

## 리스크 관리 측면에서 살펴본 다변량 GARCH 모형 선택<sup>†</sup>

박세린<sup>1</sup> · 백창룡<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>성균관대학교 통계학과

접수 2014년 9월 2일, 수정 2014년 10월 5일, 게재확정 2014년 10월 12일

### 요약

본 연구는 일변량 금융지수의 변동성 모형에서 GARCH(1,1) 모형이 여러 복잡한 GARCH 확장 모형에 비교해서 결코 뒤쳐지지 않는다는 Hansen과 Lunde (2005) 연구를 다변량 변동성으로 확장한다. 또한 모형의 비교 방법으로 예측값에 기반한 평균제곱예측오차 (MSPE) 뿐 만 아니라 리스크 관리 측면에서 최대 손실 금액을 나타내는 VaR 및 사후 검증인 실패율을 동시에 고려하였다. 모의 실험 결과 다변량 변동성의 경우에서도 GARCH 모형이 예측력은 크게 다르지는 않았으나 리스크 관리 측면에서는 좀 더 신중한 판단을 요구함을 보인다. 또한 최근 10년동안의 KOSPI, NASDAQ 및 HANG SENG의 주가 지수 실증 자료를 통하여 리스크 관리 측면에서의 다변량 GARCH 모형 선택에 대해서 논의한다.

주요용어: 동적 조건부 상관, 변동성 모형, 최대 기대 손실 금액.

### 1. 서론

Hansen과 Lunde (2005)는 일변량 변동성 모형의 경우 GARCH(1,1) 모형이 기타 다른 14개의 GARCH 수정 모형들과 비교해서 예측력 (forecasting)이 결코 뒤지지 않음을 다양한 모의실험과 실증 자료를 통해 보였다. GARCH 모형의 경우 음의 충격 (negative shock)에 훨씬 더 길고 민감하게 반응하는 지렛대 효과 (leverage effect)를 효과적으로 반영하지 못함이 잘 알려져 있고 이를 보완하기 위해서 다양한 수정 모형이 개발되었으며 대표적으로 Nelson (1991)은 EGARCH 모형을 Zakoian (1994)은 TGARCH와 같은 모형을 제안하였다. Hansen과 Lunde (2005)의 연구 결과에 따르면 이러한 지렛대 효과가 있음에도 불구하고 GARCH(1,1) 모형이 EGARCH, TGARCH 모형과 비교하여 결코 예측력이 뒤지지 않는다고 하였다.

본 논문은 Hansen과 Lunde (2005)의 연구를 다음의 두가지 방향으로 확장한다. 첫째, 서로 유기적으로 반응하는 금융 시장을 반영하고자 일변량 GARCH 모형 연구를 다변량 GARCH 모형으로 확장하여 연구한다. 다변량으로의 확장시 추정해야하는 모수의 개수가 급격히 늘어나는 차원의 저주 (curse of dimensionality)가 존재하며, 이 차원의 저주를 피하기 위해 Bauwens 등 (2006)에서 소개한 다양한 방법들 중 변수가 크게 증가할수록 모수의 축소가 효과적인 DCC (dynamic conditional correlation) 방법을 이용하였다. 둘째, GARCH 모형들의 예측력 측면의 비교가 아닌 바젤은행감독위원회 (Basel Committee on Banking Supervision; BCBS)에서 제시하는 국제적인 위험관리지표인 VaR

<sup>†</sup> 이 논문은 2014년도 정부 (미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (NRF-2014R1A1A1006025).

<sup>1</sup> (110-745) 서울특별시 종로구 성륜관로 25-2 성균관대학교 통계학과, 대학원생.

<sup>2</sup> 교신저자: (110-745) 서울특별시 종로구 성륜관로 25-2 성균관대학교 통계학과, 조교수.

E-mail: crbaek@skku.edu

(value at risk)를 사용하여 리스크 관리 측면에서의 GARCH 모형 선택을 고려하였다. 만약 비대칭성을 GARCH 모형이 제대로 반영하지 못한다면 꼬리 부분의 추정이 잘 반영되지 않아 VaR를 넓게 잡아 실패율은 작아진다. 즉, 기대되는 손실의 움직임을 넓은 VaR로 수용 (coverage)하기 때문에 예측하지 못한 기대 손실의 횟수가 줄어드는 것이다. 바젤협약에 의해 VaR에 해당하는 위험을 자기자본으로 준비해둬야하는 금전적인 어려움으로 VaR가 넓은 모형만을 선택 할 수 없다. 반면, 좁은 VaR를 추정하면 예측치 못한 기대 손실이 발생하기때문에 리스크 관리에서는 VaR의 추정이 매우 중요하다.

발생 가능한 최대손실금액을 의미하는 VaR는 예측한 수익률의 신뢰수준을 이용하여 계산되기 때문에 Hansen과 Lunde (2005)의 연구를 바탕으로 GARCH(1,1) 모형이 VaR를 잘 추정할 것으로 예상할 수도 있다. 본 논문의 모의실험에서도 다변량 GARCH 모형이 비대칭성을 고려한 GARCH 모형에 비해 예측력의 관점에서는 큰 결과 차이를 보이지 않았다. 하지만, 앞서 설명한 VaR 및 수용율에 대한 트레이드 오프 (trade-off)때문에 단순히 예측력 관점에서 모형을 선택하기 보다 좀 더 신중한 접근이 필요함을 보인다. 실제 모형 선택에 있어서는 평균제곱오차를 비롯하여 VaR 및 실패율 등의 다양한 사후 검정 도구를 종합적으로 고려하여야 할 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서 다변량 표준 GARCH 모형과 다변량 비대칭 GARCH 모형들에 대해 살펴보고 이를 바탕으로 3절에서 리스크 관리 측면에서 다변량 GARCH(1,1) 모형의 강건성에 대한 모의실험 결과를 보고한다. 4절에서는 최근 10년동안의 KOSPI, NASDAQ 및 HANG SENG의 주가 지수 자료를 통해 리스크 관리 측면을 고려한 다변량 GARCH 모형 선택을 논의하며 본 연구의 결과에 대한 토의는 5절에서 다루었다.

## 2. 다변량 변동성 모형

금융 자료에서 변동성은 보통 로그-수익률 (log-return)을 통해 측정된다. 주어진  $t$  시점에서의 주식 가격 혹은 주가 지수등의 관심있는 금융 시계열  $P_t$ 에 대한 로그 수익률은 다음과 같다.

$$r_t = 100(\log P_t - \log P_{t-1}).$$

로그-수익률 (이하 수익률)에 대해서 잘 알려진 사실 (stylized facts)은 평균을 기점으로 대칭적이며 수익률 자체는 적은 상관 (correlation)을 보이지만 절대값 ( $|r_t|$ ) 혹은 제곱 ( $r_t^2$ )을 한 경우에는 매우 강한 상관관계를 보인다는 것이다. 또한 주변분포 (marginal distribution)는 오른쪽으로 치우친 꼬리 (long-tailed) 혹은 두터운 꼬리 (heavy-tailed)를 가지며 가장 중요한 특징으로서는 시간에 따라 분산이 변화한다는 점이다. 이러한 수익률에 대해 다음의 모형을 생각하자.

$$r_t = \mu_t + a_t$$

여기에서  $\mu_t = E(r_t|F_{t-1})$ 는 수익률에 대한 조건부 평균으로  $F_{t-1}$ 은  $(t-1)$ 시점까지의 정보집합 (information set)이며,  $\sigma_t^2$ 는 조건부 분산으로 수익률  $r_t$ 의 변동성이라 부른다.

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t|F_{t-1}) = \text{Var}(a_t|F_{t-1})$$

조건부 평균에 대해서는 Box-Jenkins의 정상 (stationary) ARMA( $p, q$ )모형 혹은 비정상 (nontationary)성을 위해 차분 및 다항 회귀를 비롯한 결정적 추세 (deterministic trend) 모형이 많이 쓰인다.

이분산성을 비롯한 제곱항에 대한 강한 상관관계를 효과적으로 설명하기 위해서 Bollerslev (1986)는 일변량 GARCH( $p, q$ ) 모형을 제안하였으며 다음과 같이 주어진다.

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{2.1}$$

$\epsilon_t$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 백색잡음 오차항 (innovation)으로  $a_t$ 의 정상성을 위해서  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ 와  $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ 의 조건을 가정한다.

GARCH 모형의 경우 오차를 부호에 상관없이 제곱 ( $a_t^2$ )을 통해 변동성을 모형화하여 레버리지 효과를 효과적으로 반영하지 못한다는 단점이 있다. 이를 극복하기 위해 Nelson (1991)은 다음과 같은 일변량 EGARCH( $p, q$ ) 모형을 제안하였다.

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 \tag{2.2}$$

EGARCH는 변동성의 비대칭을 설명하기 위해 오차항 절대값을 두어  $a_t$ 의 부호가 다를 때의 계수를 달리 하여 자료의 지렛대효과를 반영한다.  $\gamma_i$ 의 값이 큰 음수를 가질수록 자료의 비대칭 형태가 강한 것으로 설명된다.

다른 방법으로 Zakoian (1991)은 일변량 TGARCH( $p, q$ )모형을 제안하였으며  $a_t$ 의 제곱항에 지시함수 (indicator function)를 사용하여 오차항의 부호에 따라 계수를 달리 주고있다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i N_{t-1}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{2.3}$$

$$N_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{만약 } a_{t-1} < 0, \\ 0 & \text{만약 } a_{t-1} \geq 0. \end{cases}$$

지금부터는 일변량 모형의 다변량 확장에 대해서 논의한다. 다변량으로의 확장은 기본적으로 서로 비슷한 혹은 다른 주식이라 할지라도 시장의 반응에 매우 민감하게 반응하며, 거시적인 전 세계 금융 시장 역시 온라인 거래 (online trading)의 발달로 유기적으로 밀접하게 연관되어 주가 및 변동성이 함께 움직이는 (moving together) 현상을 설명하기 위해 꼭 필요한 과정이다.  $k$ 차원의 다변량 수익률  $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{kt})'$ 을 다음과 같이 표현하면

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{a}_t,$$

일변량 경우와 비슷하게  $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{r}_t | \mathbf{F}_{t-1})$ 는 조건부 평균을 나타내며 다변량 ARMA( $p, q$ ) (vector ARMA)모형을 통해 모형을 세울 수 있다. 조건부 공분산은

$$\mathbf{H}_t = \text{Cov}(\mathbf{a}_t | \mathbf{F}_t)$$

으로 표현할 수 있으며 일변량 GARCH( $p, q$ ) 모형의 특징을 다변량으로 확장하기 위해서는 조건부 공분산  $\mathbf{H}_t$ 를 효과적인 모형제작이 필요하다.

다변량 GARCH 모형으로의 확장은 크게 세가지 방향으로 연구되어져왔다. 그 첫번째는 일변량 모형에 대한 직접적인 확장으로 Engle과 Kroner (1995)가 제안한 VEC, BEKK 등의 모형이 있다. 하지만 직접적인 확장의 경우 추정해야하는 모수의 개수가 기하 급수적으로 늘어나는 차원의 저주 (curse of dimensionality)를 피할 수 없다. 이를 극복하고자 두번째로 일변량 GARCH 모형을 선형결합으로 표현하는 방법이 제안되었으며 orthogonal-GARCH 모형을 예로 들 수 있으며 이를 확장하여 세번째로 일변량 GARCH 모형의 비선형 결합으로 표현하는 방법이 널리 쓰이고 있다.

본 논문에서는 추정해야하는 모수의 양이 가장 적어지는 비선형 방법 중 조건부 상관계수 모형 (conditional correlation models)을 이용하여 연구를 진행하였다. 조건부 상관계수 모형을 이용한 다변

량 GARCH 모형은 2단계에 걸쳐서 모형화하게 된다. 먼저 개별 수익률  $r_{it}$ 에 대해서 다양한 일변량 GARCH 모형을 세우고 난 뒤 얻어지는 조건부 분산  $\sigma_{iit}$ 을 통해 다변량 상관계수 행렬을 모형한다. 좀 더 엄밀히 표현하자면 먼저 조건부 공분산 행렬  $\mathbf{H}_t$ 가 대칭임을 이용하여 아래와 같이 재매개화 (reparametrization) 할 수 있다.

$$\mathbf{H}_t := [\sigma_{ij,t}] = [\sigma_{iit}\rho_{ijt}\sigma_{jjt}] = \mathbf{D}_t\mathbf{R}_t\mathbf{D}_t$$

여기에서  $\mathbf{D}_t = \text{diag}\{\sqrt{\sigma_{11t}}, \dots, \sqrt{\sigma_{kk t}}\}$ 로 주어지는  $k \times k$  조건부 표준편차 행렬이며  $\mathbf{R}_t$ 는 조건부 상관계수 행렬이다. Engle (2002)은 동적 조건부 상관 (dynamic conditional correlation; DCC) 모형으로 시간에 의존하는 (time dependent) 조건부 상관계수  $\mathbf{R}_t$ 를 제안하였다. 이는 모수에 관한 간단한 조건을 통해 양정치 행렬이 되어야하는 강한 조건을 만족시킨다. 예를 들어 DCC(1,1)의 경우

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{J}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{J}_t = \text{diag}(q_{11t}^{-1/2}, \dots, q_{kk t}^{-1/2})\mathbf{Q}_t\text{diag}(q_{11t}^{-1/2}, \dots, q_{kk t}^{-1/2}) \quad (2.4)$$

으로 주어지며,  $k \times k$  행렬인  $\mathbf{Q}_t = [q_{ijt}]$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\bar{\mathbf{Q}} + \theta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + \theta_2\mathbf{Q}_{t-1} \quad (2.5)$$

$\varepsilon_{it} = a_{it}/\sqrt{\sigma_{iit}}$ 이며  $\bar{\mathbf{Q}}$ 는  $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{kt})'$ 의 비조건부 공분산 행렬이다.  $\mathbf{R}_t$ 가 양정치 행렬임을  $\theta_i > 0, i = 1, 2$  와  $\theta_1 + \theta_2 < 1$ 임을 통해 만족된다.

### 3. 모의실험

본 절에서는 다변량 표준 GARCH 모형이 비대칭성을 고려한 다변량 GARCH에 비하여 리스크 관리 측면에서의 VaR 값 설정 모형에도 우수하게 적합하는가를 모의실험을 통해 살펴본다. 반대로 이야기하자면, 비대칭성을 무시한채 일반적인 다변량 GARCH 모형을 사용하였을 경우에도 리스크 관리에서 GARCH 모형의 강건성 (robustness)이 유지되는가를 살펴보고자 한다.

본 절에서 사용한 모의실험은 표본 크기 2000개의 자료를 토대로 진행하였으며 GARCH 모형의 정상성 (stationary)을 위해서 1000개의 자료의 절삭 (burn-in)을 통하여 데이터를 생성하였다. 또한 라플라스분포가 실증 금융자료 분석에서 GARCH 모형을 더 잘 적합한다는 Byun 등 (2013)의 연구 결과에 따라 본 모의실험에서는 백색잡음의 확률분포의 경우 다변량 정규분포 및 라플라스분포를 사용하였다. 모든 결과는 500번의 반복으로 얻어진 평균 값을 보고한다.

#### 3.1. 모의실험 모형

많은 실증 분석에서 GARCH 모형의 차수가 (1,1)일 때 효과적으로 자료를 설명함을 토대로 본 모의실험에서의 차수는 (1,1)로 정하였다. 조건부 상관계수 모형을 이용한 다변량으로의 확장방법을 사용하여 2단계를 통해 다변량 자료를 생성하였다. 자료 생성에 대한 알고리즘은 다음과 같다.

(1단계) 각각의 일변량 GARCH(1,1), EGARCH(1,1) 및 TGARCH(1,1) 모형을 이용하여 수익률을 생성시킨다.

$$a_{i(t-1)} = \sigma_{ii(t-1)}\varepsilon_{i(t-1)}$$

(2단계) (1단계)에서 생성한  $a_{i(t-1)}$  와  $\sigma_{ii(t-1)}$ 를 사용하여 수식 (2.4)과 (2.5)를 토대로 DCC(1,1)을 따르는 다변량 조건부 공분산 행렬을 생성한다.

$$\mathbf{H}_t := [\sigma_{ijt}] = \mathbf{D}_t\mathbf{R}_t\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_t\mathbf{J}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{J}_t\mathbf{D}_t.$$

(3단계) (2단계)에서 생성된  $\sigma_{iit}$ 를 다시 (1단계)로 대입 (plug-in) 하고 새로 생성된 충격 (innovation)  $\varepsilon_t$ 을 통해 새로운 수익률  $a_{i(t)}$ 를 생성한다.

### 3.2. 비교방법

다변량 MSPE (multivariate mean square predict error)를 통해 예측력을 비교하고 시스템 리스크 관리를 위해 사용되는 Hurlin 과 Tokpavi (2006)의 VaR를 예측한다. 또한 VaR의 사후검정으로 실제로 나타나는 미래 값과 비교하여 VaR가 실제 발생하는 손실을 얼마나 관리할 수 있는지 확인한다.

- 다변량 예측 오차 제곱평균 (multivariate mean squared prediction errors; MSPE) 모형의 예측력을 비교하기 위한 방법으로서 MSPE의 크기의 비교를 이용한다.

$$\text{MSPE} := \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{t=1}^n (\hat{r}_{it} - r_{it})^2$$

금융시계열에서 기간의 차이를 두고 거래한다는 것을 고려하여 영업일 기준 20일의 단기 (short term) 예측과 영업일 기준 100일의 장기 (long term) 예측으로 장·단기 MSPE를 측정한다.

- 다변량 최대손실금액 (multivariate value at risk; VaR) 대표적인 VaR의 측정 방법으로는 분석적 방법 (정규분포를 가정하고 공식을 이용하여 측정), 역사적 시뮬레이션 (과거 자료를 이용해 측정), 몬테카를로 시뮬레이션 (리스크 요인의 확률모형을 통해 측정)의 방법이 있다. VaR는 분석적 방법 중 분산-공분산법의 VaR를 이용하도록 한다.

$$\text{VaR} := W' \hat{r}_t - Z_\alpha \sqrt{W' \hat{\mathbf{H}}_t^D W}$$

벡터 W는 가중치를 설정해주는 벡터로 본 논문에서는 동일한 값을 주었다. VaR의 계산법은 Hurlin 과 Tokpavi (2006)에서 다양하게 제시하고 있다.

- 사후검정 (multivariate backtest) 실제의 모든 자료가 예측한 VaR 안에서만 존재한다면 기업은 VaR의 관리만으로 큰 위험으로부터 벗어날 수 있다. VaR의 사후검정으로 실패율 (Fail)을 확인하여 VaR의 강건성을 확인한다. 예측한 VaR에서 벗어나는 손실을 세어 백분율로 표현한다.

$$\text{Fail} := \sum_{t=1}^n \frac{I\{W'_t r_t < \widehat{\text{VaR}}_t\}}{n} * 100$$

### 3.3. 모의실험 결과

모의실험 결과의 VaR와 실패율은 단기예측과 장기예측의 차이가 거의 없어 장기예측을 기준으로 계산하였다. MSPE는 장·단기 결과를 모두 나타내었고, 도출된 VaR 값은 예측기간 동안 각각의 계산된 VaR의 평균값으로 나타내었다. 일별수익률의 확률분포는 일변량 정규분포 보다는 일변량 라플라스 분포에 더욱 가깝다는 Byun 등 (2013)의 연구결과를 토대로 백색잡음의 확률분포는 다변량 정규분포와 다변량 라플라스 분포로 생성하여 실험을 진행하였다. 자료를 생성하는 각 모형 (식 2.1-2.3)에서  $\alpha$ 의 모수는  $\text{diag}(0.2, 0.3, 0.15)$ ,  $\beta$ 의 모수는  $\text{diag}(0.79, 0.6, 0.8)$ 로 비대칭 모형이 갖는  $\gamma$  모수 값은  $\text{diag}(-0.02, -0.05, -0.1)$ 을 사용하였다.

먼저 흥미롭게도 결과 (Table 3.1-3.3)는 다변량 라플라스 분포를 통해 생성된 자료를 토대로 진행된 모의실험이 다변량 정규분포를 사용한 경우와 비교하여 대체적으로 작은 MSPE, 낮은 실패율 및 좁은

VaR를 보였다. 이러한 점은 일변량 실증 금융 자료 분석에서 라플라스 분포의 우수성을 보인 Byun 등 (2013)의 연구의 확장으로 이번 모의실험 결과를 통해 다변량 금융 자료 분석에서도 라플라스 분포를 사용하여 모형을 적합하는 것이 타당함을 보여준다.

Table 3.1은 비대칭 DCC-EGARCH 모형에서 생성된 자료를 DCC-GARCH, DCC-EGARCH, DCC-TGARCH 모형으로 적합한 결과를 나타낸다. 정규분포의 경우 DCC-GARCH에서의 MSPE가 오히려 비대칭성을 고려한 GARCH 모형보다 작았으며, 라플라스 분포의 경우에서도 MSPE의 값이 크게 뒤지 않음을 확인할 수 있다. 따라서 Hansen과 Lund (2005)의 연구 결과가 다변량 GARCH 모형에서도 MSPE의 관점에서는 그대로 적용됨을 알 수 있다. 하지만, VaR 및 실패율의 경우 트레이드 오프 (trade-off)가 있음을 알 수 있다. 즉 DCC-EGARCH의 경우 가장 좁은 VaR를 주었지만 상대적으로 높은 실패율 값을 나타내었으며, DCC-GARCH의 경우 가장 넓은 VaR를 통해 실패율이 줄어들음을 확인할 수 있다. 따라서 리스크 관리 측면에서 VaR의 추정에 있어서는 훨씬 더 신중한 접근이 필요함을 알 수 있다. 다만 라플라스 분포를 사용한 DCC-TGARCH의 경우 DCC-EGARCH 모형과 비교하였을 때 비슷한 실패율을 보이더라도 더 넓은 VaR를 주어 같은 비대칭성을 고려한 모형이더라도 두 모형의 차이가 존재함을 확인할 수 있다.

**Table 3.1** Goodness of fit measures according to various fitted models when the data is generated by DCC-EGARCH

Generated from	Fitted model	MSPE		VaR		Fail	
		short	long	$\alpha_{0.05}$	$\alpha_{0.01}$	$\alpha_{0.05}$	$\alpha_{0.01}$
Normal innov.	DCC-GARCH	1.823	1.830	-1.259	-1.782	0.077	0.024
	DCC-EGARCH	1.828	1.835	-1.247	-1.765	0.098	0.044
	DCC-TGARCH	1.834	1.841	-1.258	-1.781	0.091	0.034
Laplace innov.	DCC-GARCH	1.817	1.825	-1.260	-1.782	0.075	0.023
	DCC-EGARCH	1.814	1.822	-1.242	-1.757	0.088	0.041
	DCC-TGARCH	1.821	1.830	-1.256	-1.776	0.088	0.032

Table 3.2은 비대칭성을 고려한 DCC-TGARCH 모형으로부터 생성된 자료에 대한 결과를 나타낸다. DCC-EGARCH 모형의 적합이 참 모형의 MSPE 보다 우수하게 나타났으며, 단기예측에서 장기예측으로 갈수록 그 차이는 더 했다. 다변량 DCC-GARCH(1,1) 모형의 MSPE이 비대칭성을 고려한 모형에 비하여 약간 높지만 대체로 예측력 측면으로는 큰 차이를 보이지 않는다. 또한 실패율과 VaR의 트레이드 오프를 확인할 수 있고, 세 비교 모형간의 차이가 매우 적어 다변량 DCC-GARCH(1,1)이 리스크 관리 측면에서 VaR를 추정함에 있어 비대칭성을 고려한 GARCH 모형에 비해 뒤쳐진다 할 수 없다.

**Table 3.2** Goodness of fit measures according to various fitted models when the data is generated by DCC-TGARCH

Generated from	Fitted model	MSPE		VaR		Fail	
		short	long	$\alpha_{0.05}$	$\alpha_{0.01}$	$\alpha_{0.05}$	$\alpha_{0.01}$
Normal innov.	DCC-GARCH	0.137	0.154	-0.288	-0.408	0.077	0.025
	DCC-EGARCH	0.133	0.148	-0.285	-0.403	0.079	0.028
	DCC-TGARCH	0.134	0.150	-0.286	-0.405	0.079	0.027
Laplace innov.	DCC-GARCH	0.105	0.133	-0.263	-0.371	0.059	0.021
	DCC-EGARCH	0.101	0.121	-0.259	-0.366	0.061	0.022
	DCC-TGARCH	0.102	0.125	-0.259	-0.367	0.061	0.023

마지막으로 Table 3.3은 DCC-GARCH 모형에서 생성된 자료에 대한 결과이다. 다변량 정규분포의 경우 단기 장기 모두 비대칭성을 고려한 GARCH 모형의 MSPE가 참모형인 DCC-GARCH 모형보다 오히려 더 작음을 관측할 수 있다. 라플라스 분포의 경우 참모형인 DCC-GARCH 모형의 MSPE가 단기에서는 가장 작았으나 장기예측에서는 오히려 비대칭성을 고려한 모형의 MSPE가 더 작았다. 또한, 사후검정을 나타내는 실패율의 경우 모형에 따른 큰 차이는 없음을 확인할 수 있으나 비대칭성을 고려

한 모형, 특히 DCC-EGARCH 모형이, 정규분포 및 라플라스 분포의 경우 모두 더 좁은 VaR를 주었다. 이는 곧 신뢰구간 관점으로 해석 할 경우 DCC-EGARCH 모형이 주어진 유의 수준  $\alpha$ 에 대해서 좁은 신뢰구간으로 더 나은 포함 정확도 (coverage accuracy)를 보임을 의미한다. 따라서 DCC-EGARCH의 경우 MSPE를 비롯한 VaR, 실패율을 고려하였을 경우 가장 좋은 결과를 주어 참모형 보다도 더 우수한 모형으로 판단된다.

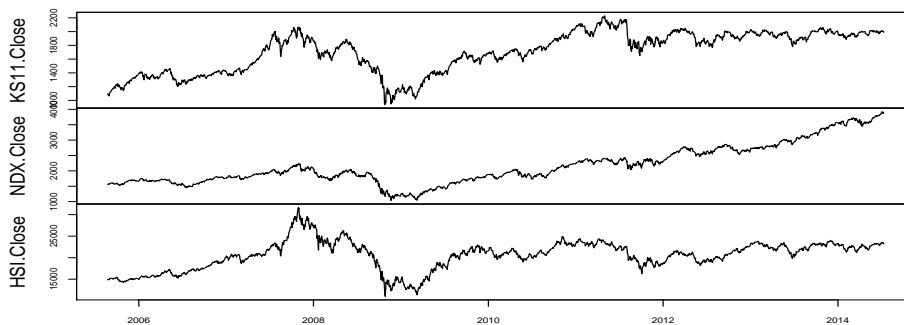
**Table 3.3** Goodness of fit measures according to various fitted models when the data is generated by DCC-GARCH

Generated from	Fitted model	MSPE		VaR		Fail	
		short	long	$\alpha_{0.05}$	$\alpha_{0.01}$	$\alpha_{0.05}$	$\alpha_{0.01}$
Normal innov.	DCC-GARCH	0.171	0.180	-0.331	-0.468	0.074	0.024
	DCC-EGARCH	0.168	0.174	-0.328	-0.464	0.075	0.025
	DCC-TGARCH	0.168	0.176	-0.329	-0.465	0.075	0.025
Laplace innov.	DCC-GARCH	0.151	0.193	-0.313	-0.443	0.061	0.021
	DCC-EGARCH	0.166	0.125	-0.305	-0.432	0.061	0.022
	DCC-TGARCH	0.173	0.156	-0.308	-0.436	0.060	0.022

모의실험 결과 우리는 MSPE의 관점에서는 DCC-GARCH, DCC-EGARCH 및 DCC-TGARCH 모형 모두 큰 차이를 보여주지 않아서 일변량 변동성에서 단순한 GARCH(1,1)모형의 유용성에 대해서 보인 Hansen과 Lunde (2005)의 연구 결과가 다변량에서도 성립함을 확인할 수 있었다. 하지만, 위기관리 관점인 VaR와 실패율에 있어서는 참 모형보다 좋은 리스크 관리 측도 (즉 좁은 VaR 및 낮은 실패율)을 보이는 모형이 존재함을, 예를 들어 DCC-GARCH 모형에서 DCC-EGARCH 모형, 확인할 수 있었다. 이는 곧 리스크 관리 측면에서 모형을 선택할 때는 트레이드 오프와 같은 문제로 VaR 값과 MSPE의 예측력만을 모형을 비교, 고려 할 수 없음을 의미한다. 따라서 실증분석에서는 사후검정인 실패율을 비롯해 매우 다양한 방법 및 측도를 이용한 신중한 결정을 통해 리스크 관리 모형을 선택하여야 함을 보여준다.

#### 4. 주가 지수 실증 분석

우리나라의 KOSPI 계산과 동일한 시가총액방식인 미국의 주식시장 거래지표 NASDAQ과 홍콩상하이은행 (HSBC)의 자회사인 항셍은행이 발행하는 HANG SENG을 다변량 자료로 이용한다. 모의실험과 동일하게 2000일의 과거자료 (2005년 8월 22일 ~ 2014년 01월 28일)를 이용하여, 100일 (2014년 01월 29일 ~ 2014년 7월 08일)을 예측하였다. 각 나라만이 갖는 공휴일의 경우에는 다른 나라의 자료에서도 제외시켜 동일한 영업일만 가지고 있는 자료를 얻어내었다. 제 3절의 결과와 Byun 등 (2013)에 따라 백색잡음의 확률분포는 라플라스분포만 설정하여 보고한다.



**Figure 4.1** Returns of KOSPI, NASDAQ and HANG SENG

세 지수의 수익률 흐름을 나타낸 Figure 4.1으로 2008년 말과 2009년 미국의 서브프라임 모기지사태에 의해 하락하는 동일한 움직임을 볼 수 있고, 세 지수를 변동성으로 나타낸 Figure 4.2에서는 수익률도표에서 발견할 수 없었던 2011년 후반의 유럽발 금융위기의 동일한 변동성 움직임을 볼 수 있다.

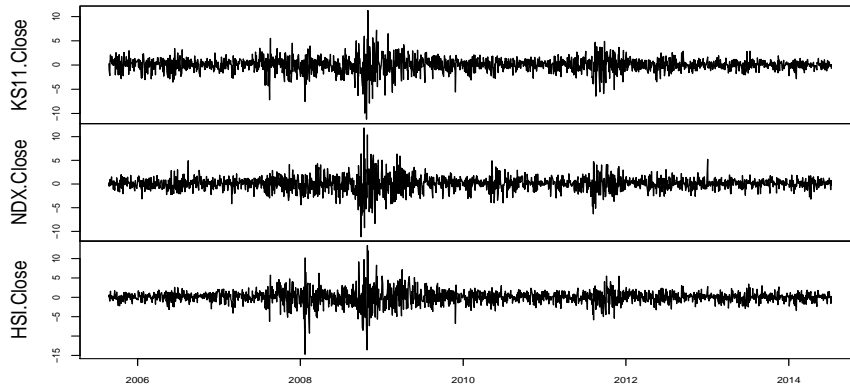


Figure 4.2 Volatilities of KOSPI, NASDAQ and HANG SENG

Table 4.1 Goodness of fit measures from real data analysis

Forecasting term	Fitted model	MSPE	VaR		Fail	
			$\alpha_{0.05}$	$\alpha_{0.01}$	$\alpha_{0.05}$	$\alpha_{0.01}$
short	DCC-GARCH	0.890	-0.901	-1.303	0.053	0.000
	DCC-EGARCH	0.857	-0.878	-1.270	0.053	0.000
	DCC-TGARCH	0.869	-0.890	-1.290	0.053	0.000
long	DCC-GARCH	1.586	-1.101	-1.583	0.061	0.000
	DCC-EGARCH	1.539	-1.133	-1.627	0.040	0.000
	DCC-TGARCH	1.540	-1.133	-1.628	0.040	0.000

실증 자료로 분석한 결과를 나타낸 Table 4.1에서 20일의 단기예측 경우 각 모형의 차이가 크지 않아 단순한 모형인 GARCH(1,1)의 VaR를 추정하는 모형으로 뒤쳐 진다고 할 수 없다. 하지만, DCC-EGARCH 모형이 동일한 실패율에 대해서 MSPE가 가장 작고 VaR 역시 가장 좁게 나타내 DCC-EGARCH 모형이 실증 자료를 가장 잘 표현한다고 볼 수 있다. 100일의 장기예측에서는 DCC 비대칭 GARCH 모형에서 유의수준 0.05하의 실패율이 DCC-GARCH 모형 보다 작은 값을 보이고 있다. 하지만 이 역시 VaR와 실패율의 트레이드 오프로 생기는 문제이며 MSPE를 함께 보아서는 DCC 비대칭 GARCH 모형들이 좋은 예측력을 보이기 때문에 본 논문에서 사용한 주가 지수의 경우 리스크 관리 측면의 모형 선택 시에는 비대칭성을 고려한 DCC-EGARCH 모형의 적합이 타당함을 살펴 볼 수 있다. 따라서 예측력 기반으로는 DCC-GARCH 모형도 좋은 모형이 될 수 있으나 리스크 관리 측면의 VaR 추정에서는 DCC-EGARCH 모형이 더 좋은 모형임을 확인할 수 있다.

또한 Figure 4.3-4.5는 주가 지수 변동성에 대한 향후 100일에 대한 예측값으로 수익율의 절대값 (absolute returns) 및 조건부 표준편차 (conditional standard deviation)를 각 모형별로 나타내었다. 본 논문에서 고려한 세 모형 모두 비슷한 변동성을 추정해주어 DCC-GARCH(1,1) 모형이 변동성을 대체 적으로 잘 반영하고 있음을 알 수 있다. 하지만, 다변량 DCC 비대칭 GARCH 모형들이 지수 변동성의 날카로운 (sharp) 추세를 잘 반영함을 볼 수 있다. 이는, 비대칭성을 고려한 모형이 군집 (cluster)을 이루는 변동성을 DCC-GARCH 모형 보다 더 잘 반영하기 때문이다. 따라서 실증 자료 분석에서는 이처럼 보다 다양한 비교 측도를 다각도로 고려하여야 할 것이다.



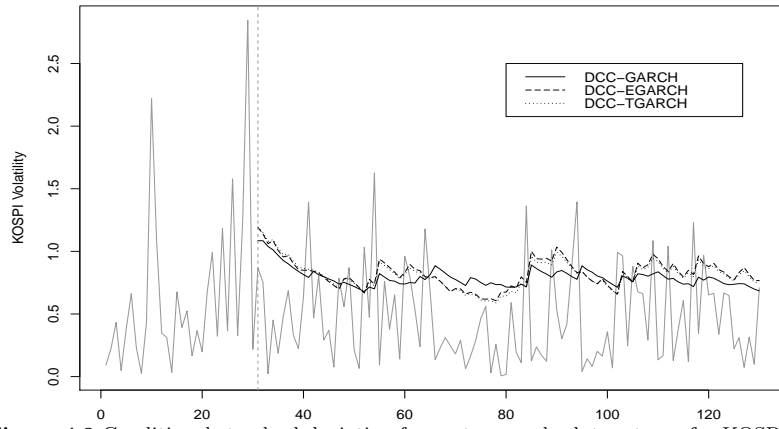


Figure 4.3 Conditional standard deviation forecasts over absolute returns for KOSPI volatility

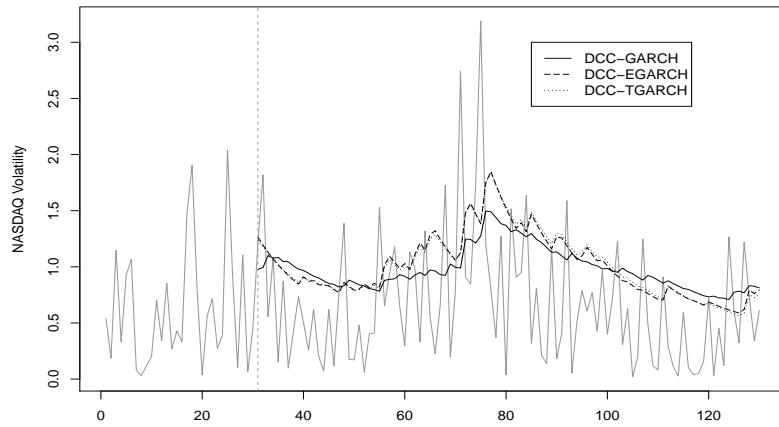


Figure 4.4 Conditional standard deviation forecasts over absolute returns for NASDAQ volatility

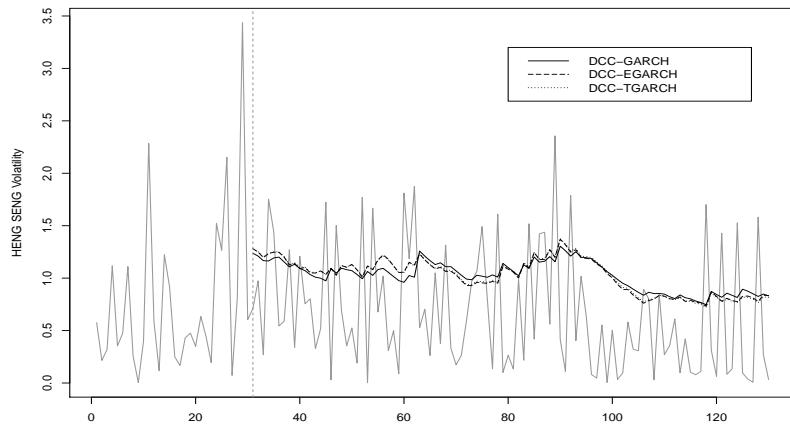


Figure 4.5 Conditional standard deviation forecasts over absolute returns for HANG SENG volatility

## 5. 결론

본 논문은 예측오차뿐만 아니라 리스크 관리 측면도 함께 고려한 다변량 GARCH 모형 선택에 대해서 연구하였다. 리스크 관측 측도로는 VaR 및 실패율을 고려하였다. 다변량 GARCH 모형에서도 Hansen과 Lunde (2005)의 연구 결과와 상동하게 DCC-GARCH(1,1) 모형이 다른 GARCH 모형에 비하여 예측력과 VaR 설정 면에서 뒤쳐 지지않았다. 하지만, 리스크 관리측면에서 VaR와 실패율 사이에는 트레이드 오프가 존재하므로 매우 신중한 접근이 필요하다. 예를 들어 참 모형이 DCC-GARCH라 할지라도 리스크 관리 측면에서는 비대칭 모형이 때로는 더 우수하였다. 따라서 실증 자료 분석에서는 평균제곱오차를 비롯하여 VaR 및 실패율 등의 다양한 사후 검정 도구를 종합적으로 판단해야 한다.

## References

- Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: A survey. *Journal of Applied Econometrics*, **21**, 79–109.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Byun, B., Yoo, D. and Lim, J. (2013). Validity assessment of VaR with Laplacian distribution. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 1263–1274.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, **50**, 987–1007.
- Engle, R. F. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometrics Reviews*, **5**, 1–50.
- Engle, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation a simple class of multivariate GARCH models. *Journal of Business and Economic Statistics*, **18**, 931–955.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, **11**, 122–150.
- Hansen P. R. and Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, **20**, 873–889.
- Hurlin, Christophe, and Sessi Tokpavi. (2006). Backtesting value-at-risk accuracy: A simple new test. *Journal of Risk*, **9**, 19–37.
- Nelson, B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns : A new approach. *Econometrica*, **59**, 347–370.
- Tsay, R. S. (2006). Multivariate volatility models. *Institute of Mathematical Statistics*, **52**, 210–222.
- Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 351–362.
- Zakoïan, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **18**, 931–955.

## On multivariate GARCH model selection based on risk management<sup>†</sup>

SeRin Park<sup>1</sup> · Changryong Baek<sup>2</sup>

<sup>12</sup>Department of Statistics, Sungkyunkwan University, Seoul, Korea.

Received 2 September 2014, revised 5 October 2014, accepted 12 October 2014

### Abstract

Hansen and Lund (2005) documented that a univariate GARCH(1,1) model is no worse than other sophisticated GARCH models in terms of prediction errors such as MSPE and MAE. Here, we extend Hansen and Lund (2005) by considering multivariate GARCH models and incorporating risk management measures such as VaR and fail percentage. Our Monte Carlo simulations study shows that multivariate GARCH(1,1) model also performs well compared to asymmetric GARCH models. However, we suggest that actual model selection should be done with care in light of risk management. It is applied to the realized volatilities of KOSPI, NASDAQ and HANG SENG index for recent 10 years.

*Keywords:* Dynamic conditional correlation, value at risk, volatility models.

---

<sup>†</sup> This research was supported by the Basic Science Research Program from the National Research Foundation of Korea (NRF), funded by the Ministry of Science, ICT & Future Planning (NRF-2014R1A1A1006025).

<sup>1</sup> Graduate student, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, Seoul 110-745, Korea.

<sup>2</sup> Corresponding author: Assistant professor, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, Seoul 110-745, Korea. E-mail: crbaek@skku.edu