보존과 토크평형을 이용하여 유량과 배제용적을 산출하는 방법의 계산과정이 단순히 내·외부 로터의 접촉점의 좌표만을 이용하기 때문에 복잡한 형상의 내·외부로터사이 챔버용적을 구하는 방법보다 간단하다.

5) 에너지보존과 토크평형 이용법이 회전날개 길이법과 계산과정의 난이도가 유사하지만, 축의 구동 토크와 배제용적의 상관관계를 직접적으로 보여주기 때문에 토크사양이 주어진 유압모터의 설계에 이용이 효율적일 것이다.

후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문입니다.

References

- 1) J. R. Colbourne, "The geometry of trochoid envelopes and their application in rotary pumps", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 9, pp. 421-435, 1974.
- 2) Sung-Chul Lee and Sung-Nam Lee, "Design and Analysis of Gerotor for Hydraulic Motors", *Journal of The Korean Society of Tribologists & Lubrication Engineers*, Vol.11, No. 2, pp. 63-70, 1995.
- 3) Y. J. Chang, J. H. Kim, C. H. Jeon, Chul Kim and S. Y. Jung, "Development of an Integrated System for the Automated Design of a Gerotor Oil Pump", *J. Mech. Des.* 129, 1099, 2007.
- 4) J. S. Seo, H. S. Chung, H. M. Jeong, "A Study on Gerotor Design with Optimum Tip Clearance for Low Speed High Torque Gerotor Hydraulic Motor", *Journal of the Korea Society for Power System Engineering*, Vol. 10, No.4, pp.119-126, 2006.
- 5) J. H. kim, J. H. Park, S. Y. Jung, J. H. Son, C. Kim, "Optimal Design of Tooth Profile for High-Efficiency Gerotor Oil Pump", *Journal of the Korean Society of Precision Engineering*, Vol.22, No.5, pp.28-36, 2005.
- 6) J. H. Kim, C. Kim, C. H. Kim, "Optimum design on the lobe shapes of Gerotor Oil Pump", *Journal of the Korean Society of Precision Engineering*, Vol.23, No.4, pp.124-131, 2006.
- 7) C. B. Tsay and C. Y. Yu., "Mathematical Model for the Profile of Gerotor Pumps.," *J. CSME*, Vol.10, No.1, pp.41-47, 1989.
- 8) C. Y. Yu and C. B. Tsay, "Mathematical Model of Gerotor Pump Applicable to Its Characteristic Study," *J. CSME*, Vol.11, No.4, pp.385-391, 1990.
- 9) D. W. Dudley, "Handbook of Practical Gear Design", pp.1.33, McGraw-Hill, New York, 1984.
- 10) J. R. Colbourne, "Gear Shape and Theoretical Flow Rate in Internal Gear Pumps", *Transactions of Canadian Society for Mechanical Engineering*, Vol. 3 No. 4, pp.215-223, 1975.
- 11) Sung-Chul Lee, "Profile Design of the Inner Rotor of a Gerotor by the Composite Curve of Circular Arcs", *Journal of the Korean Society of Tribologists & Lubrication Engineers*, Vol. 22, No. 2, pp 79-86, 2006.
- 12) S. D. Kim, D. M. Kim, Y. B. Han, C. H. Han, "An Analysis on Volumetric Displacement of Gerotor Pump/Motor Using Vane Length", *Journal of the Korea fluid power systems society*, Vol.8, No2, pp 8-16, 2011.
- 13) S. D. Kim, D. M. Kim and Y. B. Ham, "An Analysis on Volumetric Displacement of Hydraulic Gerotor Pump/Motor using Energy and Torque Equilibrium -First Report: Case of Rotation of Inner and outer Rotors-", *Journal of the Korean Society of Fluid power and Construction Equipment*, Vol.10, No.2, pp 13-22, 2013.
- 14) Noah D Manring, Suresh B. Kasaragadda, "The Theoretical Flow Ripple of an External Gear Pump", *Transaction of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*,

- Vol. 125, pp. 396-404, 2003.
- 15) Daniel C. H. Yang, Jia Yan, Shih-Hsi Tong, "Flowrate Formulation of deviation Function Based Gerotor Pumps", Transaction of ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 32, 2010.
- 16) L Ivanovic, G Devedzic, N Miric and S Cukovic, "Analysis of forces and moments in gerotor pumps", Proc. IMechE Vol. 224 Part C: J. Mechanical Engineering Science, 2010.