

## 수학 교과에서의 추론 유형의 문제에 관한 탐색 -집합과 명제, 수열 영역을 중심으로-

항 혜 정 (조선대학교)

김 슬 비 (조선대학교 대학원)<sup>†</sup>

본 연구에서는 수학에서 추론의 중요성과 그 역할에 의미를 두고, 고등학교 수학 내용(문제)의 분석을 통해 학생들이 제공받는 추론의 유형이 얼마나 높은 수준, 즉 다양한 것인지에 대해 살펴보고자 한다. 현재, '수학 II' 교과목은 2009 개정에 따른 교과목들 중에서 '수학 I' 교과목을 이수한 후 선택하는 것(신이섭, 2011)으로, 중등 수학에서 가장 심도 있는 학습 내용을 다룬다고 볼 수 있다. 이러한 점에 감안하여 본 연구에서는 '수학 II' 교과목의 내용을 중심으로 Johnson, et al.(2010)의 여섯 가지 추론 유형을 재구성하여 이를 바탕으로 현행 9종의 모든 교과서에 수록된 추론 문제의 정도(비율) 및 유형을 파악하고자 한다. 이로써, 학생들에게 어느 정도의 추론 활동의 기회가 제공되고 있는지 살펴보고, 수학 수업에서의 추론 능력 신장의 긍정적 가능성을 가늠해 보고자 한다.

### I. 서론

추론이란 일상생활에서 발생하는 다양한 문제를 분석하며 발견된 규칙들을 통합하고 논리적인 근거를 토대로 일반화한 자신의 주장이나 의견을 자신뿐만 아니라 다른 사람도 설득시키는 모든 과정을 의미한다(이종희·김선희, 2002; 정현실·김진호, 2013). 특히, 수학적 추론은 수학적 문제의 해결 과정에서 발견된 사실을 통합, 분석하여 논리적으로 타당한 결론을 도출하는 수학적 사고 과정이라 볼 수 있다(이종희·김선희, 2002; 김선희·김기연, 2004; 도종훈, 2007; 강운수·김민주, 2013). 이러한 수학적 추론의 중요성은 현재 시행 중인 2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서도 수학적 창의성 개발 신장과 더불어 강조하고 있는데, 이는 수학적 창의성이 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석하고 통합하는 과정에서 발현된다고 보기 때문이다(신이섭 외, 2011). 이렇듯 수학적 추론은 수학을 교수하고 학습하는데 있어서 고려해야 할 중요한 요소이다.

이러한 수학적 추론의 유형은 다양하게 분류되고 있는데, 이종희·김선희(2002)는 수학적 추론의 유형을 크게 연역, 귀납, 유추, 시각적 추론으로 분류하였고, 논증적 추론에는 연역적 추론이 속하고 개연적 추론에는 귀납, 유추, 시각적 추론이 속한다고 보았다. 김선희·김기연(2004)는 추론의 유형을 연역, 귀납, 가추로 분류하였으며, 도종훈(2007)은 문제를 해결하는 과정에서 추론(정당화)하기는 탐구하기, 추측하기, 추측의 참·거짓 판별하기, 결론을 도출하기, 일반화하기 등을 제안하였다. 또, NCTM(2000)의 'Principle and Standards for School Mathematics'의 '추론과 증명' 기준에서 모든 학생들은 수학적 추측을 만들고 조사할 수 있어야 하고, 수학적 논증과 증명들을 개발하고 평가할 수 있어야 한다고 하였다. 그리고 NCTM(2009)에서 추론의 과정은 경험적 수준, 전형적 수준, 형식적 수준으로 분류하였으며, Johnson, et. al.(2010)은 연습문제에서 추론 문제의 특성(유형)을

1) 이 논문은 2014학년도 조선대학교 학술연구비의 지원을 받아 연구되었음.

\* 접수일(2014년 11월 10일), 심사(수정)일(2014년 11월 16일), 게재확정일자(2014년 11월 21일)

\* ZDM 분류 : U24

\* MSC2000 분류 : 97U20

\* 주제어 : 추론, 추론 유형, 집합과 명제, 수열

† 교신저자 : ksbs@hanmail.net

반례찾기(Finding a Counterexample), 추측하기(Making a Conjecture), 추측조사하기(Investigating a Conjecture), 논증개발하기(Developing an Argument), 논증평가하기(Evaluating an Argument), 실수정정하기(Correcting a Mistake)로 분류하였다.

지금까지 살펴본 바와 같이 학자들에 따라 추론의 유형 구분이 다양한데, 추론의 의미와 중요성을 엄밀성 정도로 보아 연역과 귀납으로 구분하는 유형보다는 각 유형 나름대로의 의미와 역할에 초점을 두고 이에 관해 탐색할 필요가 있겠다. 교육과정에 근거하여 개발된 교과서는 수업 시간에 교사와 학생이 공통적으로 사용하는 자료로 수업에서 무엇을 가르치고 배울 것인지 결정하는 중요한 역할을 한다. 교과서를 토대로 교사는 학생들이 좀 더 정교한 추론을 할 수 있도록 하는 교수 방법을 생각할 것이고, 학생들은 교사의 설명을 듣고 스스로 추론 문제를 해결하면서 일관성 있고 논리적인 추론을 할 수 있으므로 학생들의 추론 활동에 있어서 교과서의 역할이 중요할 것이다. 한편, NCTM(2009)에서는 2009년에 'Focus in High School Mathematics Reasoning and Sense Making'에서 고등학교의 추론은 경험적 수준, 전형식적 수준, 형식적 수준의 순으로 높아져야 함<sup>2)</sup>을 주장하며, 형식적 수준의 논증은 경험적 수준과 전형식적 수준의 논증에 비해 이전의 결과를 바탕으로 의미 있는 일련의 논리적 추론을 만드는 능력뿐 아니라 다른 사람이 만든 추론을 읽고 평가하는 능력 또한 포함되는 수준이 높은(즉, 다양한 유형의) 추론이라 하였다(김성경 역, 2013). 따라서 학생들이 높은 수준의 추론 기회를 제공받을 수 있는 고등학교 수학 교과서에서는 보다 다양한 유형의 추론에 관한 문제가 포함되어야 할 것이다.

또한, 초등학교 급을 대상으로 한 추론의 선행 연구는 비교적 많은 편에 비해(방정숙·전평국, 1997; 남승인, 1999; 이영주·전평국, 1999; 전평국·정재숙, 2002; 박경옥·박영희, 2003; 서동엽, 2003; 배혜정·남승인, 2005; 신준식 외, 2011; 최지영·방정숙, 2011; 이화영·장경윤, 2012; 정현실·김진호, 2013; 유상휘·송상현, 2013) 중등학교 급을 대상으로 한 연구는 많이 이뤄지지 않고 있다(이종희 외, 2003; 김선희·김기연, 2004; 강윤수·김민주, 2013).

이러한 취지하에, 본 연구에서는 수학에서 추론의 중요성과 그 역할에 의미를 두고, 고등학교 수학 내용(문제의 분석을 통해 학생들이 제공받는 추론의 유형이 얼마나 높은 수준, 즉 다양한 것인지에 대해 살펴보고자 한다. 현재, '수학 II' 교과목은 2009 개정에 따른 교과목들 중에서 '수학 I' 교과목을 이수한 후 선택하는 것(신이섭, 2011)으로, 중등 수학에서 가장 심도 있는 학습 내용을 다룬다고 볼 수 있다. 이러한 점에 감안하여 본 연구에서는 '수학 II' 교과목의 내용을 중심으로 Johnson, et al.(2010)의 여섯 가지 추론 유형을 재구성하여 이를 바탕으로 현행 9종의 모든 교과서에 수록된 추론 문제의 정도(비율) 및 유형을 파악하고자 한다. 이로써, 학생들에게 어느 정도의 추론 활동의 기회가 제공되고 있는지 살펴보고, 수학 수업에서의 추론 능력 신장의 긍정적 가능성을 가늠해 보고자 한다.

## II. 추론의 의미와 유형에 관한 이해

### 1. 추론의 의미 및 유형

수학적 추론은 크게 수학적 사고력으로 보는 관점과 문제해결 과정에서의 추론으로 보는 관점으로 나뉜다. 우선, 수학적 사고력으로서의 추론의 의미를 살펴보면, 방정숙·전평국(1997)은 수학적 추론은 획득된 지식을 연결하고 재구성하여 체계적이며 논리적으로 타당한 결론을 이끌어 내는 능력이라 보며, 일상생활에서 접하는 여러 가지 문제를 수학적으로 이해하고 이를 해결할 수 있는 수학적 사고력과 연결 지어 그 중요성을 설명하였다.

2) 이때, 수준이 높다는 것은 다양한 추론 유형을 번갈아가며 사용하고, 직관적인 추론이 아닌 논리적인 추론을 할 수 있는 것을 의미하고, 형식적 수준의 추론을 한다는 것은 논리적 추론을 하는 것뿐 아니라 다른 사람의 추론을 평가하는 능력을 모두 포함함.

또, 이병수·강미광·양규한(1997)와 남승인(1999)은 수학적 추론을 여러 가지 아이디어와 그 아이디어들이 어떻게 관련되어 있는가에 대한 타당한 결론을 이끌어내는 수학적 사고의 한 부분으로 보았다. 김선희·김기연(2004)은 수학적 추론을 학생들이 가정에서 출발하여 결론에 이르기까지의 논리적인 사고라고 말하고 있으며, 우정호(2007)는 이미 알고 있는 판단으로부터 새로운 판단을 이끌어 내는 사유 작용이라 정의하였다(이성근·류희수, 2012, 재인용). 반면에 문제해결 과정에서의 추론을 살펴보면, 도종훈(2007)은 수학적 추론을 추측을 통해 제기된 문제의 진위를 판별하거나 답을 구하는 문제를 해결해 나가는 과정으로 간주하고 있으며, 정현실·김진호(2013)는 수학적 추론은 문제를 해결하는 과정에서의 고차적 사고활동으로 문제의 탐구는 추측으로부터 비롯되고, 추측은 반례로부터 검증될 수 있고, 수학적 진실은 논리적 증명을 통해 확립된다고 본다. 또, 강윤수·김민주(2013)는 수학적 추론이란 문제해결 과정에서 어떤 주장을 이끌어 내거나 결론을 도출하기 위한 사고 과정이라 정의한다.

이러한 수학적 추론의 유형은 크게 연역적 추론과 귀납적 추론으로 나뉘고 있다. 이때 연역적 추론이란 정의, 공리, 정리들을 이용하여 논리적으로 결론을 이끌어내는 엄밀한 증명을 말하고, 귀납적 추론이란 부분적이거나 특수한 사실로부터 전체적이고 보편적인 사실 또는 일반적인 법칙을 이끌어내는 추론 방법을 일컫는다(이병수·강미광·양규한, 1997; 남승인, 1999; 서동엽, 2003; 박경옥·박영희, 2003; 김선희·김기연, 2004; 이종희·김선희, 2002; 이성근·류희수, 2012). 이병수·강미광·양규한(1997)은 이러한 연역과 귀납의 분류만으로는 수업 상황에서 야기되는 학생들의 추론 유형을 모두 포함할 수는 없다는 입장 하에 변환적 추론을 추가하였다. 이때 변환적 추론이란 작용하는 방법의 이해에 관한 감각으로서 대상의 구조에 대하여 통찰하는 것으로 귀납적 추론 및 연역적 추론 둘 다에 중첩되고, 증명을 의미하는 것은 아니다. 마찬가지로, 남승인(1999)은 유비적 추론(유추)을 추가하였는데, 유비적 추론은 두 대상 사이의 몇 개의 유사성에 착안하여 한 쪽 대상에서 성립하는 성질과 유사한 성질이 다른 쪽의 대상에서도 성립한다고 보는 추론 방법으로 유용하고 가치 있는 추론이지만 증명을 대신하지 못한다고 하였다. 또한, 김선희·김기연(2004)은 귀납과 연역 추론에 가추법을 추가하고, 가추법을 결과와 규칙으로부터 사례에 대한 짐작을 하게 하는 추론으로 연역이나 귀납과는 다르게 새로운 사실을 얻을 수 있는 창조적인 특징을 갖고 있다고 하였다. 반면에 이종희·김선희(2002)는 추론을 논증적 추론과 개연적 추론으로 나누었는데, 여기서 논증적 추론은 연역적 추론을 뜻하며, 개연적 추론에 귀납적 추론, 유추적 추론, 시각적 추론을 포함시키고 시각적 추론을 스스로 수학적 개념 형성이나 문제 해결에서 시각적 정보에 근거하여 추론하는 것으로 명명하였다.

한편, NCTM(2000)의 'Principle and Standards for School Mathematics'에서 10가지 기준 중에 '추론과 증명 기준'에서는 모든 학생들은 수학적 추측을 만들고 조사할 수 있어야 하며, 수학적 논증과 증명을 개발하고 평가할 수 있어야 한다고 말하고 있다. 패턴을 찾는 활동은 학생들에게 추측을 할 수 있는 기회를 제공하며, 자신이 발견한 패턴과 다른 친구들의 패턴을 평가하는 활동을 통해 추측의 참·거짓을 확인해야 할 필요성을 느낄 수 있을 것이다. 또한, 특정한 예들을 이용하여 참임을 확인하면서 증명을 할 수 있고, 다른 학생의 논증을 평가하는 활동을 통해 수학적 추론을 학습할 수 있을 것이라 보았다. 그리고 NCTM(2009)은 추론의 과정은 경험적 수준, 전형식적 수준, 형식적 수준으로 분류하였는데, 경험적 수준이란 추측을 생성하는 데 경험적 증거를 사용하는 추론 과정이고, 전형식적 수준은 증명을 하는데 있어서 직관적인 설명을 사용하거나 부분적인 논증을 할 수 있는 것을 말하며, 형식적 수준은 증명을 하는 과정에서 논리에 기초하여 형식적인 논증을 할 수 있는 수준이라 말하였다(김성경 역, 2013). 또, Johnson. et. al.(2010)은 대수1, 대수2. 미적분 교과서 본문의 서술에서 추론의 유형을 정당화가 이뤄지지 않는 추론, 특정한 경우나 일반적인 경우에서 정당화가 이뤄지는 추론으로 분류하였고, 연습 문제에서의 추론의 유형을 반례찾기(Finding a Counterexample), 추측하기(Making a Conjecture), 추측조사하기(Investigating a conjecture), 논증개발하기(Developing an Argument), 논증평가하기(Evaluating an Argument), 실수정정하기(Correcting a Mistake)<sup>3)</sup>로 분류하였다. Thomson. et. al.(2012)은 Johnson, et. al.(2010)의 여섯 가

지 유형의 의미를 설명하고 그에 따른 분석틀을 마련하였는데, 반례찾기란 주어진 문장의 반례를 찾거나 주어진 문장이 거짓임을 증명하기 위한 수단으로 반례를 찾는 것이고, 추측하기란 추측을 일반화하기 위한 규칙을 사용하는 것, 추측조사하기란 명시된 추측이나 주장의 참·거짓을 판별하는 것, 논증개발하기란 문장의 증명을 쓰는 것, 논증평가하기란 교과서에 주어진 논증이 유효한지를 평가하는 것, 실수정정하기란 잘못된 문제의 해결책이나 타당하지 않는 논증의 오류를 찾거나 고치는 것을 의미한다.

이런 추론의 특성에 관한 몇몇 실험 연구를 살펴보면, 이종희·김선희(2002)의 연구에서는 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 교사들의 이해도, 교수학습 방법 등을 조사하였다. 그 결과, 교사들은 연역, 귀납, 유추, 시각적 추론에 대하여 보통 이상으로 이해하고 있었고, 추론을 지도하기에 적합한 학습 지도 방법은 학생중심의 개별학습이며, 학생들의 연역적 추론 능력은 논리의 전개 활동을 통해 기를 수 있고, 개연적 추론능력은 문제해결을 통해 향상시킬 수 있을 것이라 답하였다. 결론적으로, 교사들은 수학적 추론이 중요성과 필요성을 느끼고 있으나 실제 학교 현장에서 적용할 수 있는 평가방법이 부족하므로 실제 학교 현장에서 적용 가능한 수학적 추론의 교수학습 방법, 평가방법을 개발해야 함을 시사하고 있다. 그리고 김선희·김기연(2004)는 수학적 모델링 과정에서 학생들이 경험하고 사용하는 추론의 유형을 확인하였는데, 신체비율에 따라 키를 추정하는 1차 모델링과 2차 모델링 과정을 통하여 나타난 추론의 유형은 다음과 같다. 학생들은 수학적 모델을 생성하는 과정에서 덜 규범화된 가추를 사용하였고, 생성한 모델이 옳은 것인지 검증하는 과정에서 귀납을 주로 사용하였다. 또, 수학적으로 식을 세우고 계산을 할 때와 잘못된 가설을 수정할 때에는 연역 추론을 사용하였고, 새로운 규칙을 만들어 근거로 사용할 때에는 창조적 가추를 사용하였다. 이 창조적 가추에 대한 현실성을 확인하기 위해 메타-가추를 사용하였고, 모델을 수정하여 2차 모델링을 할 때에 자신의 신체를 근거로 유추(규범화된 가추)를 사용하였다. 학생들은 수학적 모델링 과정에서 연역, 귀납을 사용하고 가추의 네 가지 유형도 모두 사용하므로 이 결과를 통해 수학적 추론 능력을 기르기 위한 한 방법으로 수학적 모델링을 제안하였다. 또, 최지영·방정숙(2011)은 초등학교에서 곱셈의 결합법칙 탐구를 강조한 수업을 통해 학생들의 대수적 추론을 보고자 하였으며, 이때 대수적 추론이란 대수 교수·학습 과정에서 수와 연산의 성질을 인식하고 발견하며 일반화하는 사고과정이라 정의하였다. 교사는 수업 상황에서 발문을 제시하고, 시각적 예를 제시하여 학생들이 곱셈의 결합법칙을 보다 쉽게 이해할 수 있도록 하였다. 학생들은 자신의 방법을 설명하면서 서로 다른 계산법에 대한 방법을 평가하는 과정을 통해 직관적으로 곱셈의 결합법칙이 성립함을 이해하였고, 문자( $\triangle$ ,  $\star$ ,  $\heartsuit$ )를 사용하여 특정한 경우에서와 같이 곱셈의 결합법칙을 일반화할 수 있었다. 이러한 연구를 통하여 초등학교에서 학생들의 대수적 추론 능력을 신장시킬 수 있는 교수학습 방법에 대한 시사점을 제공한다.

추론 활동에서 나타나는 추론의 특성을 살펴보는 연구와는 달리, Johnson. et al(2010)은 여섯 가지 추론의 유형을 개발한 후 간략하게 교과서(대수1, 대수2, 미적분)의 연습문제에서 추론의 유형의 비율을 조사하였다. 그 결과, 대수1에서 추론의 문제는 전체문제의 3.4%를 차지하고, 추측하기 유형의 문제는 0.4%, 추측조사하기 유형의 문제는 1.1%, 논증개발하기 유형의 문제는 1.3%, 논증평가하기 유형의 문제는 0.04%, 반례찾기와 실수정정하기 유형의 문제를 Other로 통합하여 구한 결과 0.6%를 차지하였다. 마찬가지로 대수2의 추론 문제는 5.4%, 추측하기는 0.8%, 추측조사하기 2.0%, 논증개발하기 1.9%, 논증평가하기 0.05%, Other은 0.6%를 차지하고, 미적분의 추론 문제는 7.7%, 추측하기 1.0%, 추측조사하기 1.8%, 논증개발하기 4.3%, 논증평가하기 0.1%, Other은 0.5%를 차지하였다. 이러한 연구를 토대로, Thomson. et al.(2012)은 앞서 Johnson. et al.(2010)이 분류한 6개의 추론 유형에 대한 분석틀을 마련하였으며, 20종의 고등학교 수학 교과서에 제시된 지수, 로그, 다항식에 관한 본문 내용 및 연습문제들을 분석하였다. 그 결과, 3개의 주제에 대한 본문 내용에서 정당화는 전체의 50.7%(일반적인 논증

3) 연습문제에서의 여섯 가지 추론의 유형에 대한 설명은 II장 2절에서 제시되어 있음.

의 정당화 30.8%, 특정한 경우의 정당화 22.4%)를 차지하고, 11.2%는 학생들에게 정당화하는 여지를 남겨두었고, 39.4%는 정당화 과정을 생략하였다. 본문 내용에서 정당화가 약 50% 정도 차지하는 것에 반해, 연습문제에서 추론 문제는 전체의 6% 이내를 차지하는데, 그 중 거의 대부분은 논증개발하기와 추측조사하기 유형의 문제이다. 연습문제에서 추론 유형 문제의 비율을 보면, 교과서 시리즈별 추론 유형 문제의 비율은 모든 문제에 대하여 추측하기 또는 추측조사하기 유형의 문제는 2.5%를 차지하고, 논증개발하기 또는 논증평가하기 유형의 문제는 2.4%, 반례찾기 또는 실수정정하기는 0.6%를 차지하였다. 결과적으로, 학생들은 연습문제를 통한 추론의 기회를 많이 제공받지 못할 것이라 예상되므로 학생들이 추론 활동을 많이 할 수 있도록 교육과정 개발자와 교사의 역할이 무엇보다 중요하다고 할 수 있겠다.

### 2. Johnson, et al.(2010)의 여섯 가지 추론 유형

본 연구에서 선정한 4개의 추론 유형은 Johnson, et al.(2010)의 여섯 가지 추론 유형을 재구성한 것으로, 이 여섯 가지 유형에 관해 간략히 제시하면 다음과 같으며, 각각에 대한 구체적인 예는 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> 추론 유형별 문제의 예 (Johnson, et al., 2010)

추론 유형	설명	문제의 예	문제 설명
반례찾기 (Finding a Counter-example)	반례를 찾는 것은 증명을 하는 것보다 쉽기 때문에 추론 과정에서 의미 있는 기초 단계가 될 수 있음. 또한 반례는 문장이 거짓임을 증명할 수 있고, 문장이 성립하는 예만으로 참임을 보일 수 없음을 깨닫게 될 것이므로 반례를 찾는 활동은 추후에 추측을 하거나 추측을 조사하는 과정에서 필요한 요소임.	$(x + y)^2 = x^2 + y^2$ 이 거짓임을 보이는 반례를 찾아라.	주어진 문장이 거짓임 명시하고, 이를 보이기 위한 반례를 찾는 문제로 반례찾기 문제로 볼 수 있음.
추측조사하기 (Investigating a Conjecture)	학생들은 처음에는 추측이 참인지 거짓인지 쉽게 판별하기 힘들기 때문에 반례를 찾음으로써 주어진 문장이 어떤 경우에 대하여 성립하지 않는지 또는 일반적인 경우에 대하여 성립하는지를 생각할 수 있음. 만약, 주어진 문장의 반례를 찾으면 거짓임을 보이게 되며, 참인 몇몇의 예들을 찾으면 추측이 항상 참임을 보이는 형식적인 증명을 해야 함.	비판적으로 생각하여라. ‘모든 실수 $a$ 에 대하여, $(-a)^2 = -a^2$ 이다.’이 참인지 거짓인지 결정하여라. 만약 참이라면, 추론을 설명하고, 만약 거짓이라면, 반례를 찾아라.	주어진 문장이 참인지 거짓인지 결정하고, 만약 참이면 이유를 설명하고, 거짓이면 반례를 찾으라는 문제로 ‘추측’이라는 단어가 명시되어 있지 않아도 추측조사하기 문제로 볼 수 있음.
추측하기 (Making a Conjecture)	추측을 생성하는 과정에서 규칙을 발견, 통합하고 일반화하는 과정은 후에 일반적인 수학적 논증을 개발하는 데 사용될 수 있는 방법으로 추론 과정에서 중요한 요소 중 하나임.	$i, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, \dots$ 는 흥미로운 주기성을 가지고 있다. $i^2 = -1$ 임을 이용하여, $i$ 의 거듭제곱을 간단한 형태로 다시 쓰고, $i^{100}$ 또는 $i^{523}$ 과 같은 거듭제곱들을 빠르게 다시 쓸 수 있도록 하는 패턴을 찾아라.	패턴을 사용하여 일반적인 경우에 대해 추측할 수 있도록 하는 문제로 ‘추측을 하여라’라는 용어가 명시되어 있지 않아도 추측하기 문제로 볼 수 있음.

<p>논증개발하기 (Developing an Argument)</p>	<p>학생들은 다른 추론 활동을 통해 논리적 논증을 할 수 있음. 이 유형의 문제에는 주로 '설득력 있는 논증을 써라'(write a convincing argument), '증명하라'(prove), '설명하라'(explain, explain why), '보여라'(show, show that)와 같은 표현이 수반됨.</p>	<p>다음 다항식의 따라오는 법칙을 증명하기 위하여 대수적 추론을 사용하라. 모든 <math>a, b, c, d</math> 그리고 <math>x</math>에 대하여, <math>(ax + b) + (cx + d) = (a + c)x + (b + d)</math>이다.</p>	<p>증명을 하기 위해 대수적 추론 성질을 사용하도록 하는 문제로 논증개발하기 문제로 볼 수 있음.</p>
<p>논증평가하기 (Evaluating an Argument)</p>	<p>다른 사람들의 논증을 읽고 평가하는 토론을 통해 얻는 통찰력은 스스로 완벽하고 일관된 논증을 작성하고 개발하는 데 도움이 됨. 이때, 논증이 증명과 풀이도 포함함.</p>	<p>대수 수업은 한 질문에 이러한 문제가 있다 : "<math>x = 3</math>일 때, <math>2x^2</math>의 값을 찾아라." 두 학생이 다른 추론을 했다. 학생1: <math>2 \times 3 = 6</math>이고, <math>6^2 = 36</math>입니다. 학생2: <math>3^2 = 9</math>이고, <math>2 \times 9 = 18</math>입니다. 누가 옳은가? 그 이유는?</p>	<p>학생1, 2의 답 중 옳은 것은 무엇인지 찾고 그 이유에 대해 설명하는 문제로 논증평가하기 문제로 볼 수 있음.</p>
<p>실수정정하기 (Correcting a Mistake)</p>	<p>문제에 제시된 오류는 학생들이 문제를 해결하거나 논증을 할 때 자주하는 전형적인 오류로 이런 오류를 찾고 수정하는 활동을 통해 쉽게 논증을 개발하고 평가할 수 있는 능력을 기를 수 있음.</p>	<p><math>5 &lt; 2</math>임을 증명한 과정에서 오류를 찾아라. 증명 :</p> $\frac{1}{32} < \frac{1}{4}$ $\log \frac{1}{32} < \log \frac{1}{4}$ $\log \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^5 \right] < \log \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right]$ $5 \log \left( \frac{1}{2} \right) < 2 \log \left( \frac{1}{2} \right)$ $5 < 2$	<p>잘못된 증명 과정이 제시되어 있고, 이 과정에서 증명의 오류를 찾는 문제로 실수정정하기 문제로 볼 수 있음.</p>

### III. 연구 방법

#### 1. 분석 대상 및 문제, 단원 선정

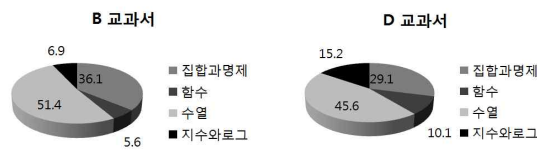
본 연구에서는 서론에서 밝힌 바와 같이, 현행 교육과정에서 위계적으로(상대적으로) 가장 높은 학습 단계의 내용을 다루고자 2009 개정 '수학 II' 교과서를 대상으로, 이에 수록되어 있는 추론 문제 및 유형의 비율에 관하여 분석하였다.

현재 고등학교에서 사용하고 있는 총 9종의 '수학 II' 교과서(임의로 A, B, ..., I교과서로 칭함)를 모두 분석 대상으로 삼았으나, 교과서별 내용 전개 방식이 다양하고 문제마다 그 명칭이 다르기 때문에 전개 방식 분석을 위한 틀을 마련하였다. 즉, 내용 전개 방식을 단원도입/준비학습→생각열기→보기/예제→문제→확인학습→수학적 과정→수학이야기→중단원 연습문제→대단원 연습문제로 간주하였다. 본 연구에서는 학생들이 스스로 문제를 해결하여 추론의 기회를 얻을 수 있는 문제들에 초점을 두어 분석하기 위해 단원도입/준비학습, 생각열기, 보기/예제<sup>4)</sup>, 수학이야기는 제외하였고, 교과서 본문에 있는 문제, 확인학습 문제, 수학적 과정에 관한 문제, 중단원 연습 문제 그리고 대단원 연습 문제를 대상으로 삼았다.

한편 '수학 II' 교과서는 크게 집합과 명제, 함수, 수열, 지수와 로그 대단원으로 구성되어 있는데, 이 중 분석

4) 보기/예제는 수학 문제이긴 하지만, 주로 풀이가 교과서에 제시되어 있고 교사가 수업 시간에 설명을 해 주는 부분으로 간주하여 제외시킴.

단원을 선정하기 위하여, 각 교과서마다 추론 문제(즉, 문제, 확인학습 문제, 수학적 과정에 관한 문제, 중단원 연습문제, 대단원 연습문제에서의 추론 관련 문제)의 총 개수에 대한 대단원별 총 추론 문제의 비율을 구하였다. 그 결과, 9종의 교과서에서 B교과서가 집합과 명제 대단원과 수열 대단원의 추론 문제의 비율의 합이 가장 높았으며(87.5%), D교과서가 상대적으로 그 비율이 가장 낮았다(74.7%). <그림 III-1 참조> 이와 같이, 전반적으로 9종 교과서 모두 집합과 명제 단원과 수열 단원에 비해 함수 단원과 지수와 로그 단원에 추론 문제가 많이 수록되지 않은 것을 알 수 있었다. 따라서 함수 단원과 지수와 로그 단원의 문제들은 다른 두 단원에 비해 상대적으로 추론 문제의 다양한 유형을 분석하고 학생들에게 추론의 기회를 제공할 수 있는지의 여부를 가늠하는데 적합하지 않다고 판단하여 집합과 명제 단원 그리고 수열 단원만을 선정하여 분석하였다.



<그림 III-1> 교과서의 대단원별 추론 문제

한마디로, 본 연구에서는 총 9종의 2009 개정 ‘수학 II’ 교과서에서 집합과 명제, 수열 대단원을 대상으로 본문에 있는 문제, 확인학습 문제, 수학적 과정에 관한 문제, 중단원 연습문제, 대단원 연습문제에서의 추론 문제 및 추론 유형의 문제를 분석하였다.

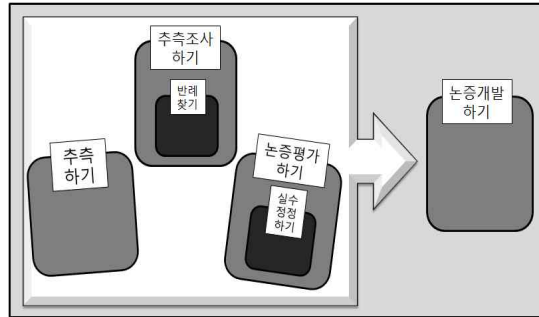
2. 추론 유형 재구성

이 연구에서는 Johnson, et al.(2010)와 Thomson, et al.(2012)의 여섯 가지 추론 유형을 재구성하여, 추론의 유형을 ‘추측하기’(MC), ‘추측조사하기’(IC), ‘논증개발하기’(DA), ‘논증평가하기’(EA)의 총 네 가지로 구분하였다. 이러한 재구성의 근거는 다음 <표 III-1>의 비교란에 제시되어 있는 바와 같으며, 이 네 가지 추론 과정의 절차를 도식화 하면 <그림 III-2>와 같다.

<표 III-1> 추론 유형 재구성

	Johnson, et al.(2010) & Thomson, et al.(2012) <sup>5)</sup>		본 연구의 추론 유형	비고(재구성 근거)
추측하기 (MG/MS) 6)	추측을 생성(일반화)하기 위한 패턴을 사용함.	⇒	추측하기 (MC)	규칙을 사용하여 추측을 생성함(일반화).
추측조사하기 (IG/IS)	추측이나 주장이 명시되어 있고, 그것이 참인지 거짓인지 확인하는데 이론적인 근거를 고려해야 함.	⇒	추측조사하기 (IC)	추측이나 주장이 명시되어 있고, 그것이 참인지 거짓인지 확인함. 문장이 거짓임을 보일 때 반례를 찾는 것은 하나의 방법임.
반례찾기 (CX)	주어진 문장에 대한 반례를 찾거나 문장이 거짓임을 증			

	명하기 위한 반례를 찾음.				
논증개발하기 (DG/DS)	일반적인 경우나 특정한 경우에 대해 문장의 증명을 작성함.	⇒	논증개발하기 (DA)	일반적인 경우나 특정한 경우에 대해 문장이 성립함을 보임.	추론 활동을 통한 궁극적인 목적은 논리적인 증명을 하는 것으로 판단함.
논증평가하기 (EG/ES)	인급된 논증이 유효한지 여부를 확인함.	⇒	논증평가하기 (EA)	교과서에 인급된 논증이 유효한지 여부를 확인하고, 만약 잘 못된 부분이 있으면 수정함.	주어진 논증이 옳은지 아닌지를 결정하고, 오류가 있으면 수정하는 것은 당연히 수반되어야 하므로 실수정정하기는 논증 평가하기에 포함되는 내용임.
실수정정하기 (CG/CS)	문제 또는 잘못된 논증의 잘못된 해결(과정)이 제시되어 있을 때, 추론의 오류가 무엇인지 결정하거나 그것을 수정함.				



<그림 III-2> 추론 유형의 관계

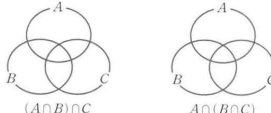
한편, 재구성한 네 가지 추론 유형에 따른 현행 ‘수학 II’ 교과서의 집합과 명제, 수열 대단원에서 추론 유형의 문제의 예는 다음과 같으며, 이러한 해당 유형 문제의 근거는 비교란에 제시된 바와 같다 <표 III-2 참조>.

<표 III-2> ‘수학 II’ 교과서(집합과 명제, 수열 대단원)에서 추론 유형 문제기

	문제의 예	비고 (해당 유형 근거)
추측하기(MC)	<p>오른쪽 그림과 같은 자연수 전체의 집합 <math>N</math>에서 실수 전체의 집합 <math>R</math>로의 함수 <math>f</math>에 대하여</p> $f(1), f(2), f(3), f(4), \dots$ <p>를 수열 <math>\{a_n\}</math>이라고 할 때, 이 수열의 규칙을 말하고 일반항 <math>a_n</math>을 구하여라.</p>	<p>특정한 경우에서 규칙을 찾아 일반적인 경우에 대해 추측할 수 있도록 하는 문제로 추측하기 문제임.</p>
추측조사하기(IC)		<p>명제의 참, 거짓을 판별하고 거짓인 명제는 반례를 찾는 문제로 추측조사하기 문제임.</p>

- Johnson, et. al.(2010)은 연습문제에서 나타나는 추론의 유형을 반례찾기, 추측조사하기, 추측하기, 논증개발하기, 논증평가하기, 추론실수정정하기로 총 여섯 가지로 구분하였으며, Thomson, et. al.(2012)은 Johnson, et. al.(2010)의 여섯 가지 추론 유형을 토대로 교과서 연습문제의 분석을 위하여 분석틀을 마련하였음.
- 여기서, MG/MS는 특정한 경우(specific case)나 일반적인 경우(general case)에서의 추측하기(Make Conjectures)를 뜻함.



	<p>다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라. 또 거짓인 것은 반례를 들어라.</p> <p>(1) 모든 소수는 홀수이다.</p> <p>(2) 전체집합 <math>U = \{1, 2, 5, 10\}</math>에 대하여 어떤 <math>x</math>는 짝수이다.</p>	
<p>논증개발하기(DA)</p>	<p>집합 <math>A, B, C</math>에 대하여 다음이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 확인하여라.</p> $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  <p style="text-align: center;">(A ∩ B) ∩ C                      A ∩ (B ∩ C)</p>	<p>주어진 문장이 성립함을 보이기 위하여 벤 다이어그램을 이용하도록 하는 문제로 논증개발하기 문제임.</p>
<p>논증평가하기(EA)</p>	<p>다음은 수열 <math>\{a_n\}</math>의 첫째항부터 제 <math>n</math>항까지의 합 <math>S_n</math>이 <math>S_n = n^2 + 3n + 1</math>일 때, <math>a_1 + a_{10}</math>의 값을 구한 과정이다. 잘못된 부분을 찾아 바르게 고쳐라.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">a_n = S_n - S_{n-1}</math> <math display="block">= (n^2 + 3n + 1) - ((n-1)^2 + 3(n-1) + 1)</math> <math display="block">= 2n + 2</math> <p>따라서 <math>a_1 = 4, a_{10} = 22</math>이므로 <math>a_1 + a_{10} = 26</math></p> </div>	<p>잘못된 풀이를 제시하고 오류를 찾아 수정하도록 하는 문제로 논증평가하기 문제임.</p>

### 3. 추론 유형에 따른 교과서 분석틀

본 연구에서 분석 대상으로 선정한 모든 문제, 즉 문제, 확인학습 문제, 수학적 과정에 관한 문제, 중단원 연습문제, 대단원 연습문제에서의 추론 유형을 분석하였다. 다만, 만약 특정 문제에 하위 문제들이 있다면 이를 각각의 문제로 구분하지 않고 하나의 문제로 간주하였다. <표 III-2 참조> 또, 본 연구에서는 교과서별, 추론 유형별로 분석함에 있어서 연구 결과를 보다 간결하면서도 명료히 드러내고자 문제들을 크게 ‘일반문제’와 ‘평가문제’의 두 부문으로 구분하였다. 여기서, ‘일반문제’는 수업시간에 교사의 설명을 듣고 학생들이 연습할 수 있는 문제, 확인학습 문제, 수학적 과정 문제를 포함하고, ‘평가문제’는 수업을 듣고 후에 학생 스스로 연습할 수 있는 중단원 연습문제와 대단원 연습문제를 포함하였다. 결과적으로, 본 연구에서의 분석 내용은 다음과 같이 크게 세 가지로 구분하여 제시하고자 하였다.

첫째, 각 교과서의 중단원별 모든 ‘일반문제’와 ‘평가문제’ 중 각각 추론에 해당하는 문제가 차지하는 비중을 살펴보고자 하였다. 이를 위한 분석틀은 <표 III-3>과 같다. 8)

둘째, 각 교과서의 대단원별 모든 추론 문제들은 추론 유형별로 어떻게 분포되어 있는지를 살펴보고자 하였다. 이를 위하여 9종 교과서(즉, 집합과 명제, 수열의 두 단위) 각각에 수록된 모든 추론 문제들에서 본 연구에서 설정한 네 가지 추론 유형(즉, 추측하기, 추측조사하기, 논증개발하기, 논증평가하기)은 각각 어떤 비중을 차지하고 있는지를 조사하였다. 이를 위한 분석틀은 <표 III-4>와 같다.

셋째, 위에서는 각 교과서(대단원)별로 추론 유형 문제의 비중을 살펴보았는데, 여기서는 이를 좀 더 세분화

7) 이 표에 제시된 문제의 예는 추론 유형에 관한 예를 보여주기 위한 것이므로, 교과서 명칭이 필요하다고 사료되지 않아 밝히지 않았음.

8) 여기서, 중단원별로 살펴본 것은 교과서마다 대단원별로 중단원의 구분이 달라 각 중단원마다 내용의 양이 동일하지 않아서이다. 가령 교육과정의 ‘집합과 명제’ 대영역에서 ‘집합’에 관한 성취기준은 3개이며, 명제에 관한 성취기준은 5개이므로, 집합 중영역(중단원)보다는 명제 중영역(중단원)에 추론 문제가 더 많을 것이라 판단되어 중단원을 중심으로 살펴본 것이다. 한 마디로, 본 연구에서 추론 유형의 문제의 분포에 더 초점을 두었으므로 추론 문제의 분포는 중단원별로만 살펴보았음.

하여, 추론 유형에 따라 각 교과서(중단원)별 ‘일반문제’와 ‘평가문제’가 각각 어느 정도의 비중을 차지하고 있는지를 살펴보고자 하였다. 바꾸어 말하면, 네 가지 추론 유형(추측하기, 추측조사하기, 논증개발하기, 또는 논증평가하기) 각각을 대상으로, 각 교과서(중단원)에 ‘일반문제’와 ‘평가문제’가 각각 어떠한 비중으로 분포되어 있는지 조사하였다. <표 III-5 참조>

<표 III-3> 교과서 중단원에 수록된 추론 문제

교과서 중단원별 일반/평가문제		A	B	C	D	E	F	G	H	I
		(추론 문제 개수) / (모든 문제 개수) (%)								
①	일반문제									
②	일반문제									
⋮	일반문제									
①, ②, ...	평가문제									

<표 III-4> 교과서 대단원에 수록된 추론 유형별 문제

교과서	대단원명				(해당 대단원의 총 추론 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)
	추측하기(MC)	추측조사하기(IC)	논증개발하기(DA)	논증평가하기(EA)	
(추론 유형 문제 개수) / (해당 대단원의 총 추론 문제 개수) (%)					
A					
B					
⋮					
I					

<표 III-5> 추론 유형별 교과서에 수록된 ‘일반문제’와 ‘평가문제’

추론 유형(추측하기, 추측조사하기, 논증개발하기, 또는 논증평가하기)										
교과서 중단원별 일반/평가문제		A	B	C	D	E	F	G	H	I
		(추론 유형 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
①	일반문제									
②	일반문제									
⋮	일반문제									
①, ②, ...	평가문제									

#### IV. 연구 결과

본 연구에서는 앞서 언급한 바와 같이, 첫 절에서는 우선 각 교과서의 중단원별 모든 ‘일반문제’와 ‘평가문제’ 중 추론 문제가 차지하는 비중을 살펴보았으며, 두 번째 절에서는 각 교과서의 대단원별 모든 추론 문제들은 추론 유형별로 어떻게 분포되어 있는지를 살펴보고, 이를 좀 더 세분화하여 세 번째 절에서 추론 유형에 따라 각 교과서(중단원)별 ‘일반문제’와 ‘평가문제’가 각각 어느 정도의 비중을 차지하고 있는지를 살펴보았다.

##### 1. 교과서 중단원별 추론 문제

###### 가. 집합과 명제

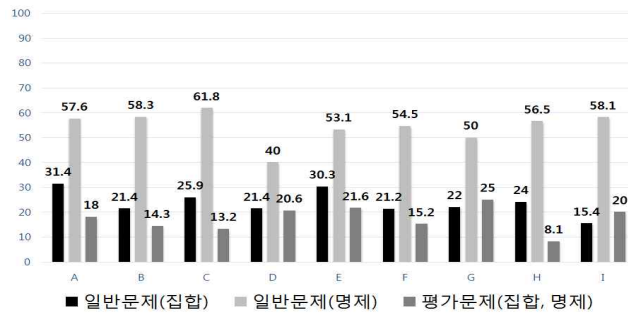
집합 중단원에 수록된 모든 ‘일반문제’ 중에서 추론 문제에 해당하는 정도를 살펴보면, 다음 <표 IV-1>에 제

시된 바와 같이, A교과서의 경우 총 35개의 ‘일반문제’ 중에 11개가 추론 문제(31.4%)에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-1>에 제시된 바와 같다. 또, 명제 중단원의 경우, A교과서의 모든 ‘일반문제’에서 추론 문제가 차지하는 비율은 57.6%이고, 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-1>에 제시된 바와 같다. 한편, 집합과 명제 대단원에 수록된 모든 ‘평가문제’ 중에서 추론 문제에 해당하는 정도를 살펴본 결과, A교과서의 경우 총 50개의 ‘평가문제’ 중에서 9개가 추론 문제(18.0%)에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로, 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-1>에 제시된 바와 같다.

결과적으로, 집합 중단원에 수록된 모든 ‘일반문제’ 중 추론 문제가 가장 많이 수록된 것은 A교과서(31.4%), 가장 적은 추론 문제가 수록된 것은 I교과서(15.4%)이다. 또, 명제 중단원에 수록된 ‘일반문제’ 중 추론 문제가 가장 많이 수록된 경우는 C교과서(61.8%), 가장 적은 추론 문제가 수록된 것은 D교과서(40%)이다. 한편, 집합과 명제 대단원에 수록된 모든 ‘평가문제’ 중 추론 문제가 가장 많이 수록된 것은 G교과서(25.0%), 가장 적은 추론 문제가 수록된 것은 H교과서(8.1%)이다. <표 IV-1, 그림 IV-1 참조>

<표 IV-1> 교과서별 집합, 명제 중단원에 포함된 추론 문제

중단원	교과서	A	B	C	D	E	F	G	H	I
		(추론 문제 개수) / (모든 문제 개수) (%)								
집합	일반문제	11/35 (31.4)	6/28 (21.4)	7/27 (25.9)	6/28 (21.4)	10/33 (30.3)	7/33 (21.2)	9/41 (22.0)	6/25 (24.0)	6/39 (15.4)
	평가문제	9/50 (18.0)	6/42 (14.3)	9/68 (13.2)	7/34 (20.6)	8/37 (21.6)	7/46 (15.2)	6/24 (25.0)	8/62 (8.1)	10/50 (20.0)



<그림 IV-1> 교과서별 집합, 명제 중단원에 포함된 추론 문제

나. 수열

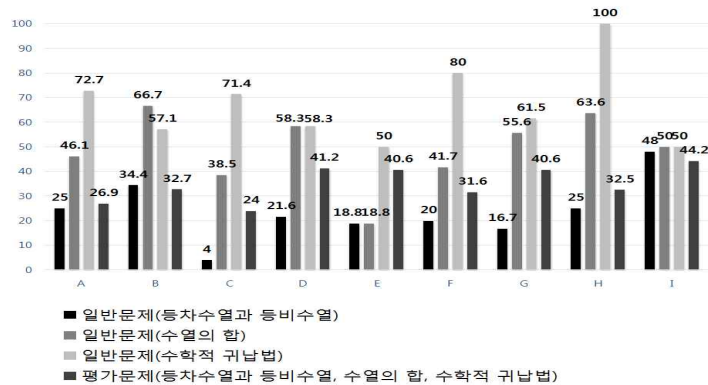
등차수열과 등비수열 중단원에 수록된 모든 ‘일반문제’ 중에서 추론 문제에 해당하는 정도를 살펴보면, 다음 <표 IV-2>에서와 같이, A교과서의 경우 총 32개의 ‘일반문제’ 중에 8개가 추론 문제(25.0%)에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-2>에 제시된 바와 같다. 또, 수열의 합 중단원의 경우, A교과서의 모든 ‘일반문제’ 중에서 추론 문제가 차지하는 비율은 46.1%이고, 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-2>에 제시된 바와 같다. 또한, 수학적 귀납법 중단원의 경우, A교과서의 추론 문제가 차지하는 비율은 72.7%이고, 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-2>에 제시된 바와 같다. 한편, 수열 대단원에 수록된 모든 ‘평가문제’ 중에서 추론 문제에 해당하는 정도를 살펴보면, A교과서의 경우 총 63개의 ‘평가문제’ 중

에서 17개가 추론 문제(26.9%)에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-2>에 제시된 바와 같다.

결과적으로, 등차수열과 등비수열 중단원에 수록된 모든 ‘일반문제’ 중 추론 문제가 가장 많이 수록된 것은 I교과서(48.0%), 가장 적은 추론 문제가 수록된 것은 G교과서(16.7%)이다. 또, 수열의 합 중단원의 경우에 추론 문제가 가장 많이 수록된 교과서는 B교과서(66.7%), 가장 적은 추론 문제가 수록된 것은 E교과서(18.8%)이며, 수학적 귀납법 중단원의 경우 추론 문제가 가장 많이 수록된 교과서는 H교과서(100.0%), 가장 적은 추론 문제가 수록된 교과서는 E와 I교과서(50.0%)이다. 그리고 수열 대단원에 수록된 모든 ‘평가문제’ 중 추론 문제가 가장 많이 수록된 것은 I교과서(44.2%), 가장 적은 추론 문제가 수록된 것은 C교과서(24.0%)이다. <표 IV-2, 그림 IV-2 참조>

<표 IV-2> 교과서별 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법 중단원에 포함된 추론 문제<sup>9)</sup>

중단원		교과서									
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	
		(추론 문제 개수)/(모든 문제 개수) (%)									
등차수열과 등비수열	일반문제	8/32 (25.0)	11/32 (34.4)	12/30 (40.0)	8/37 (21.6)	<b>6/32 (18.8)</b>	6/30 (20.0)	<b>6/36 (16.7)</b>	5/20 (25.0)	<b>12/25 (48.0)</b>	
수열의 합	일반문제	6/13 (46.1)	<b>6/9 (66.7)</b>	5/13 (38.5)	14/24 (58.3)		5/12 (41.7)	10/18 (55.6)	7/11 (63.6)	8/16 (50.0)	
수학적귀납법	일반문제	8/11 (72.7)	4/7 (57.1)	5/7 (71.4)			<b>3/6 (50.0)</b>	4/5 (80.0)	8/13 (61.5)	<b>6/6 (100.0)</b>	<b>5/10 (50.0)</b>
등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적귀납법	평가문제	17/63 (26.9)	16/49 (32.7)	<b>18/75 (24.0)</b>	14/34 (41.2)	13/32 (40.6)	18/57 (31.6)	13/32 (40.6)	25/77 (32.5)	<b>23/52 (44.2)</b>	



<그림 IV-2> 교과서별 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법 중단원에 포함된 추론 문제

2. 교과서 대단원별 추론 유형 문제

9) D교과서에서 수열 대단원은 등차수열과 등비수열, 수열 중단원으로 나뉘어져 있는데, 수열 중단원은 수열의 합, 수학적 귀납법 중단원의 내용이 포함되어 있어서 두 셀을 합쳐 입력하였다. 또, E교과서에서 수열 대단원은 수열, 수학적 귀납법 중단원으로 나뉘어져 있는데, 수열 중단원은 등차수열과 등비수열, 수열의 합 중단원의 내용이 포함되어 있어서 두 셀을 합쳐 입력하였음.

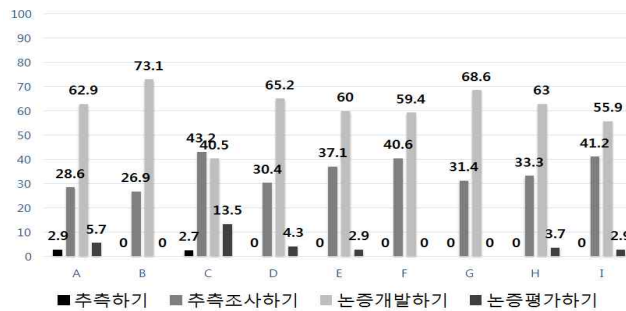
가. 집합과 명제

각 교과서의 집합과 명제 대단원에 수록된 모든 추론 문제 중 네 가지 추론 유형별, 즉 추측하기(MC), 추측 조사하기(IC), 논증개발하기(DA), 논증평가하기(EA)에 각각 분포되어 있는 문제 개수를 살펴보면 다음과 같다. A교과서의 경우 총 35개의 추론 문제 중 MC가 1개(2.9%), IC가 10개(28.6%), DA가 22개(62.9%), EA가 2개(5.7%)에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-3>에 제시된 바와 같다.

결과적으로, MC는 A교과서(2.9%)와 C교과서(2.7%)에만 한 문제씩 제시되어 있고, 다른 교과서에는 한 문제도 수록되어 있지 않았다. 또, IC와 EA의 두 유형 모두 C교과서가 가장 많은 문제를 포함하고 있는 것으로 나타났다(각각 43.2%, 13.5%), DA의 경우는 B교과서(73.1%)가 가장 많은 문제를 포함하고 있었다. 반면에, IC 유형의 문제가 가장 적게 수록된 것은 B교과서(26.9%)이며, IC와 EA의 두 유형 모두 가장 많은 문제가 수록된 C교과서에 DA 유형의 문제는 가장 적게 수록된 것으로 나타났다. EA의 경우 3종의 교과서에서 한 문제도 제시되지 않은 것으로 나타났다.<표 IV-3, 그림 IV-3 참조>

<표 IV-3> 교과서별 집합과 명제 대단원에 포함된 추론 유형 문제

교과서	집합과 명제				(집합과 명제 단원의 추론문제 개수) / (총 추론문제 개수) (%)
	추측하기(MC)	추측조사하기(IC)	논증개발하기(DA)	논증평가하기(EA)	
	(추론 유형 문제 개수) / (대단원별 총 추론 문제 개수) (%)				
A	1/35 (2.9)	10/35 (28.6)	22/35 (62.9)	2/35 (5.7)	35/92 (38.0)
B	0/26 (0.0)	7/26 (26.9)	19/26 (73.1)	0/26 (0.0)	26/72 (36.1)
C	1/37 (2.7)	16/37 (43.2)	15/37 (40.5)	5/37 (13.5)	37/97 (38.1)
D	0/23 (0.0)	7/23 (30.4)	15/23 (65.2)	1/23 (4.3)	23/79 (29.1)
E	0/35 (0.0)	13/35 (37.1)	21/35 (60.0)	1/35 (2.9)	35/66 (53.0)
F	0/32 (0.0)	13/32 (40.6)	19/32 (59.4)	0/32 (0.0)	32/84 (38.1)
G	0/35 (0.0)	11/35 (31.4)	24/35 (68.6)	0/35 (0.0)	35/88 (39.8)
H	0/27 (0.0)	9/27 (33.3)	17/27 (63.0)	1/27 (3.7)	27/91 (29.7)
I	0/34 (0.0)	14/34 (41.2)	19/34 (55.9)	1/34 (2.9)	34/100 (34.0)



<그림 IV-3> 교과서별 집합과 명제 대단원에 포함된 추론 유형 문제

나. 수열

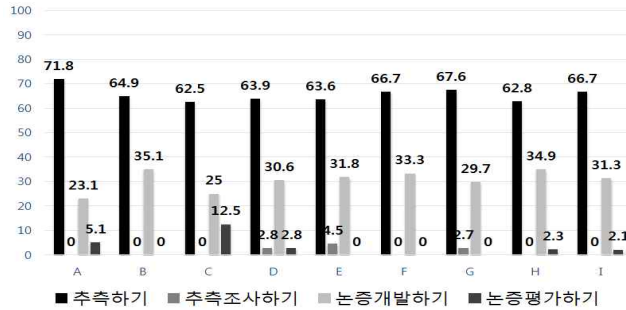
수열 단원에 수록된 모든 추론 문제 중에서 추론 유형 문제에 해당하는 정도를 살펴보면, A 교과서의 경우 수열 단원의 총 39개의 추론 문제 중에 MC가 28개(71.8%), IC가 0개(0%), DA가 9개(23.1%), EA가 2개(5.1%)에

해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-4>에 제시된 바와 같다.

결과적으로, MC는 A교과서(71.8%), IC는 E교과서(4.5%), DA는 B교과서(35.1%), EA는 C교과서(12.5%)에 가장 많이 제시되어 있는 것으로 나타났는데, 특히 MC 유형은 상대적으로 추론 문제 중에서 매우 높은 비중(71.8%)에 달하는 것으로 나타났고, 그 다음은 DA, EA, IC 순으로 나타났는데 이때 IC 유형의 비중은 상대적으로 매우 낮은 것으로 나타났다(4.5%). 반면에, MC, DA 유형의 문제는 각각 C교과서(62.5%), A교과서(23.1%)가 다른 교과서에 비해 상대적으로 적게 제시한 것으로 나타났으며, IC와 EA의 경우에는 각각 6종, 4종의 교과서가 해당 유형의 문제를 전혀 제시하지 않은 것으로 나타났다(<표 IV-4>, <그림 IV-4> 참조).

<표 IV-4> 교과서별 수열 대단원에 포함된 추론 유형 문제

교과서	수열				(수열 단원의 추론 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)
	추측하기(MC)	추측조사하기(IC)	논증개발하기(DA)	논증평가하기(EA)	
	(추론 유형 문제 개수) / (대단원별 총 추론 문제 개수) (%)				
A	<b>28/39 (71.8)</b>	0/39 (0.0)	<b>9/39 (23.1)</b>	2/39 (5.1)	39/92 (42.4)
B	24/37 (64.9)	0/37 (0.0)	<b>13/37 (35.1)</b>	0/37 (0.0)	37/72 (51.4)
C	<b>25/40 (62.5)</b>	0/40 (0.0)	10/40 (25.0)	<b>5/40 (12.5)</b>	40/97 (41.2)
D	23/36 (63.9)	1/36 (2.8)	11/36 (30.6)	1/36 (2.8)	36/79 (45.6)
E	14/22 (63.6)	<b>1/22 (4.5)</b>	7/22 (31.8)	0/22 (0.0)	22/66 (33.3)
F	22/33 (66.7)	0/33 (0.0)	11/33 (33.3)	0/33 (0.0)	33/84 (39.3)
G	25/37 (67.6)	1/37 (2.7)	11/37 (29.7)	0/37 (0.0)	37/88 (42)
H	27/43 (62.8)	0/43 (0.0)	15/43 (34.9)	1/43 (2.3)	43/91 (47.3)
I	32/48 (66.7)	0/48 (0.0)	15/48 (31.3)	1/48 (2.1)	48/100 (48.0)



<그림 IV-4> 교과서별 수열 대단원에 포함된 추론 유형 문제

3. 추론 유형에 따른 교과서 중단원별 추론 문제

가. 추측하기(Making Conjectures)

집합 중단원에 수록된 모든 ‘일반문제’의 총 추론 문제 중에서 MC 유형에 해당하는 문제의 비중을 살펴보면 다음과 같다. <표 IV-5>에서와 같이, A와 C교과서의 경우에는 MC 유형에 속하는 것은 각각 총 11개와 7개 중에서 한 문제씩(9.1%, 14.3%)에 해당하며, 나머지 교과서에서는 한 문제도 수록되어 있지 않은 것으로 나타났다. 또, 명제 중단원의 ‘일반문제’의 경우와 집합, 명제 중단원의 ‘평가문제’의 경우에는 모든 교과서에서 MC 유형을 한 문제도 다루지 않은 것으로 나타났다.

한편, 등차수열과 등비수열 중단원의 총 추론 문제 중 MC 유형에 해당하는 문제의 비중을 살펴본 결과, A교과서의 경우 총 8개의 추론 문제 중에서 8개(100.0%)가 MC 유형에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로, B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-5>에 제시된 바와 같다. 수열의 합 중단원의 경우, A교과서는 총 6개의 추론 문제 중에서 3개(50.0%)가 MC 유형에 해당하는 것으로 나타났으며, 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-5>에 제시된 바와 같다. 수학적 귀납법 중단원의 경우, A교과서는 총 8개의 추론 문제 중에서 4개(50.0%)가 MC 유형에 해당하는 것으로 나타났으며, 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-5>에 제시된 바와 같다. 그리고 ‘평가문제’의 경우, A교과서는 총 17개의 추론 문제 중 13개(76.5%)가 MC 유형 문제에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-5>에 제시된 바와 같다.

결과적으로, 수열 대단원의 경우 집합 대단원에 비해, 전반적으로 ‘일반문제’와 ‘평가문제’ 모두에서 MC 유형의 문제의 비중이 큰 편인 것으로 나타났는데, 이때 집합, 명제 중단원에서는 MC 유형의 문제를 거의 다루지 않고 있으며, 등차수열과 등비수열 중단원의 MC 유형 문제는 60.0~100.0% 정도의 비중을 보이고, 수열의 합 중단원에서는 40.0~100.0% 정도의 비중을 보이고, 수학적 귀납법 중단원에서는 0.0~50.0% 정도의 비중을 보이고 있으며, ‘평가문제’의 경우에는 61.5~82.6%의 비중을 보이고 있다.

<표 IV-5> 중단원별 추측하기 유형 문제

교과서		A	B	C	D	E	F	G	H	I
중단원		(추측하기 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
집합	일반문제	1/11 (9.1)	0/6 (0.0)	<b>1/7</b> <b>(14.3)</b>	0/6 (0.0)	0/10 (0.0)	0/7 (0.0)	0/9 (0.0)	0/6 (0.0)	0/6 (0.0)
명제	일반문제	0/15 (0.0)	0/14 (0.0)	0/21 (0.0)	0/10 (0.0)	0/17 (0.0)	0/18 (0.0)	0/20 (0.0)	0/13 (0.0)	0/18 (0.0)
집합, 명제	평가문제	0/9 (0.0)	0/6 (0.0)	0/9 (0.0)	0/7 (0.0)	0/8 (0.0)	0/7 (0.0)	0/6 (0.0)	0/8 (0.0)	0/10 (0.0)

교과서		A	B	C	D	E	F	G	H	I
중단원		(추측하기 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
등차수열과 등비수열	일반문제	<b>8/8</b> <b>(100.0)</b>	7/11 (63.6)	9/12 (75.0)	5/8 (62.5)	<b>6/6</b> <b>(100.0)</b>	4/6 (66.7)	<b>6/6</b> <b>(100.0)</b>	<b>3/5</b> <b>(60.0)</b>	9/12 (75.0)
수열의 합	일반문제	3/6 (50.0)	5/6 (83.3)	<b>2/5</b> <b>(40.0)</b>	<b>7/14</b> <b>(50.0)</b>		4/5 (80.0)	6/10 (60.0)	5/7 (71.4)	4/8 (50.0)
수학적 귀납법	일반문제	<b>4/8</b> <b>(50.0)</b>	1/4 (25.0)	2/5 (40.0)		0/3 (0.0)	<b>2/4</b> <b>(50.0)</b>	3/8 (37.5)	2/6 (33.3)	0/5 (0.0)
등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법	평가문제	13/17 (76.5)	11/16 (68.8)	12/18 (66.7)	11/14 (78.6)	<b>8/13</b> <b>(61.5)</b>	12/18 (66.7)	10/13 (76.9)	17/25 (68.0)	<b>19/23</b> <b>(82.6)</b>

나. 추측조사하기(Investigating Conjectures)

집합 중단원에 수록된 모든 ‘일반문제’의 총 추론 문제 중 IC 유형에 해당하는 문제의 비중을 살펴보면, D교과서는 총 10개의 추론 문제 중에서 1개(10.0%)가 IC 유형의 문제에 해당하는 것으로 나타났고, 나머지 모든 교과서에서는 집합 중단원에서 IC 유형 문제는 한 문제도 수록되지 않는 것으로 나타났다. 또, 명제 단원의 경우에는 A교과서가 총 15개의 추론 문제 중에서 6개(40.0%)가 IC 유형 문제에 해당하는 것으로 나타났으며, 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-6>에 제시된 바와 같다. 그리고 ‘평가문제’의 경우, A교과서는 총 9개의 추론 문제 중에서 4개(44.4%)가 IC 유형 문제에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의

경우는 <표 IV-6>에 제시된 바와 같다.

한편, 등차수열과 등비수열 중단원의 ‘일반문제’의 총 추론 문제 중에 IC 유형 문제에 해당하는 정도를 살펴본 결과, 모든 교과서에서 IC 유형의 문제는 한 문제도 수록되지 않은 것으로 나타났다. 수열의 합과 수학적 귀납법 중단원에서는 D교과서가 총 14개의 추론 문제 중에서 한 문제(7.1%)가 IC유형 문제에 해당하는 것으로 나타났다, 수열의 합 중단원에서는 G교과서가 총 10개의 추론 문제 중에서 한 문제(10.0%)만이 IC 유형 문제인 것을 제외하고 나머지 교과서에는 한 문제도 수록되지 않은 것으로 나타났으며, 수학적 귀납법 중단원에서는 D교과서를 제외한 나머지 교과서에서 IC 유형의 문제를 다루지 않는 것으로 나타났다. 그리고 ‘평가문제’의 경우에는 E교과서가 총 13개의 추론 문제 중에서 한 문제(7.7%)의 IC 유형 문제를 수록하고 있었고, 나머지 모든 교과서에서는 IC 유형의 문제는 한 문제도 수록되지 않은 것으로 나타났다.

결과적으로, 명제 중단원의 경우 다른 단원에 비해 IC 유형의 문제가 많이 수록된 것으로 나타났다. 명제 중단원의 경우에는 28.6%의 낮은 비중을 나타낸 B교과서 이외에 모두 40~50%의 비중을 보이고 있으며, 또한 집합과 명제 중단원의 ‘평가문제’에서도 28.6%~70%의 비중을 보이는 것으로 나타났다.

<표 IV-6> 중단원별 추측조사하기 유형 문제

중단원		교과서								
		A	B	C	D	E	F	G	H	I
		(추측조사하기 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
집합	일반문제	0/11 (0.0)	0/6 (0.0)	0/7 (0.0)	0/6 (0.0)	1/10 (10.0)	0/7 (0.0)	0/9 (0.0)	0/6 (0.0)	0/6 (0.0)
명제	일반문제	6/15 (40.0)	<b>4/14 (28.6)</b>	10/21 (47.6)	5/10 (50.0)	7/17 (41.2)	<b>10/18 (55.6)</b>	9/20 (45.0)	6/13 (46.2)	7/18 (38.9)
집합, 명제	평가문제	4/9 (44.4)	3/6 (50.0)	6/9 (66.7)	<b>2/7 (28.6)</b>	5/8 (62.5)	3/7 (42.9)	2/6 (33.3)	3/8 (37.5)	<b>7/10 (70.0)</b>

중단원		교과서								
		A	B	C	D	E	F	G	H	I
		(추측조사하기 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
등차수열과 등비수열	일반문제	0/8 (0.0)	0/11 (0.0)	0/12 (0.0)	0/8 (0.0)	0/6 (0.0)	0/6 (0.0)	0/6 (0.0)	0/5 (0.0)	0/12 (0.0)
수열의 합	일반문제	0/6 (0.0)	0/6 (0.0)	0/5 (0.0)	<b>1/14 (7.1)</b>		0/5 (0.0)	<b>1/10 (10.0)</b>	0/7 (0.0)	0/8 (0.0)
수학적 귀납법	일반문제	0/8 (0.0)	0/4 (0.0)	0/5 (0.0)			0/3 (0.0)	0/4 (0.0)	0/8 (0.0)	0/6 (0.0)
등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법	평가문제	0/17 (0.0)	0/16 (0.0)	0/18 (0.0)	0/14 (0.0)	1/13 (7.7)	0/18 (0.0)	0/13 (0.0)	0/25 (0.0)	0/23 (0.0)

다. 논증개발하기(Developing Arguments)

집합 중단원에 수록된 모든 ‘일반문제’의 총 추론 문제 중에서 DA 유형의 문제가 해당하는 정도를 살펴보면, A교과서는 총 11문제의 추론 문제 중에서 9문제(81.8%)가 DA 유형에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로, B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-7>에 제시된 바와 같다. 또, 명제 중단원의 경우에 A교과서는 총 15개의 추론 문제 중에서 8개(53.3%)가 DA 유형에 해당하는 것으로 나타났으며 마찬가지로, B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-7>에 제시된 바와 같다. 그리고 ‘평가문제’의 경우, A교과서는 총 9문제의 추론 문제 중에서 5문제(55.6%)가 DA 유형에 해당하는 것으로 나타났으며 마찬가지로, B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-7>에 제시된 바와 같다.



한편, 등차수열과 등비수열 중단원의 모든 ‘일반문제’의 총 추론 문제 중에서 DA 유형의 문제가 해당하는 정도를 살펴보면, A교과서는 총 8문제의 추론 문제 중에서 DA 유형의 문제는 한 문제도 수록되지 않는 것(0%)으로 나타났다. 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-7>에 제시된 바와 같다. 수열의 합 중단원의 경우, A교과서는 총 6문제의 추론 문제 중에서 1문제(16.7%)가 DA 유형에 해당하는 것으로 나타났으며 마찬가지로, B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-7>에 제시된 바와 같다. 수학적 귀납법 중단원의 경우, A교과서는 총 8문제의 추론 문제 중에서 4문제(50.0%)가 DA 유형에 해당하는 것으로 나타났으며 마찬가지로, B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-7>에 제시된 바와 같다. 그리고 ‘평가문제’의 경우에 A교과서는 총 17개의 추론 문제 중에서 4개(23.5%)가 DA 유형의 문제인 것으로 나타났으며, 마찬가지로 B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-7>에 제시된 바와 같다.

결과적으로, 중단원별 DA 유형 문제의 비중은 다른 추론 유형 문제에 비해 큰 편이며, 특히 집합 중단원과 수학적 귀납법 중단원에서 많이 수록하고 있음을 알 수 있다. 집합 중단원의 경우에는 57.1%의 낮은 비중을 나타낸 C교과서 이외에 모든 교과서에서 DA 유형 문제는 81.8~100.0%의 비중을 보이고, 명제 중단원의 경우에는 71.4%의 높은 비중을 나타낸 B교과서 이외에 모든 교과서에서 38.1~55.6%의 비중을 보이는 것으로 나타났다. 그에 비해 등차수열과 등비수열 중단원에서는 DA 유형의 문제를 한 문제도 다루지 않는 교과서와 8.3%의 낮은 비중을 나타낸 C교과서 이외의 교과서는 25.0~40.0%의 비중을 보이며, 수열의 합 중단원의 경우에는 50.0%의 높은 비중을 나타내는 I교과서 이외에 모든 교과서는 14.3~30.0%의 비중을 보이고, 수학적 귀납법 중단원에서는 40.0~100.0%로 DA 유형의 문제를 상대적으로 많이 수록하고 있음을 알 수 있다. 그리고 ‘평가문제’에서 집합과 명제 단원은 30.0~71.4%가 DA 유형에 해당하며, 수열 단원에서는 17.4~33.3%에 해당하는 것으로 나타났다.

<표 IV-7> 중단원별 논증개발하기 유형 문제

논증개발하기		A	B	C	D	E	F	G	H	I
중단원		(논증개발하기 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
집합	일반문제	9/11 (81.8)	<b>6/6</b> <b>(100.0)</b>	<b>4/7</b> <b>(57.1)</b>	<b>6/6</b> <b>(100.0)</b>	9/10 (90.0)	<b>7/7</b> <b>(100.0)</b>	<b>9/9</b> <b>(100.0)</b>	<b>6/6</b> <b>(100.0)</b>	<b>6/6</b> <b>(100.0)</b>
명제	일반문제	8/15 (53.3)	<b>10/14</b> <b>(71.4)</b>	<b>8/20</b> <b>(38.1)</b>	4/10 (40.0)	9/17 (52.9)	8/18 (44.4)	11/20 (55.0)	6/13 (46.2)	10/18 (55.6)
집합, 명제	평가문제	5/9 (55.6)	3/6 (50.0)	3/9 (33.3)	<b>5/7</b> <b>(71.4)</b>	3/8 (37.5)	4/7 (57.1)	4/6 (66.7)	5/8 (62.5)	<b>3/10</b> <b>(30.0)</b>
중단원		(논증개발하기 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
등차수열과 등비수열	일반문제	0/8 (0.0)	4/11 (36.4)	1/12 (8.3)	2/8 (25.0)	0/6 (0.0)	2/6 (33.3)	0/6 (0.0)	<b>2/5</b> <b>(40.0)</b>	3/12 (25.0)
수열의 합	일반문제	1/6 (16.7)	1/6 (16.7)	1/5 (20.0)	6/14 (42.9)		1/5 (20.0)	3/10 (30.0)	<b>1/7</b> <b>(14.3)</b>	<b>4/8</b> <b>(50.0)</b>
수학적 귀납법	일반문제	4/8 (50.0)	3/4 (75.0)	<b>2/5</b> <b>(40.0)</b>		4/13 (30.8)	<b>3/3</b> <b>(100.0)</b>	2/4 (50.0)	5/8 (62.5)	4/6 (66.7)
등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법	평가문제	4/17 (23.5)	5/16 (31.3)	<b>6/18</b> <b>(33.3)</b>	3/14 (21.4)		<b>6/18</b> <b>(33.3)</b>	3/13 (23.1)	8/25 (32.0)	<b>4/23</b> <b>(17.4)</b>

라. 논증평가하기

집합 중단원에 수록된 모든 ‘일반문제’의 총 추론 문제 중에서 EA 유형의 문제에 해당하는 정도를 살펴보면,

A와 C교과서는 각각 총 11개와 7개의 추론 문제 중에서 1개, 2개(9.1%, 28.6%)가 EA 유형 문제에 해당하며, 나머지 교과서에서는 한 문제도 수록되지 않는 것으로 나타났다. 명제 중단원의 경우, A교과서는 총 15개의 추론 문제 중에서 1개(6.7%)가 EA 유형에 해당하는 것으로 나타났다. 마찬가지로, B, C, ..., I교과서의 경우는 <표 IV-8>에 제시된 바와 같다. 그리고 집합, 명제 중단원의 '평가문제'의 경우는 모든 교과서에서 EA 유형의 문제를 다루지 않는 것으로 나타났다.

등차수열과 등비수열 중단원의 모든 '일반문제'의 총 추론 문제 중에서 EA 유형의 문제에 해당하는 정도를 살펴보면, C와 D교과서는 각각 총 12개와 8개의 추론 문제 중에서 2개, 1개(16.7%, 12.5%)가 EA 유형 문제이며, 나머지 교과서에서는 한 문제도 다루지 않는 것으로 나타났다. 수열의 합 중단원의 경우, A, C, H교과서는 각각 총 6개, 5개, 7개의 추론 문제 중에서 2개, 2개, 1개(33.3%, 40.0%, 14.3%)가 EA 유형의 문제에 해당하며, 나머지 교과서에서는 한 문제도 다루지 않는 것으로 나타났다. 수학적 귀납법 중단원에서도 C교과서(20.0%), I교과서(20.0%)를 제외한 나머지 교과서에서는 EA 유형 문제를 한 문제도 다루지 않는 것으로 나타났다. 그리고 '평가문제'에서는 EA 유형의 문제는 모든 교과서에서 전혀 다루지 않고 있다.

위에서 살펴본 바와 같이, EA 유형의 문제는 모든 중단원에서 다른 유형의 문제에 비해 상대적으로 매우 낮은 정도의 문제가 교과서에 수록되어 있다. 특히, 중단원 및 대단원 연습문제에 해당하는 '평가문제'의 경우, 모든 중단원에서 EA 유형의 문제를 한 문제도 다루지 않는 것으로 나타났다.

<표 IV-8> 중단원별 논증평가하기 유형 문제

교과서		A	B	C	D	E	F	G	H	I
중단원		(논증평가하기 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
집합	일반문제	1/11 (9.1)	0/6 (0.0)	<b>2/7</b> <b>(28.6)</b>	0/6 (0.0)	0/10 (0.0)	0/7 (0.0)	0/9 (0.0)	0/6 (0.0)	0/6 (0.0)
명제	일반문제	1/15 (6.7)	0/14 (0.0)	<b>3/20</b> <b>(14.3)</b>	1/10 (10.0)	1/17 (5.9)	0/18 (0.0)	0/20 (0.0)	1/13 (7.7)	1/18 (5.6)
집합, 명제	평가문제	0/9 (0.0)	0/6 (0.0)	0/9 (0.0)	0/7 (0.0)	0/8 (0.0)	0/7 (0.0)	0/6 (0.0)	0/8 (0.0)	0/10 (0.0)
교과서		A	B	C	D	E	F	G	H	I
중단원		(논증평가하기 문제 개수) / (총 추론 문제 개수) (%)								
등차수열과 등비수열	일반문제	0/8 (0.0)	0/11 (0.0)	<b>2/12</b> <b>(16.7)</b>	1/8 (12.5)	0/6 (0.0)	0/6 (0.0)	0/6 (0.0)	0/5 (0.0)	0/12 (0.0)
수열의 합	일반문제	2/6 (33.3)	0/6 (0.0)	2/5 (40.0)	0/14 (0.0)		0/5 (0.0)	0/10 (0.0)	1/7 (14.3)	0/8 (0.0)
수학적 귀납법	일반문제	0/8 (0.0)	0/4 (0.0)	<b>1/5</b> <b>(20.0)</b>	0/14 (0.0)	0/3 (0.0)	0/4 (0.0)	0/8 (0.0)	0/6 (0.0)	<b>1/5</b> <b>(20.0)</b>
등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법	평가문제	0/17 (0.0)	0/16 (0.0)	0/18 (0.0)		0/14 (0.0)	0/13 (0.0)	0/18 (0.0)	0/13 (0.0)	0/25 (0.0)

### V. 결론 및 제언

앞 장에서는 현재 고등학교에서 사용하고 있는 '수학 II' 교과서를 선정하여 해당 교과서의 집합과 명제, 수열 대영역에 해당하는 내용을 중심으로 추론 문제 및 추론 유형 문제의 비율에 관한 결과를 제시하였다. 이 결과에 따른 결론 및 제언은 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서 '수학 II' 교과서(집합과 명제, 수열의 대단원)는 '논증개발하기' 유형의 문제를 충분히 다루는 것으로 나타났다. 따라서 '수학 II' 교과목의 내용은 최상의 추론 활동인 논리적인 정당화(추론) 활동을 증진시킬 수 있을 것이라 판단된다.

2009 개정 교육과정에 따른 '수학 II' 교과목에서는 집합과 명제, 함수, 수열, 지수와 로그의 대영역 내용을 다루고 있는데, 이 중에서 집합과 명제, 그리고 수열에 관한 내용은 추론 활동을 하는데 적절한 수학적 내용을 수반하고 있으며, 특히 집합에는 벤 다이어그램을 이용한 집합의 연산법칙 증명, 명제에는 대우를 이용한 증명 방법, 귀류법, 절대부등식 증명 등이 포함되어 있고, 수학적 귀납법에는 수학적 귀납법을 이용한 명제의 증명이 포함되어 있어 더욱 그러하다고 하겠다(교과부, 2011). 그 예로, 집합과 명제 대단원에서 모든 추론 문제 중 '논증개발하기' 문제의 비율은 최대 B교과서(73.1%), 최소 D교과서(40.5%)로 나머지 세 유형의 문제에 비해 높은 비중을 차지한다. 또, 수열 대단원에서의 추론 문제 중 '논증개발하기' 유형 문제의 비율은 최대 B교과서(35.1%), 최소 C교과서(25.0%)로 상대적으로 '추측조사하기'와 '논증평가하기' 유형의 문제에 비해 높은 비중을 차지한다. 또한 <표 IV-5, 6, 7, 8>에서 제시된 바와 같이, '논증개발하기' 유형의 문제는 모든 중단원에서도 높은 비중을 차지하고 있다. 한 마디로, 본고에서 이미 언급한 바와 같이 학생들은 추측하고, 그 추측이 참인지 거짓인지를 판별하고, 논증을 평가하는 과정을 연습하면서 결과적으로 논리적인 논증을 개발할 수 있으므로, 이러한 맥락에서 '수학 II' 교과서는 추론 문제 중에서 논증을 개발하는 문제가 많이 수록되어 있어서 이를 통해 학생들이 논리적인 추론활동을 접할 수 있는 기회가 풍부히 제공되고 있는 것으로 판단된다.

결국, 추론 과정을 연습하면서 궁극적인 목표는 논리적으로 정당화할 수 있도록 하는 것이다. 그러므로 학생들의 추론능력을 향상시키기 위해 '논증개발하기' 유형은 필수적이며, 가장 높은 수준의 추론 유형이라 할 수 있다. 현재 집합과 명제에서 논증을 개발하는 문제는 다른 추론 유형 문제에 비해 충분하나 수열 단원은 집합과 명제 단원에 비해 '논증개발하기' 유형의 문제가 낮은 비율을 차지하므로 좀 더 다양한 논증을 개발하는 문제를 수록할 수 있도록 해야 할 것이다.

둘째, 본 연구에서 집합과 명제 대단원에 수록된 '추측조사하기'와 '논증개발하기' 유형 문제의 비율이 다른 유형의 문제에 비해 높은 것으로 나타났다. 따라서 학생들은 집합과 명제에 관한 문제들을 보다 풍부히 다룸으로써 추측을 조사하고, 논리적인 논증을 개발할 수 있는 기회를 갖고 이를 통해 추론 능력이 향상될 수 있을 것으로 판단된다.

집합과 명제 대단원에서 '추측조사하기' 유형 문제의 비율은 26.9~43.2%이며, '논증개발하기' 유형 문제의 비율은 40.5~73.1%로 두 유형은 총 추론 문제의 90% 이상을 차지한다. 특히나 B, F, G 교과서는 추론 문제 중 '추측하기'와 '논증평가하기' 유형의 문제는 전혀 다루지 않고 있으며, 상대적으로 C교과서가 '논증평가하기' 유형 문제(13.5%)를 많이 수반하고 있지만 '추측조사하기'(43.2%), '논증개발하기'(40.5%)에 비해 낮음을 알 수 있다. 이와 같은 결과를 세분화하여 살펴보면, 집합 중단원에서 '논증개발하기' 유형 문제의 비율은 81.8~100.0%(낮은 비중을 차지하는 C교과서(57.1%)제외)로 추론 문제 중에서 거의 대부분이 '논증개발하기' 유형 문제임을 알 수 있다. 명제 중단원에서 '추측조사하기' 유형 문제와 '논증개발하기' 유형 문제의 비율은 각각 28.6~55.6%, 38.1~55.6%(높은 비중을 차지하는 B교과서(71.4%)제외)로 두 유형의 문제를 고루 다루고 있음을 알 수 있다. 그리고 '평가문제'에서 '추측조사하기' 유형 문제는 28.6~70.0%, '논증개발하기' 유형 문제는 30.0~71.4%로 추측을 조사하는 문제를 강조하거나 논증을 개발하는 문제를 강조하는 것에 따라 그 차이가 크다. 이와 같이 집합과 명제에 관한 내용에서 추론 활동은 주로 추측을 조사하거나 논증을 개발하는 활동이며, 특히 집합에 관한 내용에서는 논리적인 논증을 개발하고, 명제에 관한 내용에서는 추측을 조사하고 논증을 개발하는 활동 모두를 할 수 있을 것이다. 이것은 학생들에게 명제의 참·거짓을 판별하고, 집합의 성질이 성립함을 보이고, 명제를 대우를 이용한

증명법과 귀류법으로 증명하도록 하기 위하여 ‘추측조사하기’와 ‘논증개발하기’ 유형의 문제를 모두 중요하게 다루는 것으로 여겨진다.

결국, 학생들은 집합 중단원에서 추측을 조사하는 활동을 하지 못하더라도 명제 단원을 공부하며 추측을 조사하는 활동을 할 수 있을 것이고, 집합과 명제 중단원 모두에서 논증을 개발할 수 있는 기회를 충분히 제공할 수 있을 것이다. 그러나 그것보다 우선되어야 할 것은 문제를 해결하는데 있어서 추측을 하는 활동과 논증을 평가하는 활동이다(Thomson, et al., 2012). 이러한 점을 감안해 볼 때, ‘추측하기’와 ‘논증평가하기’ 유형의 문제는 추론 활동을 지양하는 교수 학습 상황에게 친숙히 다뤄져야 할 것이며, 이는 ‘수학 II’ 교과서에 포함된 집합과 명제 중단원의 내용을 통해 보다 수월하게 다뤄져야 할 것이다.

셋째, 본 연구에서 수열 대단원에 수록된 ‘추측하기’와 ‘논증개발하기’ 유형의 문제의 비율이 다른 유형에 비해 높은 것으로 나타났다. 따라서 학생들은 수열에 관한 문제들을 보다 풍부히 다룸으로써 추측을 하고, 논리적인 논증을 개발할 수 있는 기회를 갖고 이를 통해 추론 능력이 향상될 수 있을 것이라 판단된다.

수열 대단원에서 ‘추측하기’ 유형 문제의 비율은 62.5~71.8%이며, ‘논증개발하기’ 유형 문제의 비율은 23.1~35.1%로 두 유형은 총 추론 문제의 94% 이상을 차지한다. 특히, B, F 교과서는 추론 문제 중 ‘추측조사하기’와 ‘논증평가하기’ 유형 문제는 전혀 수반하지 않는다. 상대적으로 C교과서가 ‘논증평가하기’ 유형의 문제(12.5%)를 많이 수반하고 있지만 ‘추측조사하기’(62.5%), ‘논증개발하기’(25.0%)에 비해 낮음을 알 수 있다. 또한 중단원별 (등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법) ‘일반문제’와 ‘평가문제’로 세분화하여 보더라도 ‘추측하기’와 ‘논증개발하기’ 문제는 다른 유형에 비해 높은 비율을 차지하고 있다.<표 IV-3, 4, 5, 7 참조> 특히, 학생들에게 수열의 일반항을 추측하는 활동이 모든 중단원에서 고루 다뤄지고 있어 ‘추측하기’ 유형의 문제가 ‘논증개발하기’ 유형의 문제보다 높은 비중을 차지하고 있음을 알 수 있다. 그리고 수학적 귀납법 중단원에서는 수학적 귀납법을 이용한 증명 활동도 강조되고 있어서 ‘논증개발하기’ 유형의 문제가 ‘추측하기’ 유형 문제에 비해 낮지만 다른 유형 보다는 많이 수록됨을 알 수 있다.

결국, 학생들은 수열 단원을 공부하며 논증을 개발하고, 추측을 할 수 있는 기회를 충분히 제공 받을 수 있을 것이다. 그러나 ‘추측조사하기’ 문제가 거의 다루고 있지 않기 때문에 학생들은 생성한 추측이 참인지 거짓인지를 판별해야 할 필요성을 느끼지 못할 수 있을 것이다. ‘논증평가하기’ 문제 또한 논리적으로 논증을 개발하는 데 있어 훌륭한 자원이므로 ‘추측조사하기’와 ‘논증평가하기’ 유형의 문제는 다른 유형 문제와 함께 중요하게 다뤄야 할 것이며, 이는 ‘수학 II’ 교과서에 포함된 수열 대단원의 내용을 통해서도 충분히 다뤄져야 할 것이다.

넷째, 본 연구에서는 ‘수학 II’ 교과서에서 ‘논증평가하기’ 유형 문제의 비율이 상대적으로 낮아 학생들이 논증을 평가할 수 있는 기회가 충분치 않은 것으로 여겨지는데 이것은 수학적 과정에 관한 문제 해결을 통해 향상될 수 있을 것으로 판단된다.

논증평가하기 문제는 교과서에 논증이 언급되고, 그 논증이 유효한지 여부를 확인하고, 만약 잘못된 부분이 있으면 수정하도록 하는 문제이다. 이러한 문제 유형은 다양한 풀이가 있고, 학생들이 생각하는 바를 서술해야 하는 특성 상 교과서에 많은 문제를 수반하기 어려워 다른 추론 유형에 비해 그 비율이 낮다고 볼 수 있다. 그 예로, 집합과 명제 중단원에서 모든 추론 문제 중 ‘논증평가하기’ 문제의 비율은 최대 C교과서(13.5%), 최소 E교과서(2.9%)이고, 특히, B, F, G 교과서는 전혀 다루고 있지 않다. 수열 대단원에서 모든 추론 문제 중 ‘논증평가하기’ 문제의 비율은 최대 C교과서(12.5%), 최대 I교과서(2.1%)이고, 특히, B, E, F, G 교과서는 전혀 다루고 있지 않다. 또한 중단원별 ‘일반문제’와 ‘평가문제’로 세분화하여 살펴보더라도 모든 중단원의 ‘일반문제’에서 ‘논증평가하기’ 유형의 문제는 거의 다루지 않고 있으며, 모든 ‘평가문제’에서는 한문제도 수록되지 않은 것으로 보인다. 실제로 교과서에서 ‘논증평가하기’ 유형의 문제는 ‘일반문제’의 수학적 과정에 관한 문제에서만 다루고 있는

것으로 나타났다.

결국, ‘논증평가하기’ 문제는 교과서 본문에 있는 문제와 단원이 끝나고 배운 내용을 확인하는 확인학습 문제, 즉 ‘일반문제’에서 다루기 용이하지 않으며, 또한 전체적인 내용(즉, 중단원 연습문제와 대단원 연습문제)을 포함해야 하는 ‘평가문제’에서도 마찬가지로 여겨진다. 그렇다면, 다양한 풀이와 설명, 해석 등이 요구되는 ‘논증평가하기’ 유형의 문제는 문제 해결, 추론, 의사소통 등의 수학적 과정에 관한 문제에서 다루지는 것이 바람직할 것으로 사료된다. 그러나 이런 점을 감안하더라도 집합과 명제, 수열대단원에서 ‘논증평가하기’ 문제의 비율은 다른 유형 문제들에 비해 현저히 낮을 뿐만 아니라 전혀 수록되지 않은 교과서도 있다. 본고에서 이미 언급한 바와 같이, 학생들은 다른 사람의 논증을 평가하는 활동을 통해 스스로도 일관성 있고 논리적인 논증을 개발할 수 있게 될 것이므로 수학적 과정에 관한 문제에서 논증을 평가할 수 있는 문제를 보강해야 할 것이다.

끝으로, 집합과 명제 대단원에서의 모든 ‘일반문제’는 모든 ‘평가문제’보다 20% 정도의 높은 비율의 추론 문제를 제시하고 있고(‘일반문제’ 30.2~45.9%, ‘평가문제’ 8.1%~25.0%)<sup>10)</sup>, 수열 대단원에서의 모든 ‘일반문제’는 모든 ‘평가문제’와 비슷한 정도의 비율을 보이고 있다(‘일반문제’ 23.7~49.0%, ‘평가문제’ 24.0~44.2%)<sup>11)</sup>. 전반적으로, 9종 교과서 모두 집합과 명제, 수열 내용의 특수성 때문에 추론 관련 문제를 비교적 신중히 다루고는 있으나, 확인문제나 수학적 과정에 관한 문제 등과 같이 평상시 수업 시간에 다룰 수 있는 ‘일반문제’보다 중단원 또는 대단원의 학습을 마치고 해당 단원의 학습 정도를 스스로 점검하고 처치하는 ‘평가문제’에 보다 많은 추론 유형의 문제를 제시함으로써 학생들 스스로 추론 능력(활동)의 숙달 정도를 가늠, 판단할 수 있도록 해야 한다.

10) 이는 <표 IV-1>를 ‘일반문제’와 ‘평가문제’로 재구성한 데이터임.

수열 \ 교과서	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	(추론 문제 개수)/(모든 문제 개수) (%)								
일반문제	26/61 (42.6)	20/52 (38.5)	<b>28/61</b> <b>(45.9)</b>	<b>16/53</b> <b>(30.2)</b>	27/65 (41.5)	25/66 (37.9)	29/81 (35.8)	19/48 (39.6)	24/70 (34.3)
평가문제	9/50 (18.0)	6/42 (14.3)	9/68 (13.2)	7/34 (20.6)	8/37 (21.6)	7/46 (15.2)	<b>6/24</b> <b>(25.0)</b>	<b>8/62</b> <b>(8.1)</b>	10/50 (20.0)

11) 이는 <표 IV-2>를 ‘일반문제’와 ‘평가문제’로 재구성한 데이터임.

수열 \ 교과서	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	(추론 문제 개수)/(모든 문제 개수) (%)								
일반문제	22/56 (39.3)	21/48 (43.8)	22/50 (44.0)	22/61 (36.1)	<b>9/38</b> <b>(23.7)</b>	15/47 (31.9)	24/67 (35.8)	18/37 (48.6)	<b>25/51</b> <b>(49.0)</b>
평가문제	17/63 (26.9)	16/49 (32.7)	<b>18/75</b> <b>(24.0)</b>	14/34 (41.2)	13/32 (40.6)	18/57 (31.6)	13/32 (40.6)	25/77 (32.5)	<b>23/52</b> <b>(44.2)</b>

## 참고문헌

- 강윤수·김민주 (2013). 문제해결 과정에서 나타난 고등학생들의 수학적 추론 특성. 한국학교수학회논문집, **16(1)**, 241-263.
- 김선희·김기연 (2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. 학교수학, **6(3)**, 283-299.
- 김원경 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)비상교육.
- 김창동 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)교학사.
- 남승인 (1999). 초등수학교육에 있어서의 추론 방법. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **87**, 45-63.
- 도중훈 (2007). 학교수학에서 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동 설계하기. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **46(1)**, 69-79.
- 류희찬 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)천재교과서.
- 박경옥·박영희 (2003). 수학적 문제해결력 및 추론능력과 관련된 정의적 요소와 그 차이에 관한 분석 -6학년 아동을 중심으로-. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, **7(2)**, 101-116.
- 방정숙·전평국 (1997). 국민학교 아동의 수학적 추론 능력 향상을 위한 방안 탐색. 한국수학교육학회 프로시딩, **3**, 107-123.
- 배혜정·남승인 (2005). 아동의 메타인지를 유발하는 발문이 수학적 추론능력에 미치는 영향. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, **9(1)**, 43-58.
- 서동엽 (2003). 초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석. 수학교육학연구, **13(2)**, 159-178.
- 신이섭 외 (2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 서울: 한국과학창의재단.
- 신준식·고정화·박문환·박성선·서동엽 (2011). 수학적 사고력 측정을 위한 수학 평가 도구의 개발. 한국초등수학교육학회지, **15(3)**, 619-640.
- 신향균 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)지학사.
- 우정호 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)두산동아.
- 유상휘·송상헌 (2013). 사다리꼴 넓이 구하기 활동에서 나타나는 수학적 의사소통과 유추적 사고 과정 분석. 수학교육학연구, **23(2)**, 253-267.
- 이강섭 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)미래엔.
- 이병수·강미광·양규한 (1997). 수학적 추론에 관한 소고. 한국수학교육학회 프로시딩, **5**, 335-354.
- 이성근·류희수 (2012). 귀납적 추론의 과정 분석. 학교수학, **14(1)**, 85-107.
- 이영주·전평국 (1999). 초등학교 고학년 아동의 정의적 특성, 수학적 문제 해결력, 추론능력간의 관계. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **8**, 137-150.
- 이종희·김선희 (2002). 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 실태 조사 -수학적 추론 유형 중심으로-. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **41(3)**, 273-289.
- 이종희 외 (2003). 수학적 추론의 학습-지도 방안 탐색 및 현장 적용 -개연적 추론을 중심으로-. 대한수학교육학회 프로시딩, **1**, 523-550.
- 이준열 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)천재교육.
- 이화영·장경윤 (2012). 초등학생의 대수 추론 능력과 조기 대수(Early Algebra) 지도(1). 학교수학, **14(4)**,

445-468.

- 전평국·정재숙 (2002). 전제의 해석 유형이 아동의 수학적 추론 결과에 미치는 영향 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **13**, 161-167.
- 정상권 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)금성출판사.
- 정현실·김진호 (2013). 구성주의 수학 수업이 추론능력에 미치는 영향 -초등학교 2학년 곱셈을 중심으로-. 한국학교수학회논문집, **16(1)**, 31-61.
- 최지영·방정숙 (2011). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 신장 방안 탐색 -y곱셈의 결합법칙 탐구에 관한 수업 사례 연구-. 학교수학, **13(4)**, 581-598.
- 황선욱 외 (2014). 고등학교 수학 II. 서울: (주)좋은책신사고.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for School Mathematics*, VA:Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2009). *Focus in High School Mathematics Reasoning and Sense Making*, 김성경 역(2013). 고등학교 수학에서 추론하기와 이해하기. 서울: 경문사.
- Thomson. D. R., Sharon L. Senk, & Gwendolyn J. Johnson (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Reasoning in Mathematics Education*, **43(3)**, 253-295
- Thomson D. R. (2012). Reasoning and Justification in the Secondary Mathematics Classroom. In Berinderjeet Kaur & Toh Tin Lam (Eds.), *Reasoning, Communication and Connections in Mathematics* (pp. 89-106). National Institute of Education, Singapore.
- Johnson G. J., Deniss R. Thomson, & Sharon L. Senk (2010). Reasoning in High School Textbooks. *Mathematics Teachers*, **103(6)**, 411-417.

## An Investigation on the Reasoning Types of Mathematical Problems on the Content of 'Set and Statement' and 'Sequences'

**Hwang, Hye Jeang**

Chosun University  
E-mail : sh0502@chosun.ac.kr

**Kim, Seul Bi<sup>†</sup>**

Chosun University  
E-mail : ksbshs@hanmail.net

Recently, mathematical reasoning has been considered as one of the most important mathematical thinking abilities to be established in school mathematics. This study is to investigate the mathematical problems on the content of 'Set and Statement' and 'Sequences' in high school according to the four types of reasoning, namely Making Conjectures, Investigating Conjectures, Developing Arguments, and Evaluating Arguments. Those types of reasoning were reconstructed based on Johnson's six types of reasoning suggested in 2010. The content is dealt with in 'Mathematics II' textbook developed and published according to the mathematics curriculum revised in 2009. The subject of this study is nine types of textbooks and mathematical problems in the textbook are consisted of as two parts of 'general problem' and 'evaluation problem'. Finally, the results of this study can be summarized as follow:

First, it is stated that students be establishing a logical justification activity, the highest reasoning activity through dealing with the 'Developing Arguments' type of problems affluently in both 'Set and Statement' and 'Sequence' chapters of Mathematics II textbook. Second, it is mentioned that students have an chance to investigate conjectures and develop logical arguments in 'Set and Statement' chapter of Mathematics II textbook. In particular, whereas they have an chance to investigate conjectures and also develop arguments in 'Statement', the 'Set' chapter is given only an opportunity of developing arguments. Third, students are offered on an opportunity of reasoning that can make conjectures and develop logical arguments in 'Sequences' chapter of Mathematics II textbook. Fourth, Mathematics II textbook are geared to do activities that could evaluate arguments while dealing with the problems relevant to 'mathematical process' included in 'general problem'.

---

\* This study was supported by research fund from Chosun University, 2014.

\* ZDM Classification : U24

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

\* Key Words : reasoning, the type of reasoning, Set and Statement, Sequences

† Corresponding author