Journal of the Korean Data & Information Science Society
2014, **25**(6), 1499–1506

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2014.25.6.1499
한국데이터정보과학회지

기울기를 이용한 랜덤워크 윌콕슨 부호순위검정†

김태윤[1] · 박철용[2] · 김슬기[3] · 김민석[4] · 이우정[5] · 권윤지[6]

[123456]계명대학교 통계학과

접수 2014년 10월 20일, 수정 2014년 10월 31일, 게재확정 2014년 11월 14일

요 약

랜덤워크는 다양한 분야에서 랜덤현상을 기술하는데 이용되고 있으나, 현재까지 개발된 랜덤워크 검정법에는 유의수준 왜곡과 낮은 검정력 등의 문제가 있는 것으로 알려져 있다. 이러한 문제점들을 개선하기 위해 Kim 등 (2014)은 부호검정에 기초한 랜덤워크 검정 ($\rho = 1$)방법을 제안하였다. 본 논문에서는 보다 개선된 랜덤워크 검정법을 제안하고자 부호검정보다 검정력이 우수한 것으로 알려진 윌콕슨 부호순위검정을 이용한 랜덤워크 검정법을 제안하고, 모의실험을 통해 부호검정, 윌콕슨 부호순위검정, 확장 Dickey-Fuller 검정의 성능을 비교하였다. 모의실험 결과 소표본에서 비모수 검정기법들이 ADF 검정보다 우월하다는 사실을 재확인하였다. 새롭게 밝혀진 사실은 부호검정이 윌콕슨 부호순위검정에 비해 높은 검정력을 가지며, 또한 비모수 검정기법들은 ρ가 양의 부호를 가지는 경우 ($0 < \rho < 1$) 정규분포보다 이중지수분포에서 낮은 검정력을 가지게 되나, ρ가 음의 부호 ($-1 < \rho < 0$)를 갖는 경우에는 정규분포보다 이중지수분포에서 높은 검정력을 보인다는 사실이다.

주요용어: 낮은 검정력, 단위근, 랜덤워크, 부호검정, 윌콕슨 부호순위검정, 유의수준 왜곡.

1. 서론

랜덤워크 (random walk)는 임의 방향으로 향하는 연속적인 걸음을 나타내는 수학적 개념으로 다양한 분야에서 랜덤현상을 기술하는데 널리 이용되고 있다. 확률적인 관점에서 랜덤워크과정 (random walk process)을 따르는 시계열은 시간의 흐름에 따라 분산이 증가하여 발산하게 된다. 랜덤워크는 경제학, 금융학, 유전학, 물리학, 사회학 등 다양한 분야에서 관찰되고 있으며, 특히 경제학자인 Malkiel (1973)은 금융시장의 확장성 및 예측어려움을 랜덤워크를 통해 설명하고자 하였다. 이렇듯 주어진 현상이 랜덤워크를 따르는지를 판단하는 문제는 이론적으로나 실제적인 관점에서 대단히 중요하고 흥미로운 문제이다.

현재까지 다양한 모형을 전제로 개발되어 온 대부분의 랜덤워크 검정법들은 실제 랜덤워크 검정문제에 적용되었을 때 유의수준 왜곡 (size distortion)과 낮은 검정력 (low power) 등의 문제를 보이는 것으로 알려져 있으며, 그 주된 이유로 오차의 상관성이 지목되고 있다 (Maddala과 Kim, 1998). Kim 등

† 이 논문은 2013년도 정부 (교육부)의 재원으로 한국과학창의재단 (대학생 창의융합형 연구과제 지원사업)의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2013-510).
[1] (704-701) 대구광역시 달서구 달구벌대로 1095, 계명대학교 통계학과, 교수.
[2] 교신저자: (704-701) 대구광역시 달서구 달구벌대로 1095, 계명대학교 통계학과, 교수.
E-mail: cypark1@kmu.ac.kr
[3] (704-701) 대구광역시 달서구 달구벌대로 1095, 계명대학교 통계학과, 박사과정.
[4] (704-701) 대구광역시 달서구 달구벌대로 1095, 계명대학교 통계학과, 석사과정.
[5] (704-701) 대구광역시 달서구 달구벌대로 1095, 계명대학교 통계학과, 석사과정.
[6] (704-701) 대구광역시 달서구 달구벌대로 1095, 계명대학교 통계학과, 학사.

(2014)은 기존의 랜덤워크 가설 검정방법들이 갖고 있는 문제들을 파악하여 이에 대한 대안으로서 기울기를 이용한 랜덤워크 부호검정을 제안하였다. 이 검정은 모집단 분포에 관계없이 이항분포에 근거한 정확 검정이 되며, 모의실험을 통해 기존의 확장 Dickey-Fuller (augmented Dickey Fuller; ADF) 검정 (1984)에 비해 소표본에서 강점을 가진다는 것을 보였다.

본 논문에서는 랜덤워크 부호검정의 후속 연구로서 윌콕슨 부호순위검정을 이용한 랜덤워크 검정방법을 제안하고자 한다. 윌콕슨 부호순위검정은 관측값과 위치모수 θ_0의 비교를 통해 얻게 되는 부호정보뿐만 아니라, 관측값의 상대적인 크기인 순위도 고려하여 검정하는 비모수적 기법이다. 다시 말해 이 검정법이 제안된 이유는 위치정보만을 이용하는 부호검정에 비해 상대적으로 더 많은 정보를 이용하기 때문에 검정의 정확성이 개선될 수 있을 것으로 기대되기 때문이다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 랜덤워크 검정문제에 대해 간략하게 기술하며, 랜덤워크 검정에 자주 사용되고 있는 Dickey와 Fuller (1979) 검정과 ADF 검정 (1984)을 소개한다. 3절에서는 새로운 랜덤워크 검정법으로 제안되는 기울기에 기초한 랜덤워크 윌콕슨 부호순위검정에 대해 간략히 기술한다. 4절에서는 모의실험 결과를 통해 새롭게 제안된 윌콕슨 부호순위검정을 부호검정, ADF 검정과 비교한다. 5절에서는 논문의 결과를 요약하고 추후 연구과제를 논의한다.

2. 이론적 배경

2.1. 랜덤워크 및 랜덤워크 검정의 문제점

1905년 Karl Pearson에 의해 처음 소개된 랜덤워크는 임의 방향으로 향하는 연속적인 걸음을 나타내는 수학적 개념으로 광범위한 분야에서 사용되고 있으며 랜덤워크의 scaling limit은 물리학에서 입자의 불규칙한 운동을 설명하는데 사용되는 브라운 운동 (Brownian motion)인 것으로 알려져 있다.

랜덤워크 모형에는 이동상수 (drift)가 존재하는 모형, 선형 시간 추세 (linear time trend)가 존재하는 모형 등 다양한 형태의 모형들이 있으나 본 논문에서는 랜덤워크 모형들 중에서 이동상수가 없는 다음과 같은 AR(1) 형태의 모형을 가정하는데, $\rho = 1$인 경우 랜덤워크가 된다.

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t, t = 1, \cdots, n \tag{2.1}$$

식 (2.1)에서 X_t는 t시점에서의 관측값이며, ϵ_t는 t시점에서의 서로 독립인 연속형 오차항으로서 $P(\epsilon_t > 0) = P(\epsilon_t < 0) = 1/2$이며 $Var(\epsilon_t) = \sigma^2$이 만족된다. $\rho = 1$일 때 식 (2.1)은 $Var(X_t) = t\sigma^2$으로, 이때의 시계열 자료는 정상성을 만족하지 못하는 비정상과정이 되며, $|\rho| < 1$일 때 정상과정이 된다. 따라서 단위근 ($\rho = 1$)의 존재여부를 판단하는 것은 시계열 자료가 정상과정을 따르는지 혹은 비정상과정을 따르는지 여부를 판단하는 문제가 되며 이를 단위근 검정 혹은 랜덤워크 검정이라 한다.

현재까지 다양한 단위근 검정방법들이 개발되어 왔으며 이들은 크게 모수적인 방법과 비모수적인 방법으로 구분할 수 있다. 모수적인 방법에는 ρ의 최소제곱 추정에 기초한 DF 검정 (Dickey와 Fuller, 1979)과 ADF 검정 (Said와 Dickey, 1984) 등이 있으며, 분산비를 이용한 검정에는 PP 검정 (Phillips와 Perron, 1988)과 KPSS 검정 (Kwiatkowski 등, 1992) 등이 있다.

이러한 기존의 단위근 검정방법들에는 대부분 유의수준 왜곡과 낮은 검정력 같은 문제들이 존재하는 것으로 알려져 있다. 여기서 유의수준 왜곡은 검정이 잘못될 경우 이를 관리하기 위해 사전에 설정하는 크기인 유의수준 α가 사전에 설정한 크기보다 훨씬 커지거나 작아지는 현상을 의미한다. 이러한 문제들은 오차들이 상관되어 있는 경우나 ρ가 1에 가까운 경우 발생하는 것으로 알려져 있다 (Maddala와 Kim, 1998).

2.2. DF 검정과 ADF 검정

1979년 Dickey와 Fuller에 의해 제안된 DF 검정은 식 (2.1)에 주어진 AR(1) 형태의 모형에서 최소제곱추정량 $\widehat{\rho}$을 구하여 단위근의 존재여부를 판단하는 방법이며 $\widehat{\rho}$은 다음과 같다.

$$\widehat{\rho} = \arg\min_{\rho} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \rho X_{t-1})^2$$

$H_0 : \rho = 1$에 대한 DF 검정통계량의 극한 분포는 통상적인 잘 알려진 분포를 따르지 않고 단위근 분포라 불리는 다음의 극한분포를 따른다.

$$n(\widehat{\rho} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 w(t)dw(t)}{\int_0^1 w^2(t)dt} \tag{2.2}$$

식 (2.2)에서 $w(t)$는 $[0,1]$에서 정의된 위너 과정 (Wiener process)으로서, 이렇게 계산되는 단위근 분포는 통상적인 잘 알려진 분포가 아니기 때문에 Dickey와 Fuller (1979)는 모의실험을 통해 근사적인 분포를 제시하였다.

DF 검정에 대해 알려진 문제점들은 다음과 같다. 먼저, ρ가 1에 가깝거나 관측수가 작은 경우에 낮은 검정력을 가지는 문제점이 알려져 있다 (Dickey와 Fuller, 1979; Hamilton, 1994). 또한, 오차항에 이동평균 (moving average) 항이 포함되어 있는 경우 제시된 단위근 분포와 실제분포의 차이가 큰 문제점이 있는 것으로 알려져 있다 (Schwert, 1987).

ADF 검정은 기본적으로 DF 검정과 유사한 검정법이다. 두 검정의 가장 큰 차이점은 DF 검정은 오차항이 서로 독립이라는 가정을 하는 반면, ADF 검정은 오차항의 자기상관 등을 어느 정도 허용하는 광범위한 오차항의 경우로 확장한 검정법이란 것이다. 여기서 광범위한 오차항은 약한 추가조건을 만족하는 마팅게일 차분열 (martingale difference sequence)을 의미한다.

ADF 검정은 DF 검정과 마찬가지로 모수적인 방법에 해당하며, ADF 검정에서는 차분 변수 ($\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$)의 과거 시차항들을 회귀식에 포함시켜 오차항의 계열상관 (serial correlation)을 제거한다. 구체적으로 일반적인 단위근 모형의 오차항 ϵ_t가 다음과 같은 AR(p)을 만족한다고 하자.

$$\rho(L)\epsilon_t = u_t$$

여기에서 $\rho(z) = 1 - \rho_1 z - \cdots - \rho_p z^p$이며 u_t는 서로 독립인 백색잡음 (white noise)이다. 이 경우 ADF 모형에서는 다음과 같은 회귀방정식을 이용한다.

$$X_t = \rho X_{t-1} + \sum_{k=1}^{p} \rho_k \triangle X_{t-k} + u_t \tag{2.3}$$

따라서 $H_0 : \rho = 1$ 하에서 X_t는 ARIMA(p,1,0)으로 주어진다. 다시 말해 식 (2.3)을 이용하여 단위근의 존재여부를 검정하는 방법이 바로 ADF 검정이다.

3. 연구방법

3.1. 윌콕슨 부호순위검정

Wilcoxon (1945)에 의하여 제안된 윌콕슨 부호순위검정은 관측값 X_i와 위치모수 θ_0의 차이 즉, $X_i - \theta_0$에 대한 부호정보와 상대적인 순위정보를 함께 고려하는 비모수적 검정기법으로 검정절차는 다음과 같다.

1) 관측값 X_i와 위치모수 θ_0의 차이인 Y_i를 다음과 같이 구한다.

$$Y_i = X_i - \theta_0, i = 1, \cdots, n$$

2) Y_i의 절대값 $|Y_i|$의 순위 R_i을 구한다. 이때 순위는 가장 작은 절대값에 순위 1을 부여하고 가장 큰 절대값에 순위 n을 부여한다.

3) 부호순위 검정통계량 W^+는 다음과 같다.

$$W^+ = \sum_{i=1}^{n} \psi_i R_i$$

여기서 ψ_i는 다음과 같이 정의되는 지시함수 (indicator function)이다.

$$\psi_i = \begin{cases} 1, \ X_i > \theta_0 \\ 0, \ X_i \leq \theta_0 \end{cases}$$

따라서 검정통계량 W^+는 위치모수 θ_0보다 큰 관측값들의 순위합으로 정의된다. 귀무가설 H_0 하에서 W^+의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E_0(W^+) = \frac{n(n+1)}{4}, \ Var_0(W^+) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

표본의 크기 n이 큰 경우 검정통계량 W^+의 정규근사에 의해 검정할 수 있으며, 구체적인 표준화된 W^+통계량 Z_{W^+}는 다음과 같다.

$$Z_{W^+} = \frac{W^+ - E_0(W^+)}{\sqrt{Var_0(W^+)}} = \frac{W^+ - \dfrac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

3.2. 기울기를 이용한 랜덤워크 윌콕슨 부호순위검정

본 논문에서 제안하고자 하는 기울기를 이용한 랜덤워크 윌콕슨 부호순위검정 (이하 윌콕슨 부호순위검정)은 Kim 등 (2014)이 제안한 기울기를 이용한 랜덤워크 부호검정 (이하 부호검정)을 확장한 검정방법이다. 모형 (2.1)로부터 다음의 기울기 S_t를 고려한다.

$$S_t = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t - X_{t-1}}, \ t = 2, \cdots, n-1 \tag{3.1}$$

식 (3.1)의 기울기 S_t는 연속하는 두 시점에서 관찰되는 두 점 (X_{t-1}, X_t)와 (X_t, X_{t+1}) 사이의 기울기를 의미한다. Kim 등 (2014)은 $H_0 : \rho = 1$ 하에서 기울기는 $S_t = \epsilon_t + 1/\epsilon_t (t = 2, \cdots, n-1)$가 되어 서로 독립이 아니나, 기울기의 부호 $\psi_t = I(S_t > 0)$ $(t = 2, \cdots, n-1)$는 $H_0 : \rho = 1$ 하에서 성공의 확률이 1/2인 서로 독립인 베르누이 확률변수가 된다는 것을 증명하였다. 일반적으로 $H_1 : |\rho| < 1$ 하에서 기울기 S_t는 0에 대해 대칭이 아니게 된다. 그런데 모의실험을 통해 일반적인 $H_1 : |\rho| < 1$에 대해서 ρ가 작아지면 $P(S_t > 0)$가 1/2에서 점차 작아지게 되는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 $P(S_t > 0)$에 의한 랜덤워크에 대한 가설은 다음과 같이 지정하였다.

$$H_0^{(1)} : P(S_t > 0) = 1/2 \ \text{ 대 } \ H_1^{(1)} : P(S_t > 0) < 1/2$$

위의 가설에 검정으로 다음과 같은 부호순위 검정통계량을 사용하고자 한다.

$$W^+ = \sum_{t=2}^{n-1} \psi_t R_t \tag{3.2}$$

이 통계량 W^+의 귀무가설에서의 분포로는 사용가능 표본크기인 $n-2$가 15 이하인 경우 Wilcoxon 등 (1970)에 주어진 윌콕슨 부호순위검정의 분포를 사용하고, 표본크기가 클 경우 정규근사에 의한 다음의 표준화된 검정 통계량을 사용하고자 한다 ($|S_t|$가 서로 독립이 아니기 때문에 정확한 분포는 아니다).

$$Z_{W^+} = \frac{W^+ - E(W^+)}{\sqrt{Var(W^+)}} = \frac{W^+ - \dfrac{(n-2)(n-1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{24}}}$$

4. 모의실험

본 절에서는 모의실험을 통해 윌콕슨 부호순위검정을 기존의 ADF 검정 및 부호검정과 비교하고자 한다. 모의실험은 식 (2.1)의 AR(1) 형태의 모형에서 오차항이 따르는 분포로 정규분포와 이중지수분포 (double exponential distribution)를 고려하였다. 여기서 오차항이 따르는 분포로 정규분포 외에 이중지수분포를 고려한 까닭은 이중지수분포가 정규분포에 비해 꼬리 부분이 두터워 이상값이 더 많이 발생하는 분포이기 때문이다. 표본크기 $n = 30, 100$에 대해 1000회 반복하였으며 명목상 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 $\rho = 1, 0.9, \cdots, -0.9$에 대하여 모의실험을 실행하였다. 그 결과 정규분포와 이중지수분포에 대해 $H_0 : \rho = 1$을 기각하는 유의확률을 계산한 결과가 Table 4.1과 Table 4.2에 주어져 있다.

Table 4.1 P-values of sign test, sign rank test and ADF test under normal distribution

ρ	$n = 30$			$n = 100$		
	sign test	sign rank test	ADF test	sign test	sign rank test	ADF test
1	0.043	0.045	0.047	0.042	0.04	0.046
0.9	0.044	0.048	0.049	0.083	0.088	0.11
0.8	0.073	0.081	0.055	0.121	0.133	0.306
0.7	0.109	0.119	0.08	0.228	0.198	0.476
0.6	0.143	0.148	0.087	0.324	0.295	0.644
0.5	0.185	0.188	0.091	0.44	0.389	0.759
0.4	0.234	0.206	0.137	0.564	0.51	0.852
0.3	0.305	0.284	0.141	0.717	0.607	0.888
0.2	0.381	0.354	0.171	0.852	0.758	0.925
0.1	0.438	0.399	0.168	0.927	0.842	0.95
0	0.543	0.471	0.174	0.965	0.913	0.961
-0.1	0.605	0.531	0.195	0.99	0.956	0.971
-0.2	0.712	0.628	0.181	0.998	0.983	0.968
-0.3	0.808	0.7	0.207	1	0.992	0.979
-0.4	0.875	0.767	0.236	1	0.999	0.984
-0.5	0.916	0.837	0.249	1	1	0.981
-0.6	0.956	0.898	0.248	1	1	0.989
-0.7	0.981	0.943	0.261	1	1	0.989
-0.8	0.998	0.976	0.261	1	1	0.991
-0.9	0.999	0.986	0.27	1	1	0.995

Table 4.2 P-values of sign test, sign rank test and ADF test under double exponential distribution

ρ	$n = 30$			$n = 100$		
	sign test	sign rank test	ADF test	sign test	sign rank test	ADF test
1	0.046	0.06	0.044	0.038	0.048	0.044
0.9	0.049	0.046	0.058	0.054	0.045	0.11
0.8	0.061	0.065	0.067	0.093	0.069	0.312
0.7	0.08	0.075	0.081	0.158	0.12	0.479
0.6	0.115	0.106	0.085	0.225	0.144	0.655
0.5	0.151	0.142	0.093	0.335	0.252	0.769
0.4	0.197	0.165	0.124	0.496	0.386	0.851
0.3	0.227	0.202	0.124	0.631	0.52	0.896
0.2	0.323	0.3	0.172	0.801	0.698	0.929
0.1	0.435	0.375	0.155	0.906	0.817	0.945
0	0.544	0.461	0.194	0.971	0.921	0.957
-0.1	0.671	0.572	0.188	0.995	0.961	0.974
-0.2	0.749	0.657	0.212	0.997	0.989	0.978
-0.3	0.828	0.744	0.204	1	0.998	0.982
-0.4	0.898	0.794	0.234	1	0.997	0.987
-0.5	0.931	0.852	0.247	1	1	0.979
-0.6	0.973	0.905	0.244	1	1	0.986
-0.7	0.993	0.944	0.234	1	1	0.986
-0.8	0.995	0.984	0.265	1	1	0.994
-0.9	0.999	0.995	0.265	1	1	0.996

Table 4.1과 Table 4.2에서 $\rho = 1$에 해당되는 결과는 관측된 유의수준이며, 나머지는 관측된 검정력에 해당된다. 세 가지 검정법 모두 표본크기가 커지면서 검정력이 커지는 것을 확인할 수 있다. 특히 ADF 검정은 표본의 크기가 큰 경우 ($n = 100$) 오차항의 분포에 관계없이 부호검정과 윌콕슨 부호순위검정에 비해 더 높은 검정력을 보이고 있다. 그러나 표본의 크기가 작은 경우 ($n = 30$) ADF 검정에 비해 비모수 검정법들이 더 높은 검정력을 보이고 있다. 이를 통해 비모수 검정법들이 소표본에서 강점을 갖는 것을 확인할 수 있다. 또한 비모수 검정법들 중에서는 부호검정이 윌콕슨 부호순위검정에 비해 더 높은 검정력을 보이고 있음을 확인할 수 있다. 이는 검정의 정확성을 개선하고자 하였던 연구목적에는 상반되는 결과이나 흥미로운 결과라고 할 수 있다. 이런 문제가 발생하는 이유는 기울기의 절대값들이 변동폭이 커서 기울기의 부호들에 추가적인 정보를 제공하지 못하고 오히려 부호들이 제공하는 정보를 혼란시키는 결과가 발생한 것이 아닐까 생각된다.

또한 Table 4.1과 Table 4.2를 통해 비모수 검정법들은 ρ가 양의 부호를 갖는 경우 (양의 상관) 정규분포보다 이중지수분포에서 낮은 검정력을 보이고 있는데 반해, ρ가 음의 부호 (음의 상관)를 갖는 경우에는 정규분포보다 이중지수분포에서 높은 검정력을 보이고 있다. 이중지수분포에서 흔히 발생하는 이상값들이 양의 상관보다 음의 상관을 강조하는 효과가 있어 이런 현상이 발생한 것이 아닐까 생각한다. 반면 ADF 검정에서는 이러한 현상이 일관성 있게 나타나지 않고 있음을 확인할 수 있다.

5. 결론

이 논문에서는 연속되는 두 점의 시계열 자료의 기울기를 이용하여 윌콕슨 부호순위검정에 의해 단위근 검정을 수행하는 방법을 제안하였다. 모의실험 결과 표본의 크기가 상대적으로 큰 $n = 100$의 경우 ADF 검정이 비모수 검정기법들에 비해 높은 검정력을 보이지만, 표본의 크기가 상대적으로 작은 $n = 30$의 경우 비모수 검정법들이 ADF 검정에 비해 더 높은 검정력을 보이는 것을 알 수 있었다. 따라서 비모수 검정법에 근거한 랜덤워크 검정이 표본크기가 $n = 30$과 같이 작은 경우에 장점을 갖는 검

정방법이라는 것을 알 수 있었다. 비모수 검정법들 간의 비교에서는 전체적으로 부호검정이 윌콕슨 부호순위검정보다 더 높은 검정력을 보이는 것을 확인할 수 있었다. 추가로 이중지수분포에서 흔히 발생하는 이상값들이 양의 상관보다 음의 상관을 강조하는 효과가 있다는 점을 비모수 검정들을 통해 확인할 수 있었다.

이 연구에서는 연속된 두 점에 대한 기울기 $(n-2)$만을 이용하기 때문에 정보손실이 존재한다. 따라서 추후 연구를 통해 보다 많은 기울기를 고려할 경우 검정력이 개선될 수 있을 것으로 생각된다. 또한 추후 연구과제로서 이상값들이 음의 상관을 강조하는 효과가 있다는 점에 대한 보다 상세한 연구를 진행하고자 한다.

References

Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.

Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*, Vol. 2, Princeton University Press, Princeton.

Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P. and Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, **54**, 159-178.

Kim, T. Y., Park, C., Kim, S. G., Kim, C. J., Kim, H., Yu, J. H., Jang, K. M. and Jang, Y. S. (2014). A sign test for random walk hypothesis based on slopes. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **25**, 385-292.

Maddala, G. S., and Kim, I-M. (1998). *Unit roots, cointegration and structural change*, Oxford University Press, Oxford.

Malkiel, B. G. (1973). *A random walk down Wall Street*, 6th Ed., W. W. Norton & Company, Inc., New York.

Pearson, K. (1905). The problem of the random walk. *Nature*, **72**, 294.

Phillips, P. C. and Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, **75**, 335-346.

Said, S. E. and Dickey, D. A. (1984). Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, **71**, 599-607.

Schwert, G. W. (1987). Effects of model specification on tests for unit roots in macroeconomic data. *Journal of Monetary Economics*, **20**, 73-103.

Wilcoxon, F. (1945). Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, 80-83.

Wilcoxon, F., Katti, S. K. and Wilcox, R. A. (1970). Critical values and probability levels for the Wilcoxon rank sum test and the Wilcoxon signed rank test. In *Selected Tables in Mathematical Statistics*, Vol. 1, edited by HL Harter and DB Owen, Markham, Chicago, 171-259.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2014, **25**(6), 1499–1506

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2014.25.6.1499
한국데이터정보과학회지

A Wilcoxon signed-rank test for random walk hypothesis based on slopes†

Tae Yoon Kim[1] · Cheolyong Park[2] · Seul Gee Kim[3] ·
Min Seok Kim[4] · Woo Jung Lee[5] · Yunji Kwon[6]

[123456]Department of Statistics, Keimyung University

Received 20 October 2014, revised 31 October 2014, accepted 14 November 2014

Abstract

Random walk is used for describing random phenomenon in various areas but tests for random walk developed so far are known to suffer from size distortion and low power. Kim *et al.* (2014) proposed a sign test for unit root ($\rho = 1$) hypothesis based on slopes. This article proposes a Wilcoxon signed rank test based on slopes for unit root hypothesis, and compares it with the augmented Dickey-Fuller test and the sign test by a simulation study. Our results confirm that the nonparametric tests are better than ADF test for small samples like $n = 30$. The results also show that the sign test is better than the Wilcoxon signed rank test and that for $0 < \rho < 1$ ($-1 < \rho < 0$), the nonparametric tests suffer from power loss (improvement) as normal error changes to double exponential error.

Keywords: Low power, random walk, size distortion, unit root, Wilcoxon signed rank test.

† This work was supported by the Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity (KOFAC), and funded by the Korean Government (MOE) (No. 2013-510).
[1] Professor, Department of Statistics, Keimyung University, Daegu 704-701, Korea.
[2] Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Keimyung University, Daegu 704-701, Korea. E-mail: cypark1@kmu.ac.kr
[3] Ph. D candidate, Department of Statistics, Keimyung University, Daegu 704-701, Korea.
[4] Graduate student, Department of Statistics, Keimyung University, Daegu 704-701, Korea.
[5] Graduate student, Department of Statistics, Keimyung University, Daegu 704-701, Korea.
[6] Bachelor of Science, Department of Statistics, Keimyung University, Daegu 704-701, Korea.