

수학 교사의 증명과 증명 지도에 대한 인식 - 대학원에 재학 중인 교사를 중심으로 -

나 귀 수 (청주교육대학교)

본 연구에서는 대학원에 재학 중인 중·고등학교 수학 교사 36명을 대상으로 증명 및 증명 지도에 대한 인식을 조사하였다. 본 연구의 결과, 대부분의 교사들이 증명의 정당화 역할은 잘 인식하지만, 설명(확인), 이해, 발견, 의사소통, 체계화, 수학적 표현의 사용 등으로서의 역할은 미흡하게 인식하며, 많은 교사들이 증명의 조건에 대해 혼란스러운 개념을 가지고 있는 것으로 나타났다. 증명 지도의 이유에 대해서는 논리적 사고력 함양, 수학적 사고력 신장, 명제의 이해, 참인 명제의 확인, 수학의 본질 이해, 수학 지식 증가, 수학적 표현 증진, 수학의 즐거움 경험, 의사소통, 엄밀성 추구, 연계성 추구 등의 다양한 의견을 제시하였다. 증명 지도의 수행과 관련하여, 상당수의 교사들이 실제 증명 지도가 미흡하게 이루어지고 있다고 응답했으며, 학생들의 두려움과 흥미 부족, 증명 지도 시간 부족, 학생 사고 수준 미흡, 지도 방식 미흡 등을 증명 지도의 제약 조건으로 언급하였다. 한편, 본 연구에서는 '증명'이라는 수학적 용어가 누락된 2009 개정 수학과 교육과정의 성취기준을 살펴보았다. '...를 이해하고 설명할 수 있다'는 성취기준은 증명 교수-학습과 관련하여 적절하지 않으며, 특히 논리적 추론이나 정당화 과정을 증명과 동일시하는 미흡한 개념을 가지고 있는 교사들에게 더욱 큰 혼란을 줄 위험이 있음을 확인하였다.

I. 연구의 필요성 및 목적

증명은 수학과 학교수학에서 핵심적인 내용이다. 증명과 관련하여, 우리나라의 2009 개정 수학과 교육과정에서는 수학적 추론 능력을 신장시키기 위하여 <교수·학습 방법>에서 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고, 이를 정당화할 수 있게 할 것을 강조하고 있다(교육과학기술부, 2011). NCTM(2000)에서는 '추론과 증명' 규준에서 학생들이 추론과 증명을 수학의 가장 근본적인 측면으로서 인식하고, 수학적 논쟁과 증명 능력을 개발하고 평가할 수 있어야 한다고 주장하였다. 특히 중학교에서는 연역적 추론을 통해 수학적 논의를 형식화시킴으로써 추론 능력을 발전시키고 확장할 것을 강조하였다.

선행 연구들에 따르면, 증명은 학생들이 가장 어려워하는 수학 내용 중의 하나이며, 학생들은 학교에서 증명을 학습한 이후에도 여전히 증명을 제대로 수행할 수 없다고 한다(Balacheff, 1991; Healy & Hoyles, 2000; Ellis, Bieda, & Knuth, 2012; Hanna & de Villiers, 2012). 우리나라에서도 학생들의 증명 학습 및 증명 학습에서의 어려움과 관련하여 많은 연구들이 이루어졌다(서동엽, 1999; 이종희·김부미, 2004; 조정수·이정자, 2006; 한혜숙·신현성, 2008).

본 연구에서는 중·고등학교 수학 교사를 대상으로 증명 및 증명 지도에 대한 인식을 조사하고자 한다. 서술형 질문에 대한 교사들의 응답을 정밀하게 분석하여, 수학에서 증명의 역할, 증명의 조건, 증명 지도의 필요성과 이유, 증명 지도의 수행 정도와 제약 조건 등을 조사하고자 한다. 또한 증명 관련 성취기준에서 큰 변화를 나타낸 2009 개정 수학과 교육과정의 성취기준을 교사들의 증명 및 증명 지도 인식과 함께 살펴보고자 한다.

* 접수일(2014년 8월 27일), 심사(수정)일(2014년 10월 6일), 게재 확정일(2014년 11월 17일)

* ZDM 분류 : C13

* MSC2000 분류 : 97C50

* 주제어 : 수학 교사 인식, 증명, 증명 지도

II. 선행 연구 고찰

이 장에서는 수학에서의 증명의 다양한 역할, 수학에서 증명의 역할에 대한 교사의 신념, 학교수학에서의 증명에 대한 교사의 신념 등에 대한 선행 연구들을 살펴보기로 한다.

1. 수학에서 증명의 역할

수학에서의 증명의 역할에 대해서는 다양한 선행 연구가 이루어졌는데, 여기에서는 대표적인 몇몇 연구를 중심으로 살펴보기로 한다. Ellis, Bieda, & Knuth(2012)은 수학에서의 증명의 역할로서 다섯 가지를 언급하고 있는데, 어떤 명제의 참이나 거짓을 정당화하기 위한 것(정당화), 어떤 명제가 왜 참인가에 대한 통찰력을 제공하는 것(통찰), 새로운 이론이나 아이디어를 발달시키기 위한 출발점을 제공하는 것(발달), 수학적 지식을 의사소통하기 위한 적절한 구조를 생성하는 것(의사소통), 간결한 수학적 언어의 사용을 위한 동력을 제공하는 것(간결한 수학적 언어의 사용) 등이 그것이다.

Knuth(2002a)는 어떤 명제가 참임을 밝히기 위한 것(정당화), 어떤 명제가 왜 참인가를 설명하기 위한 것(설명), 어떤 명제가 왜 참인가를 이해하기 위한 것(이해), 수학적 지식을 의사소통하기 위한 것(의사소통), 새로운 수학을 발견하거나 생성하기 위한 것(발견), 명제들을 공리적 체계로 체계화하기 위한 것(체계화) 등으로 수학에서 증명의 역할을 범주화하였다. 한편 나귀수(1998)는 증명의 다양한 역할을 수리철학적, 교수학적 관점에서 분석하였다. 나귀수에 따르면, 대표적인 수리철학이라고 할 수 있는 절대주의, 준경험주의, 사회적 구성주의에서는 증명의 역할을 각각 정당화, 발견, 확신과 이해로 파악하였다. 또한 Freudenthal(1973)은 교수학적 관점에서 증명 교육을 논하면서 수학자들의 활동에서 증명이 조직화의 역할을 함을 강조하였다.

이와 같은 선행 연구에서 나타난 범주들을 결합하여, 본 연구에서는 증명의 역할을 정당화, 설명(확인), 이해, 발견, 의사소통, 체계화(조직화), 수학적 표현의 사용 등으로 범주화하였다. Ellis, Bieda, & Knuth(2012)에서 언급한 통찰 범주와 발달 범주는 각각 설명(확인) 범주와 발견 범주에 포함된다. 또한 사회적 구성주의에서 강조하는 확신, 즉 다른 사람을 확신시키기 위한 것으로서의 증명의 역할은 의사소통 범주에 포함되며, Freudenthal이 강조한 조직화로서의 증명의 역할은 체계화(조직화)의 범주에 포함된다.

2. 수학 및 학교수학에서의 증명에 대한 교사의 신념

수학에서 증명의 역할에 대한 교사의 신념과 관련된 선행 연구들을 살펴보면, Chazan(1993)은 왜 수학자들이 증명에 우선순위를 부여하는가를 많은 교사들이 이해하지 못한다고 보고하였다(Cabassut et al., 2012에서 재인용). 그러나 Knuth(2002a)가 미국의 9-12학년을 담당하는 현직 교사 16명을 대상으로 반구조화된 인터뷰 방법을 활용하여 조사한 연구에 따르면, 모든 교사들이 어떤 명제의 참을 확립하는 것이 증명의 역할이라고 언급하였다. 12명(75.0%)의 교사들은 수학의 의사소통을 위해, 8명(50.0%)의 교사들은 지식의 생성을 위해 증명이 필요하다고 하였다.²⁾ 그리고 3명(18.8%)의 교사들은 증명이 어떤 명제가 왜 참인가에 대한 설명의 역할을 한다고 언급하였는데, 이 교사들은 증명이 설명의 역할을 하면서 이해를 증진시키기 보다는 증명의 절차에 집중하는 것으로 나타났다.

교사들의 증명 지도 이유와 관련된 선행 연구를 살펴보면, Knuth(2002b)는 미국의 중고등학교 교사 17명을 대상으로 설문지 조사와 인터뷰를 함께 실시하여 학교수학에서 증명의 역할을 조사하였다. 연구 결과에 따르면,

2) 본 논문에서 제시된 백분율은 Knuth(2002a, 2002b)에서는 제시되지 않은 것이며, 본 연구자가 편의상 제시한 것이다.

논리적 사고 기능의 발달(13명, 76.5%), 수학을 의사소통하기(10명, 58.8%), 사고를 표현하기(4명, 23.5%), 어떤 명제가 참인 이유를 설명하기(7명, 41.2%), 수학 지식을 만들기(4명, 23.5%) 등을 학교수학에서의 증명의 역할로 언급하였다. 일부 교사들은 증명이 오직 고등 수학 수업이나 수학과 관련된 분야를 공부할 학생들에게만 필요하며, 중등학교 수학 전반에 걸친 핵심적인 아이디어가 되어야 한다고는 생각하지 않았다. 대조적으로 모든 교사들은 비형식적 증명이 중등학교 수학 전반에 걸쳐 핵심적인 아이디어가 되어야 한다고 언급하였다.

Furinghetti & Morselli(2009)는 교실에서 증명이 다루어지는 방식에 대한 두 가지 경향, 즉 정리를 지도하는 것과 증명을 통해 지도하는 것을 확인하였다. 정리를 지도하는 경향에서는 수학적 사실들을 확인하고 체계화하기 위한 수단으로 증명을 파악하며 산물로서의 증명에 초점을 맞춘다. 증명을 통해 지도하는 경향에서는 주로 수학적 이해를 증진하는 데에 증명을 활용하며, 과정으로서의 증명에 초점을 맞춘다.

박은조(2004)는 한국의 현직 수학 교사 125명이 응답한 설문지를 활용하여 증명에 대한 교사들의 전반적인 인식과 증명 표현 양식 및 증명 능력을 조사하였다. 연구 결과, 수학 교사들은 증명을 가정에서 결론을 이끌어 내는 연역으로 인식하고, 입증과 논리적 사고력을 기르는 수단으로 인식하는 것으로 나타났다. 수학 교사들의 실제 지도 방법은 증명을 학생들이 이해해야 하는 하나의 학습 과제로 다루는 것이었으며, 기호화된 연역적 증명인 형식적 증명을 선호하였다. 또한, 수학 교사들의 증명 능력은 비교적 높은 것으로 나타났으며, 수학 교사들의 증명에 대한 지식은 교과서 의존도가 높은 것으로 나타났다.

김혜현(2011)은 중등 예비교사 20명을 대상으로 중학교 2학년 기하 증명에 대한 학습자 이해와 교수 방법에 대한 지식을 조사하였다. 연구 결과, 대부분의 예비교사들은 증명을 절대주의 관점에서 이해하고 있었고, 준경험주의나 사회적 구성주의 관점으로 증명을 이해하는 예비교사는 거의 없었다. 증명의 지도 방안으로는 분석법을 통한 지도, 학생 수준에 맞는 다양한 증명 방법, 발문을 통한 수업 등을 제시하였고, 증명 도입 방식으로는 그림이나 구체적 조작물 사용, 증명의 필요성을 자연스럽게 도입하기를 제시하였다. 그리고 학생들의 증명 오류에 대해서는, 증명 과정의 일부를 생략하는 오류, 기술적인 오류, 연산자의 오류 등을 제시하였다.

본 연구에서는, 이상에서 살펴본 선행 연구를 토대로, 서술형 질문에 대해 교사들이 언어적으로 기술한 응답을 세밀하게 분석하여 교사들의 증명 및 증명 지도에 대한 인식을 조사하고자 한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구에서는 종합대학교의 사범대학 대학원에 재학중인 36명의 중·고등학교 수학 교사들을 대상으로 조사 연구를 실시하였다. 본 연구의 조사에 참여한 교사들이 재학 중인 대학원은 모두 4곳이었으며, 광역시와 중소도시에 위치한 곳이 각각 2곳씩이었다. 교사들의 경력과 재직 중인 학교가 위치한 지역에 대한 정보는 각각 <표 III-1>, <표 III-2>와 같다.

<표 III-1> 참여 교사들의 경력

근무 경력	3년 미만	3~5년	6~10년	10년 초과	계
교사 (명)	10	5	13	8	36

<표 III-2> 참여 교사들의 재직 학교

지역	서울	경기	대전	광주	대구	부산	충북	충남	전남	경북	경남	강원	계
교사 (명)	3	3	2	5	11	1	4	1	2	1	2	1	36

2. 검사 도구

본 연구에서는 선택형 질문과 서술형 문항을 활용하여 수학 교사들의 증명 및 증명 지도에 대한 인식을 조사하였다. 본 연구에서 활용한 문항들은 Knuth(2002a, 2002b)에 제시된 것을 참고하였다. 본 연구에서 활용한 조사지는 다음의 <표 III-3>과 같다. 1번 문항과 2번 문항은 증명에 대한 교사들의 인식을 확인하기 위한 것이고, 3~6번 문항은 증명 지도에 대한 인식을 조사하기 위한 것이다.

<표 III-3> 조사 내용

<p>※ 다음의 각 질문에 대해 귀하의 생각을 상세하게 적어 주십시오.</p> <p>1. 수학에서 증명의 역할은 무엇이라고 생각합니까?</p> <p>2. 어떤 논쟁(또는 주장)이 증명이 되려면 어떤 조건을 만족해야 합니까?</p> <p>3. 학생들에게 증명을 지도해야 한다고 생각하십니까?</p> <p>① 매우 동의함 ② 동의함 ③ 동의하지 않음 ④ 전혀 동의하지 않음</p> <p>4. 학생들에게 증명을 지도하는 이유는 무엇인지 기술해 주십시오.</p> <p>5. 증명 지도는 어느 정도 수행되고 있습니까?</p> <p>① 매우 잘 수행 ② 잘 수행 ③ 미흡하게 수행 ④ 매우 미흡하게 수행</p> <p>6. 증명을 지도하는 데에 있어서 제약조건이 있다면 그것은 무엇입니까?</p>
--

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서는 2013년 전반기에 교사들이 대학원 강의에 참여하는 기간에 조사지를 배포하였다. 교사들에게 서술형 문항에 대해 자신의 의견을 최대한 자세하게 기술하도록 요청했으며, 교사들이 충분한 시간을 갖고 조사지에 응답할 수 있도록 하였다.

본 연구에서의 자료 분석은 다음과 같은 과정으로 진행되었다. 먼저 1번과 같은 서술형 문항에 대해서는 교사들의 응답에서 핵심 단어들을 추출하여 기술적 주제(descriptive themes)를 결정하고 이 주제들을 선행 연구에서 확인된 이론적 주제(theoretical themes)와 조합하여 응답 범주들을 결정하였다. 예를 들어, 1번 문항에서 응답 범주는, 정당화, 설명(확인), 이해, 발견, 의사소통, 체계화(조직화), 수학적 표현의 사용, 엄밀성 추구, 수학의 본질 추구 등으로 결정되었는데(<표 IV-1> 참고), 여기에서 정당화, 설명(확인), 이해, 발견, 의사소통, 체계화(조직화), 수학적 표현의 사용 등의 범주는 이론적 주제인 동시에 기술적 주제이며, 엄밀성 추구, 수학의 본질 추구 등의 범주는 교사들의 응답에서만 나타난 기술적 주제이다.

다음으로 2번, 4번, 6번과 같은 서술형 문항에 대해서는 교사들의 응답에서 핵심 단어들을 추출하여 기술적 주제로 범주를 정하여 교사들의 응답 빈도를 세고 백분율을 구하였다. 마지막으로, 3번이나 5번과 같은 선택형 문항에 대해서는 각각의 보기를 택한 교사들의 응답 빈도를 세고 백분율을 구하여 경향성을 확인하였다.

IV. 결과 및 논의

1. 수학에서 증명에 대한 교사들의 인식

이 절에서는 수학에서 증명의 다양한 역할과 어떤 논쟁(argument)이 증명이 되기 위해 갖추어야 할 조건에 대한 교사들의 인식을 중심으로 증명에 대한 교사들의 개념을 살펴보기로 한다.

가. 수학에서 증명의 역할

수학에서 증명의 역할에 대한 교사들의 인식은 다음의 <표 IV-1>과 같다.³⁾

<표 IV-1> 수학에서 증명의 역할에 대한 교사들의 인식

증명의 역할	정당화	설명 (확인)	이해	발견	의사소통	체계화 (조직화)	수학적 표현의 사용	엄밀성 추구	수학의 본질 추구
응답 빈도 (명: %)	29 (80.6)	11 (30.6)	6 (16.7)	6 (16.7)	5 (13.9)	4 (11.1)	1 (2.8)	4 (11.1)	2 (5.5)

먼저, 이론적 주제이면서 기술적 주제에 속하는 범주들을 살펴보면, 교사들은 증명이 어떤 명제의 참이나 거짓을 정당화하는 역할을 가장 많이 언급하였다(29명, 80.6%). 교사들은 ‘수학적 지식을 정당화하기 위한 것’, ‘결론이나 추측이 참임을 밝히는 것’, ‘어떤 것이 참임을 보여주기 위한 것’ 등으로 정당화로서의 증명의 역할을 언급하였다.⁴⁾ 설명(확인)으로서의 증명의 역할을 강조한 교사들은 11명(30.6%)로 나타났으며, 교사들은 수학에서 증명이 어떤 명제가 참임을 확인하는 역할을 한다고 강조하였다. 교사들은 ‘그 내용이 옳다는 것을 설명하기’, ‘참인 명제를 수학적 논리로 확인하기’, ‘명제가 참임을 받아들이는 이유가 된다’ 등으로 확인으로서의 증명의 역할을 언급하였다.

이해로서의 증명을 강조한 교사들은 6명(16.7%)으로 나타났다. 교사들은 ‘명제를 정확히 이해하게 하기’, ‘정리를 더 깊이 이해하는 수단’, ‘증명은 개념 이해를 열어주는 수단’ 등을 언급하면서 수학에서 증명이 어떤 명제를 이해하기 위해 필요함을 강조하였다. 발견으로서의 증명의 역할을 강조한 교사들은 6명(16.7%)이었다. 교사들은 ‘수학의 새로운 개념을 창출하게 하는 원동력이다’, ‘지식을 구성하여 새로운 영역으로 나아가는 것’ 등을 강조하였다.

의사소통으로서의 증명을 강조한 교사들은 5명(13.9%)으로 나타났으며, ‘사회수학적인 합의를 이끌어내는 과정’, ‘어떤 것을 다른 사람이 납득할 수 있도록 기술하는 것’ 등을 강조하였다. 체계화 및 조직화로서의 증명을 강조한 교사들은 4명(11.1%)이었다. 교사들은 체계화로서의 증명의 역할을 ‘개념을 체계화하고 수학적 체계를 이해하는 것’, ‘수학적 사실을 조직화한다’ 등으로 언급하였다. 수학적 표현과 언어 사용을 위한 자극제로서의 증명

3) <표 IV-1>, <표 IV-4>, <표 IV-6>에 제시된 빈도는 해당 범주가 언급된 교사들의 수를 모두 센 것이므로, 빈도의 총합이 36을 넘게 된다. 예를 들어, 어떤 교사A가 증명의 역할로서 정당화와 의사소통을 모두 제시했다면, 교사A의 응답은 정당화 범주에서도 세어지고 의사소통 범주에서도 세어지게 되므로, 빈도의 총합은 36을 넘게 된다.

4) 교사들의 구체적인 응답 내용을 더욱 자세하고 다양하게 제시함으로써 교사들의 생생한 목소리를 전달하는 것이 바람직하겠지만, 여기에서는 지면 관계상 각각의 범주에 해당하는 대표적 응답을 두 가지 정도 제시하기로 한다.

을 강조한 교사는 1명(2.8%)이었으며, 이 교사는 ‘수학적 표현을 논리적으로 하고, 그것이 참 또는 거짓임을 형식적인 기호를 사용하여 서술하고 표현하기 위한 것’이라고 언급하였다.

다음으로, 교사들의 응답에서만 나타난 기술적 주제를 살펴보면, 4명(11.1%)의 교사들이 수학에서 증명이 엄밀성 추구의 역할을 한다고 강조하였다. 교사들은 ‘수학의 기초/전문 지식을 엄밀하게 하고 개념을 엄밀하게 하는 것’, ‘수학 주제를 엄밀하게 보이기 위해서’ 등을 언급하였다. 한편, 수학의 본질 추구로서 증명의 역할을 언급한 교사들은 2명(5.5%)로 나타났다. 이 교사들은 ‘수학의 본질을 이해하는 것이다’, ‘수학의 본질을 알기 위함’ 등을 증명의 역할로서 언급하였다. 이 교사들은 수학과 증명을 동일시하고 있으며, 증명을 하는 것 자체가 수학의 본질이라고 인식하는 것으로 판단된다. 엄밀성 추구와 수학의 본질 추구로서의 증명의 역할은 선행 연구에서는 보고되지 않은 것으로서, 우리나라 교사들이 수학에서의 증명의 역할에 대해 더욱 다양한 관점을 가지고 있음을 확인할 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이, 선행 연구들에서 제시된, 수학에서 증명의 역할로서 정당화, 확인, 이해, 발견, 의사소통, 체계화, 간결한 수학적 언어의 사용 등을 인식하고 있는 교사들은 각각 29명(80.6%), 11명(30.6%), 6명(16.7%), 6명(16.7%), 5명(13.9%), 4명(11.1%), 1명(2.8%)로 나타났다. 이러한 결과로부터, 정당화의 역할을 제외하고 수학에서 증명의 다양한 역할에 대한 우리나라 교사들의 인식이 미흡함을 확인할 수 있다. Harel & Sowder(2007)는 광범위한 선행 연구 고찰을 통해, 교사들이 수학에서의 증명의 여러 가지 중요한 역할을 이해하지 못하며, 특히 증명의 설명적 역할을 가장 잘 인식하지 못한다고 결론지었다. 본 연구의 결과는 Harel & Sowder의 주장과 부분적으로 일관된다고 할 수 있다. 다시 말해서, 우리나라의 교사들 또한 수학에서의 증명의 여러 가지 중요한 역할을 충분히 인식하지는 못하지만, 증명의 설명적 역할을 가장 잘 인식하지 못하는 것은 아니다.

한편, 어떤 명제가 참임을 밝히기 위한 정당화로서의 증명은 학생들의 학습에서 한계를 드러낼 수 있다. 예를 들어, ‘정삼각형의 세 각의 크기가 같다’는 명제가 참임을 밝히기 위한 정당화로서의 증명은 중학교 2학년 학생들에게 의미가 없다. 왜냐하면 학생들은 이미 초등학교에서 정삼각형의 세 각의 크기가 같다는 성질이 참임을 귀납 추론을 통해 학습해서 알고 있기 때문이다. 다시 말해서, 이미 참이라고 알고 있는 수학적 성질에 대해 참임을 정당화하기 위해 증명을 하도록 학생들에게 요구는 것은 무의미한 것이다.⁵⁾ 또한 학생들은 증명을 의미없는 형식적인 절차에 불과한 것으로 인식함으로써 증명에 대한 잘못된 개념 이미지를 갖게 될 위험성이 있다.

그러므로 학생들이 이미 알고 있는 수학적 지식에 적절하게 증명의 다양한 필요성과 역할을 경험하도록 교사들이 안내할 필요가 있다. 이러한 안내와 지도가 가능하려면 교사들이 먼저 증명의 다양한 역할을 인식하고 경험할 필요가 있다. 교사 본인이 인식하고 경험하지 못한 것을 학생들이 경험할 수 있도록 지도하는 것은 사실상 불가능하기 때문이다.

위에서 살펴본 바와 같이, 수학에서 증명의 다양한 역할에 대한 교사들의 인식은 미흡한 것으로 나타났다. 증명의 다양한 역할에 대한 교사들의 미흡한 인식은 학생들을 대상으로 하는 증명 지도에 반영될 가능성이 매우 높다. 교사들이 수학에서 증명의 다양한 역할을 인식하고 경험할 수 있도록 예비교사나 현직교사를 대상으로 하는 교사교육 프로그램을 개선할 필요가 있다.

5) 한편, 학교수학에서 증명을 정당화의 역할로만 다루는 책임을 교과서에 돌릴 수도 있다. 이러한 입장은 교사를 단지 교과서의 소비자로 보는 바람직하지 못한 관점이다. ‘소비자로서의 교사’가 아니라 ‘설계자로서의 교사’는(Posner & Rudnitsky, 2006) 교과서의 장점과 단점을 분석하고 교과서의 한계를 극복하여 의미있는 교수-학습 활동을 구성할 필요가 있다.

나. 증명의 조건

어떤 논쟁이 증명이 되기 위해 반드시 갖추어야 할 필수적인 조건은 연역성이다. 우리나라의 중학교 교과서에는 증명의 정의를, ‘실험이나 관찰에 의하지 않고, 이미 알고 있는 옳은 사실이나 밝혀진 성질들을 이용하여 주어진 명제가 참임을 보이는 것을 증명이라고 한다(최용준 외, 2011)’, ‘실험이나 측정에 의하지 않고, 이미 알고 있는 참인 명제나 정의를 이용하여 어떤 명제가 참임을 밝히는 것을 증명이라고 한다(정상권 외, 2011)’ 등과 같이 제시하고 있다.⁶⁾ 이와 같은 증명의 정의를 살펴보면, 실험, 관찰, 측정 등에 의하지 않는 연역적 추론을 증명의 정의로서 제시하고 있음을 확인할 수 있다.

Ellis, Bieda, & Knuth(2012)에서는 증명을 다음과 같이 정의하고 있다. 논리성과 연역성을 갖춘 특별한 유형의 논쟁이 증명임을 확인할 수 있다.

증명은 어떤 주장을 지지하거나 반박하기 위해 명제들이 연역적이고 논리적으로 연결되어 있는 특별한 유형의 수학적 논쟁이다(A proof is a specific type of mathematical argument, which is a connected sequence of deductive, logical statements for or against a mathematical claim).

‘어떤 논쟁(argument)이 증명(proof)이 되려면 어떤 조건을 만족해야 하는가?’라는 질문에 대한 교사들의 응답에서 나타난 주제와 빈도를 제시하면 다음의 <표 IV-2>과 같다.

<표 IV-2> 증명의 조건에 대한 교사들의 인식

증명의 조건	연역성			논리성	기타 (일반적 용어)	계
	연역성과 논리성	연역성	연역성과 공리성			
응답 빈도 (명: %)	8 (22.2)			19 (52.8)	9 (25.0)	36 (100.0)
	4 (11.1)	2 (5.5)	2 (5.5)			

연역성을 증명의 조건으로 언급한 교사들은 8명(22.2%)에 불과했다. 이 중에서 4명(11.1%)은 논리성과 연역성을 모두 갖추어야 증명이 된다고 언급하였다. 이 교사들은 ‘참에 대하여 추론하는 과정을 논리적이고 연역적으로 보여야 한다’, ‘정의, 공리, 정리 등을 이용하여 논리적으로 참-거짓을 밝히고, 주어진 가정을 사용하여 연역적으로 결론을 이끌어 내야 한다’ 등과 같이 언급하였다. 증명의 조건으로서 연역성만을 강조한 교사들은 2명(5.5%)이었으며, ‘주어진 가정을 사용하여 연역적으로 결론을 이끌어 내야 한다’, ‘정리가 참임을 연역적으로 밝혀야 한다, 즉 가정이나 이미 아는 것을 바탕으로 결론을 이끌어내어야 한다’ 등과 같이 언급하였다. 증명의 조건으로서 공리성을 언급한 교사들은 2명(5.5%)이었으며, ‘정해진 공리 체계 안에서 수학적 조건들을 만족하는 성질들을 이용해 필요한 명제의 참임을 밝혀야 한다’, ‘어떤 주장이 증명이 되려면 공리를 이용해서 나온 증명된 것들이 바탕이 되고 연역적 추론이어야 한다’ 등과 같이 강조하였다.

19명(52.8%)의 교사들은 증명이 갖추어야 할 조건으로 논리성만을 언급하였다. 이 교사들은 ‘명제의 참-거짓

6) 2009 개정 수학과 교육과정에서 ‘증명’이라는 용어가 누락되어 있고 교과서에서도 ‘증명’이라는 용어가 등장하지 않는다. 이런 이유로 인해 여기에서 소개하는 증명의 정의는 2007 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에 실린 내용이다.

을 논리적으로 보여주어야 한다’, ‘확실한 논리적 근거를 발전시켜 참임을 확인해야 한다’ 등과 같이 언급하면서 논리성을 강조하였다. 9명(25.0%)의 교사들은 어떤 논쟁이 증명이 되는 조건에 대해 일반적인 단어를 사용하여 모호하게 언급하였다. 이 교사들은 ‘참임을 밝히는 과정이면 된다’, ‘합리적 추론이라면 특별한 조건은 필요하지 않다’, ‘사실임을 밝히고 설명할 수 있어야 한다’ 등과 같이 언급하였다. 이 교사들은 수학에서 증명을 어떤 특별한 조건을 갖추어야 하는 논쟁으로 파악하지 않으며, 증명에 대해 지나치게 완화된 관점을 가지고 있다고 할 수 있다.

위에서 살펴본 바와 같이 상당수의 교사들(19명, 52.8%)이 증명의 조건으로서 논리성만을 언급하였다. 그렇다면, 어떤 논쟁이 논리성만 갖추고 있으면 증명으로 성립하는 것인가? 여기에서 논리성은 증명의 조건으로 충분한가를 살펴볼 필요가 있다. 귀납 추론이나 유비 추론 또한 개연성이 큰 논리적 추론이지만, 귀납 추론이나 유비 추론을 증명이라고 할 수는 없다. 따라서 어떤 논쟁이 논리적이라고 해서 그것이 증명으로 성립되는 것은 아니다.

증명의 조건으로서 논리성만을 언급한 교사들은 논리적 추론과 증명을 동일시하는 경향이 있다고 할 수 있다. 이 교사들과 일반적인 용어로 증명의 조건을 언급한 교사들(9명, 25.0%)을 함께 고려해 볼 때, 우리나라 교사들의 상당수(28명, 77.8%)는 증명의 조건에 대해 다소 모호한 개념-이미지(Vinner & Hershkowitz, 1983)를 가지고 있음을 알 수 있다. 인식 주체가 개념 A를 이해했다는 것은 개념 A의 속성을 언어적으로 표현할 수 있을 뿐만 아니라 그러한 속성을 가진 대상들을 대할 때마다 개념 A를 통해서 그것들을 볼 수 있는 능력을 의미한다(김승호, 1987).⁷⁾ 따라서 증명을 교사들이 이해해야 할 하나의 개념이라고 할 때, 논리성과 일반적인 단어로 증명의 조건을 언급한 교사들은 증명이라는 개념에 대해 미흡한 이해 상태에 놓여 있다고 할 수 있다.

2. 학교수학에서 증명 지도에 대한 교사들의 인식

이 절에서는 학교에서 증명 지도의 필요성, 증명 지도의 이유, 증명 지도의 수행 정도, 증명 지도의 제약 조건 등을 중심으로, 학교수학에서의 증명 지도와 관련된 교사들의 인식을 살펴보기로 한다.

가. 증명 지도의 필요성과 이유

증명 지도의 필요성에 대한 교사들의 인식은 다음의 <표 IV-3>과 같다. 학생들에게 증명을 지도해야 하는지에 대하여, 11명(30.6%)의 교사들은 ‘매우 동의한다’에, 23명(63.9%)의 교사들은 ‘동의한다’에 응답하였다. 대부분의 교사들(34명, 94.5%)은 학생들에게 증명을 지도해야 한다고 생각하는 것을 확인할 수 있다.

<표 IV-3> 증명 지도의 필요성 인식

증명 지도의 필요성	매우 동의함	동의함	동의하지 않음	전혀 동의하지 않음	계
응답 빈도 (명: %)	11 (30.6)	23 (63.9)	2 (5.5)	0 (0.0)	36 (100.0)

7) 본 연구에서 조사한 결과는 교사들이 증명의 조건에 대해 언어적으로 기술해 놓은 내용에 근거한 것이다. 따라서 교사들의 증명에 대한 이해 상태를 더욱 명확하게 파악하기 위해서는 어떤 사례를 증명의 예로 판단할 수 있는지 그렇지 않은지에 대한 연구가 추가적으로 실시될 필요가 있다. 예를 들어 논리적 추론의 한 유형인 귀납적 추론을 통해 어떤 수학 명제의 참을 밝히는 정당화 과정을 증명의 예로 판단하는지 그렇지 않는지에 대한 추후 연구가 필요하다고 하겠다.

증명 지도의 이유에 대한 교사들의 인식은 다음의 <표 IV-4>와 같이 다양한 범주로 나타났다. 교사들이 학생들에게 증명을 지도하는 이유로 가장 많이 언급한 것은 논리적 사고력 함양이었다(17명, 47.2%). 다음으로 수학적 사고력 신장(11명, 30.6%), 명제의 이해(9명, 25.0%), 참인 수학 명제의 확인(7명, 19.4%), 수학의 본질 이해(4명, 11.1%), 수학 지식 증가(3명, 8.3%), 수학적 표현 증진(3명, 8.3%), 수학의 즐거움 경험(2명, 5.6%), 의사소통(2명, 5.6%), 엄밀성 추구(2명, 5.6%), 연계성 추구(1명, 2.8%) 등으로 증명 지도의 이유를 언급하였다.

<표 IV-4> 증명 지도의 이유

증명 지도의 이유	논리적 사고력	수학적 사고력	명제의 이해	참인 명제의 확인 및 설명	수학의 본질 이해	수학 지식 증가	수학적 표현 증진	수학의 즐거움 경험	의사소통	엄밀성	연계성
응답 빈도 (명: %)	17 (47.2)	11 (30.6)	9 (25.0)	7 (19.4)	4 (11.1)	4 (11.1)	3 (8.3)	2 (5.6)	2 (5.6)	2 (5.6)	1 (2.8)

증명 지도의 이유를 구체적으로 살펴보면, 교사들은 논리적 사고 함양과 관련하여, ‘학생들에게 수학에 대한 연역적 사고와 귀납적 사고의 논리적 사고 능력을 길러주기 위해’, ‘단순 기계적 반복 학습이 아닌 사고력, 창의력, 논리력을 신장시키기 위해서’ 학생들에게 증명을 지도해야 한다고 언급하였다. 수학적 사고력 신장과 관련하여, 교사들은 ‘좀 더 수학적 사고를 정교하게 할 수 있도록’, ‘증명 과정에서 수학적 사고력이 신장되기 때문에’ 등으로 증명 지도의 필요성을 언급하였다.

명제의 이해와 관련하여, 교사들은 ‘명제 자체에 대한 이해가 깊어지기 때문에’, ‘수학 명제에 대해 관계적 이해를 할 수 있기 때문에’ 증명을 지도해야 한다고 언급하였다. 참인 명제의 확인과 관련하여, ‘수학적인 개념이 성립함을 확인할 수 있기 때문에’, ‘명제가 참이라는 것을 내적으로 확신할 수 있게 하기 위해’ 등으로 증명 지도의 필요성을 언급하였다.

수학의 본질 이해와 관련하여, 교사들은 ‘수학의 학문적 바탕을 이해하도록 할 수 있는 도구이기 때문에’, ‘수학의 본질을 깨달을 수 있도록 하기 위해서’ 증명을 지도해야 한다고 언급하였다. 수학 지식 증가와 관련하여, ‘학생들이 자신의 지식을 정리하고 새로운 지식을 추가할 수 있기 때문에’, ‘증명 과정에서 수학적 아이디어를 얻을 수 있기 때문에’ 등으로 증명 지도의 필요성을 언급하였다.

수학적 표현과 관련하여, 교사들은 ‘사고력의 표현을 다듬을 수 있는 기회이기 때문에’, ‘사고하는 과정을 수학적으로 표현하는 데에 도움을 주기 때문에’ 증명을 지도할 필요가 있다고 언급하였다. 수학적 즐거움과 관련하여, ‘증명하는 과정 속에서 수학적 기쁨을 느끼게 하기 위해서’, ‘증명이 이해되는 경우 경이로움과 신기함을 느낄 수 있기 때문에’ 등으로 증명 지도의 필요성을 언급하였다.

의사소통과 관련하여, 교사들은 ‘타인과의 의사소통 능력을 기를 수 있기 때문에’, ‘수학이 처음부터 완성된 이론으로 존재하는 학문이 아니라 논리를 발전시키며 사회적인 합의와 의사소통을 거쳐 발전되어가는 학문이라는 것을 경험할 수 있는 과정이므로’ 증명을 지도할 필요가 있다고 언급하였다. 엄밀성과 관련하여, 교사들은 ‘증명 과정에서 절대적으로 참임이 엄밀해지므로’, ‘수학의 엄밀함에 받을 내딛을 수 있으므로’ 등으로 증명 지도의 필요성을 언급하였다. 그리고 연계성과 관련하여, ‘증명에 필요한 수학적 사실을 활용하면서 수학 내용 사이의 연계성을 고려할 수 있기 때문에’ 증명을 지도할 필요가 있다고 언급하였다.

비록 직접적으로 비교할 수는 없지만, 본 연구의 결과를 선행 연구에서 살펴본 Knuth(2002b)의 연구 결과와

비교해 보면, 우리나라의 교사들이 미국의 교사들에 비해 학교수학에서 증명의 역할을 더욱 다양하게 인식하고 있음을 확인할 수 있다. 한편, 동일한 조사지를 활용하여 우리나라와 다른 나라의 교사들이 인식하는 학교수학에서의 증명의 역할을 조사하고 비교함으로써, 여러 나라의 수학 교사들이 인식하는 학교수학에서의 증명의 역할의 차이점을 분석하고 사회·문화적 맥락이 교사들의 증명 지도 인식에 어떤 영향을 미치는가를 조사하는 추후 연구가 필요하다고 하겠다.

나. 증명 지도의 수행 정도 및 제약 조건

증명 지도의 수행 정도 정도에 대한 교사들의 의견은 <표 IV-5>와 같이 나타났다. 20명(55.6%)의 교사들은 ‘미흡’, 4명(11.1%)의 교사들은 ‘매우 미흡’하다고 응답하였다. 10명(27.8%)의 교사들은 ‘잘 수행’, 2명(5.5%)의 교사들은 ‘매우 잘 수행’하고 있다고 응답하였다.

<표 IV-5> 증명 지도의 수행 정도

증명 지도 수행	매우 잘 수행	잘 수행	미흡	매우 미흡	계
응답 빈도 (명: %)	2 (5.5)	10 (27.8)	20 (55.6)	4 (11.1)	36 (100)

<표 IV-3>과 <표 IV-5>를 종합적으로 해석해보면, 대부분의 교사들은 증명 지도의 필요성은 인식하지만, 상당수의 교사들(24명, 66.7%)이 실제 수업에서 증명 지도가 제대로 수행되지 않고 있다고 생각함을 확인할 수 있다. 또한 교사들은 증명을 지도하는 데 있어서 여러 가지 제약 조건들을 다음의 <표 IV-6>과 같이 제시하였다.

<표 IV-6> 증명 지도의 제약 조건

증명 지도의 제약 조건	학생 두려움 (흥미 부족)	시간 부족	학생 사고 수준 미흡	지도 방식 미흡	학생 지식 부족
응답 빈도 (명: %)	20 (55.6)	13 (36.1)	12 (33.3)	4 (11.1)	3 (8.3)

교사들은 증명 지도의 제약 조건으로서 증명에 대한 학생들의 두려움(흥미 부족), 증명 지도 시간 부족, 학생 사고 수준 미흡, 지도 방식 미흡, 학생 지식 부족 등을 언급하였다. 구체적인 내용을 살펴보면, 첫째, 20명(55.6%)의 교사들은 증명에 대한 학생들의 두려움과 관심 부족을 증명 지도의 가장 큰 어려움으로 언급하였다. 교사들에 따르면, 학생들은 결과와 답을 제시하는 문제 풀이식 수학 학습에 익숙해져 있어서, 과정을 제시해야 하는 증명 문제는 무조건 어렵다는 생각을 하면서 회피하려 한다고 한다. 또한 학생들은, 증명 과정을 제시해야 하는 문제는 시험에서 출제되지 않으므로 증명을 충실하게 학습할 필요가 없다고 생각하며 증명에 흥미를 갖지 않는다고 한다. 교사들에 따르면, 학생들은 증명이 무슨 필요가 있는가하고 반문하면서 시험에 출제되지도 않는 데 왜 증명을 배우는가 하고 의문을 제기한다고 한다. 여기에서 증명 지도와 평가 사이에 상당한 틈이 존재하고 있음을 확인할 수 있다. 다시 말해서, 수업 시간에 교사는 증명을 지도하는 데 반해 평가에서는 학생들의 증명 능력을 평가하지 않음으로써 지도와 평가 사이에 괴리가 발생하고 있는 것이다.

그러므로 평가에서 증명 과정을 제시하도록 요청하는 서술형 문항을 적극적으로 활용함으로써 증명 지도와 평가 사이에 존재하는 괴리를 완화하기 위한 노력을 기울일 필요가 있다. 학교 현장에서 서술형 문항의 구체적 활용을 강조하는 최근의 교육 정책에 비추어 볼 때, 교사가 증명 과정을 요구하는 서술형 문항을 활용하여 평가를 하는 것이 과거에 비해 수월할 것으로 판단된다. 이와 함께 학생들이 증명에 대해 느끼는 두려움을 경감하기 위한 다양한 지도 방식을 고안할 필요가 있다. 학생들이 연역적 추론으로서의 증명에 도달하기 위해 거쳐야 하는 학습 경로에서 학생들이 더욱 편안하게 증명에 접근하고 증명의 필요성을 충분히 인식할 수 있도록 돕는 다양한 지도 방식을 고안할 필요가 있다.

둘째, 13명(36.1%)의 교사들은 시간 부족을 증명 지도의 제약 조건으로 언급하였다. 교사들은 수학과 교육과정과 교과서에 제시된 증명 내용의 양이 너무 방대하여 진도 나가기에 급급한 나머지 학생들과 의미있는 증명 활동을 할 수 있는 시간을 확보할 수 없다고 언급하였다. 증명을 다루는 실제 수업을 분석한 선행 연구에서도 (나귀수, 1998) 교사와 학생들이 시간 부족으로 인해 증명의 방법과 과정을 충분히 탐색하지 않고 교사가 일방적으로 증명 과정을 학생들에게 전달하고 있음을 보고하였다. 그러므로 수학 교수-학습에서 다루어야 할 증명 내용의 양을 폭과 깊이의 두 측면에서 성찰할 필요가 있다.

수학 교수-학습에서 다루어야 할 증명 내용과 수학 수업 시수가 교육과정에 정해져 있는 현실에서, 교사들이 도저히 감당할 수 없는 증명 내용의 양이라면 이것은 심각한 성찰을 필요로 한다. 증명 내용의 양과 관련된 문제는 먼저 교육과정 개발과 교과서 개발의 단계에서부터 성찰되고 개선되어야 한다. 혹자는 교육과정과 교과서는 적절하게 개발되어 있는데, 교사들의 미흡한 지도 방식으로 인해 증명을 의미있게 지도하지 못한다는 식으로 비판할 수도 있다. 그러나 증명 교수-학습이 충실하게 진행되지 않는 책임을 교사에게만 돌리는 것은 책임 회피라고 할 수 있다. 교육과정 개발자는 개발자대로, 교과서 개발자는 개발자대로, 그리고 교사는 교사대로 각자의 위치에서 최선의 책임을 다하는 자세가 필요하다.

셋째, 12명(33.3%)의 교사들은 학생들의 사고 수준이 증명을 이해하기에 미흡하다는 의견을 제시하였다. 교사들의 이러한 의견은 학생들이 증명 학습을 매우 어려워한다는 선행 연구의(서동엽, 1999; 이종희·김부미, 2004; Ellis, Bieda, & Knuth, 2012; Hanna & de Villiers, 2012) 결과와 일관된다. 사고 수준이 미흡한 학생들에게는 증명을 도입하기 전에 구체적 조작 활동이나 공학적 도구를 활용하여 증명해야 할 수학 명제에 접근하도록 할 필요가 있다. 증명 교수-학습을 점진적으로 진행함으로써 학생들의 증명 학습을 도울 필요가 있다는 것이다. 또한, 아직은 그 연구가 미미한 상태이지만, 학생들의 인지 수준에 적절한 구체적인 증명 지도 방식을 설계하고 실행하여 보고하는 연구들이 활발하게 이루어질 필요가 있다.

다. 교사들의 증명 지도 인식과 수학과 교육과정

이 절에서는, 증명 지도에 대한 교사들의 인식을 수학과 교육과정과 관련지어 살펴보고자 한다. 2009 개정 수학과 교육과정과 2007 개정 수학과 교육과정에서 제시하고 증명과 관련된 성취기준을 일부 제시하면 다음과 같다(교육인적자원부, 2009; 교육과학기술부, 2011).

<표 IV-7> 수학과 교육과정에서의 증명 관련 내용

<p>[2009 개정 수학과 교육과정] 중학교 1~3학년군 기하 영역</p> <p>⑤ 삼각형과 사각형의 성질</p> <p>① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다</p> <p>② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다</p> <p>③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다</p>
--

<p><교수·학습 상의 유의점></p> <p>⑫ 도형의 성질을 이해하고 설명하는 활동은 학생의 수준에 따라 달리할 수 있다</p> <p>[2007 개정 수학과 교육과정] 중학교 2학년 기하 영역</p> <p>① 삼각형과 사각형의 성질</p> <p>① 명제의 뜻과 증명의 의미를 이해한다.</p> <p>② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.</p> <p><용어와 기호> 증명</p> <p><교수·학습 상의 유의점></p> <p>③ 어려운 증명의 경우에는 증명을 하기 전에 공학적 도구나 조작 활동을 통하여 증명해야 할 성질을 직관적으로 이해하게 한다.</p>
--

현행 2009 개정 수학과 교육과정을 살펴보면 ‘증명’이라는 용어가 누락되어 있다. 대신에 증명과 관련된 성취기준은, 예를 들어 ‘이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다’와 같이 제시되어 있다. 2009 개정 수학과 교육과정을 2007 개정 수학과 교육과정과 비교해 보면, ‘증명’이 ‘이해와 설명’으로 대체되어 있음을 확인할 수 있다. 그렇다면, 과연 ‘이해하고 설명’하는 것이 ‘증명’하는 것을 대체할 수 있는가? 설명의 사전적 의미는 ‘어떤 일의 내용이나 이유 따위를 상대방이 잘 알 수 있도록 밝혀 말하는 것’이다(브리태니커, 2014). 반면에 증명은 ‘실험이나 측정에 의하지 않고, 이미 알고 있는 참인 명제나 정의를 이용하여 어떤 명제가 참임을 밝히는 것(정상권 외, 2011)’이나 ‘어떤 주장을 지지하거나 반박하기 위해 명제들이 연역적이고 논리적으로 연결되어 있는 특별한 유형의 수학적 논쟁’(Ellis, Bieda, & Knuth, 2012)으로 정의된다. 증명은 명확한 의미를 가지고 있는 수학적 용어지만 설명은 일반적인 용어로서, ‘이해하고 설명’하는 것은 ‘증명’하는 것을 대체할 수 없다. 선행 연구 고찰에서 살펴본바와 같이, 이해나 설명은 수학에서 증명이 담당하고 있는 다양한 역할 중의 하나이지, 이해나 설명이 곧 증명인 것은 아니다. 교육과정 개발자들이 수학적 용어인 ‘증명’과 ‘증명의 역할’을 혼동한 것은 아닌지 성찰할 필요가 있다.

2009 개정 수학과 교육과정의 중학교에 제시된 성취기준은 말 그대로 중학교 학생들이 성취해야 할 기준이다. 그러나 ‘이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다’와 같은 성취기준을 통해서도 중학교 학생들이 도달해야 할 기준을 명확하게 알 수 없다. 왜냐하면 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명하는 것은, 구체적 조작 활동과 귀납적 추론을 통해서도 가능하고, 연역적 추론을 통해서도 가능하기 때문이다. 실제로 2009 개정 수학과 교육과정의 초등학교에서는 ‘여러가지 모양의 삼각형에 대한 분류 활동을 통해 이등변삼각형과 정삼각형을 이름 짓고 이해한다’는 성취기준이 제시되어 있으며, 초등학교 4학년 수학 교과서에서는 이와 같은 성취기준에 근거하여 이등변삼각형의 두 각의 크기가 같다는 성질을 구체적 조작 활동과 귀납적 추론을 통해 이해하고 설명하는 내용을 다루고 있다.

그렇다면 초등학교와 중학교에서 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 동일한 수학적 주제를 다루는데, 그 차이는 무엇인가? 초등학교에서는 구체적 조작 활동과 귀납적 추론을 통해 다루고, 중학교에서는 연역적 추론, 즉 증명을 통해 다룸으로써 동일한 수학적 주제를 다른 방식으로 다루는 것이다. 다시 말해서, 수학 내용과 주제는 동일하지만 그 수학 내용에 접근하는 추론 방법이라는 수학적 과정이 다른 것이다. 한편, 2009 개정 수학과 교육과정에서는 <교수·학습상의 유의점>에서 ‘도형의 성질을 이해하고 설명하는 활동은 학생의 수준에 따라 달리할 수 있다’고 명시하고 있다. 이에 대해 중학교 학생들이 초등학교 학생들처럼 귀납적 추론을 통해 도형의 성질을 설명해도 괜찮은가 하는 문제가 제기될 수 있다. 증명을 어려워하는 학생들에게는, 2007 개정 수학과 교육과정의 <교수·학습상의 유의점>에 명시된 것처럼, ‘증명을 하기 전에 공학적 도구나 조작 활동을 통하여 증명해야 할 성질을 직관적으로 이해하게 하는 것이’ 더욱 바람직한 방안으로 판단된다.

본 연구의 조사에 참여한 일부 교사들도 이해를 수학에서 증명이 담당하는 하나의 역할로서, 그리고 학생들에게 증명을 지도할 필요성 중의 하나로서 인식하고 있음은 이미 언급하였다. 또한 상당수의 교사들(19명,

52.8%)은 어떤 논쟁이 증명이 될 조건으로서 귀납 추론이나 유비 추론을 포괄하는 개념인 논리적 추론을 생각하고 있음으로써 증명에 대해 모호하고 미흡한 개념-이미지를 가지고 있음을 확인하였다. 이러한 상황에서 '증명할 수 있다'는 성취기준을 '이해하고 설명할 수 있다'로 대체한 2009 개정 수학과 교육과정은 교사들에게 더 큰 혼란을 야기할 위험성을 내포하고 있다.⁸⁾ 교사들의 증명에 대한 이해는 학생들의 증명 학습에 큰 영향을 미칠 수 있기 때문에, 교사들이 증명을 더욱 정확하게 이해할 수 있도록 2009 개정 수학과 교육과정의 증명 관련 성취기준을 개선할 필요가 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 중·고등학교 수학 교사들의 증명 및 증명 지도에 대한 인식을 조사하였다. 본 연구에서 확인된 수학 교사들의 증명 및 증명 지도에 대한 인식을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 수학에서 증명의 역할에 대한 인식을 조사한 결과, 수학 교사들은 선행 연구에서 제시된 증명의 다양한 역할에 대해 미흡하게 인식하고 있는 것으로 나타났다. 대부분의 교사들이 증명의 정당화 역할은 잘 인식하고 있었지만, 설명(확인), 이해, 발견, 의사소통, 체계화, 수학적 표현의 사용 등으로서의 증명의 역할에 대해서는 미흡하게 인식하고 있었다. 한편 증명이 수학의 엄밀성 추구와 수학의 본질 추구로서의 역할을 한다고 응답한 교사들도 있었는데, 엄밀성 추구와 수학의 본질 추구로서의 증명의 역할은 선행 연구에서는 보고되지 않은 것으로서, 우리나라 교사들이 증명에 대해 가지고 있는 독특한 개념이라고 할 수 있다.

둘째, 증명의 조건, 즉 어떤 논쟁(argument)이 증명(proof)이 될 수 있는가에 대하여, 연역성을 주장한 교사들은 8명(22.2%)에 불과했다. 반면에 논리성만을 주장한 교사들은 19명(52.8%), 일반적인 단어를 사용하여 모호한 조건을 언급한 교사들은 9명(25.0%)으로 나타났다. 어떤 논쟁이 증명이 되기 위해 반드시 갖추어야 할 조건이 연역성임을 고려할 때, 논리성이나 일반적인 단어를 증명의 조건으로 언급한 교사들은 혼란스러운 개념-이미지를 가지고 있다고 할 수 있다.

셋째, 증명 지도의 필요성에 대하여, 대부분의 교사들이 증명을 반드시 지도해야 한다고 응답하였다. 그리고 증명 지도의 이유로는 논리적 사고력 함양, 수학적 사고력 신장, 명제의 이해, 참인 수학 명제의 확인, 수학의 본질 이해, 수학 지식 증가, 수학적 표현 증진, 수학의 즐거움 경험, 의사소통, 엄밀성 추구, 연계성 추구 등의 다양한 의견을 제시하였다.

넷째, 증명 지도의 수행에 대하여, 많은 교사들(24명, 66.7%)은 실제 증명 지도가 미흡하게 이루어지고 있다고 언급하였다. 증명 지도의 제약 조건으로는, 증명에 대한 학생들의 두려움과 흥미 부족(20명, 55.6%), 증명 지도 시간 부족(13명, 36.1%), 학생 사고 수준 미흡(12명, 33.3%), 지도 방식 미흡(4명, 11.1%), 학생 지식 부족(3명, 8.3%) 등을 언급하였다.

이상과 같은 조사 결과를 토대로 증명 교수-학습 개선을 위한 시사점을 제언하면 다음과 같다. 첫째, 예비교사교육 프로그램 및 현직교사 연수 프로그램을 통해 수학에서 증명이 담당하는 다양한 역할을 교사들이 경험할 수 있도록 도움 필요가 있다. 교사들의 증명에 대한 이해는 학생들의 증명 학습에 지대한 영향을 미칠 수 있다. 본 연구의 결과 많은 교사들이 정당화로서의 증명의 역할은 잘 인식하고 있었지만, 다른 역할에 대해서는 인식 정도가 미흡하였다. 중학교 학생들에게 정당화로서의 증명을 지도하는 것은 한계가 있음을 IV장에서 살펴보았다.

8) 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 중학교 2학년 교과서를(류희찬 외, 2013; 이준열 외, 2013; 정상권 외, 2013) 살펴보면, 예를 들어, '이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같음을 설명하여라'와 같은 문제를 제시하고 실제 내용은 증명 과정을 제시하고 있다. 교육과정에서 제시하고 있는 성취기준의 모호함으로 인해 교육과정과 교과서 사이에 단절이 존재하며, 교과서 또한 '...를 설명하라'는 문제에 대해 '증명'을 제시하고 있음을 확인할 수 있다.

교사는 학생들이 가지고 있는 수학적 지식에 적절하게 증명의 다양한 필요성과 역할을 경험하도록 지도할 필요가 있다. 이러한 증명 지도가 가능하려면 교사들이 먼저 증명의 다양한 역할을 인식하고 경험할 필요가 있다. 또한, 증명의 조건과 관련하여 논리적 추론이나 정당화 과정을 증명과 동일시하는 교사들의 미흡한 개념-이미지를 극복하도록 돕기 위한 방안이 필요하다.

둘째, 증명 지도의 제약 조건과 관련하여 교사들은 학생들의 두려움과 관심 부족, 지도 시간 부족을 호소하고 있다. 학생들이 증명에 대해 느끼는 두려움을 경감하기 위한 질 높은 지도 방식의 구현과 의미충실한 증명 교수-학습 시간의 확보 등을 위해서는, 증명 교육의 양을 폭과 깊이의 측면에서 성찰하여 개선할 필요가 있다. 또한 과정을 중시하는 증명 수업과 결과를 강조하는 평가 사이의 단절을 극복하기 위해 증명 과정을 제시하도록 요구하는 서술형 문항을 평가에서 적극적으로 활용할 필요가 있다.

셋째, 2009 개정 수학과 교육과정의 중학교에서 증명 관련 성취기준으로서 ‘이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다’를 제시하고 있는데, 이러한 성취기준은 개선될 필요가 있다. ‘설명’은 일반적인 단어로서 ‘증명’과 같이 특별한 의미를 가지고 있는 수학적 용어가 아니다. ‘이해’나 ‘설명’은 증명의 다양한 역할 중의 하나이지 ‘이해’나 ‘설명’이 곧 증명인 것은 아니다. 이와 같은 성취기준은 특히 논리적 추론이나 정당화 과정을 증명과 동일시하는 미흡한 개념-이미지를 가지고 있는 교사들에게 더욱 큰 혼란을 줄 위험이 있다. 또한 도형의 성질을 ‘이해하고 설명’하는 것은, 연역적 추론으로서의 증명이 아닌 귀납적 추론 활동을 통해 초등학교 학생들도 학습하는 내용으로서, 이와 같은 성취기준은 중학교 학생들과 초등학교 학생들이 도달해야 할 성취기준의 경계를 모호하게 하는 문제점도 내포하고 있다.

마지막으로 본 연구의 제한점 및 추후 연구를 제시하면, 본 연구에서 조사한 교사들의 증명 인식은 교사들이 서술형 질문이나 선택형 질문에 대해 언어적으로 작성한 응답에 토대한 것이라는 한계를 안고 있다. 교사들의 증명에 대한 이해를 더욱 입체적이고 명확하게 파악하기 위해서는 구체적인 수학적 논쟁이나 학생들이 작성한 증명 과정에 대한 교사들의 평가를 함께 조사할 필요가 있다. 또한 우리나라의 학교 현장에서 이루어지고 있는 증명 교수-학습의 보다 실제적이고 구체적인 양상을 파악하기 위해서 일상적인 맥락에서 실시되고 있는 증명 수업을 심층적으로 관찰하고 분석하는 추후 연구가 필요하다고 하겠다.

참 고 문 헌

- 교육과학기술부(2011). 2009 개정 수학과 교육과정. 교육과학기술부.
 교육인적자원부(2009). 2007 개정 수학과 교육과정. 교육인적자원부.
 김승호 (1987). 교육의 과정에 있어서 개념의 위치: 인식의 틀로서의 개념의 성격을 중심으로. 서울대학교 석사학위 논문.
 김정하·강문봉 (2009). 초등학교 교사들의 수학적 정당화에 대한 연구. 수학교육학연구, **19(3)**, 371-392.
 김혜현 (2011). 예비교사들의 학습자 이해 지식과 교수방법 지식에 관한 연구: 중학교 2학년 기하영역 증명을 중심으로. 이화여자대학교 석사학위 논문.
 나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석. 서울대학교 박사학위 논문.
 류희찬 외 (2013). 중학교 수학2. 서울: (주)천재교과서.
 박은조 (2004). 수학 교사들의 증명에 대한 인식 조사. 한국교원대학교 석사학위 논문.
 브리태니커 (2014). <http://100.daum.net/encyclopedia/view.do?docid=b12s0470a&q=설명>.
 서동엽 (1999). 중학교 학생의 증명 능력 분석. 수학교육학연구, **9(1)**, 183-203.

- 이종희 · 김부미 (2004). 증명학습에서 생성-수렴 수업 모형의 개발과 적용. 학교수학, **6(1)**, 59-90.
- 이준열 외 (2013). 중학교 수학2. 서울: (주)천재교육.
- 정상권 외 (2011). 중학교 수학2. 서울: (주)금성출판사.
- 정상권 외 (2013). 중학교 수학2. 서울: (주)금성출판사.
- 조정수 · 이정자 (2006). 증정보조카드를 활용한 중학생의 증명지도에 관한 연구. 한국학교수학회논문집, **9(4)**, 521-538.
- 최용준 외 (2011). 중학교 수학2. 서울: (주)천재문화.
- 한혜숙 · 신현성 (2008). 증명학습에 대한 학생들의 성향과 GSP를 활용한 증명학습. 한국학교수학회논문집, **11(2)**, 299-314.
- Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In Alan J. Bishop (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 175-192.
- Cabassut, R. et al (2012). Conception of proof-In research and teaching. In Gila Hanna, & Michael de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer, 169-190.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 4, 359-387.
- Ellis, A. B., Bieda, K, & Knuth, E. (2012). *Developing essential understanding of proof and proving for teaching mathematics in grades 9-12* (eBook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 401-511.
- Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Teachers' beliefs and the teaching of proof. In Fou-Lai Lin, Feng-Jui Hsieh, Gila Hanna, & Michael de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University, 166-171.
- Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. In Gila Hanna, & Michael de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer, 1-12.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof, In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*, 4, 396-428.
- Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 5, 379-405.
- Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 61-88.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역(2007), 학교수학을 위한 원리와 기준. 서울: 경문사.
- Posner, G. J., & Rudnitsky, A. N. (2006). *Course design: a guide to curriculum development for teachers*. 최호성 외 역(2007), 교육과정 설계의 이론과 실제: 코스 설계자로서의 교사. 서울: 시그마프레스.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 15, 20-25.

Mathematics Teachers' Conceptions of Proof and Proof-Instruction

Na, Gwisoo

Cheongju National University of Education

gsna21@cje.ac.kr

This study is intended to examine 36 in-service secondary school mathematics teachers' conceptions of proof in the context of mathematics and mathematics education. The results suggest that almost teachers recognize the role as justification well but have the insufficient conceptions about another various roles of proof in mathematics. The results further suggest that many of teachers have vague concept-images in relation with the requirement of proof and recognize the insufficiency about the actual teaching of proof. Based on the results, implications for revision of mathematics curriculum and mathematics teacher education are discussed.

* ZDM Classification : C13

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C50

* Key Words : secondary math teacher, proof, conception, proof-instruction