

4 x 4 라틴방격모형 내 2 x 2 요인모형의 검정력 연구[†]

최영훈¹

¹한신대학교 응용통계학과

접수 2014년 7월 10일, 수정 2014년 7월 26일, 게재확정 2014년 8월 21일

요약

반복이 존재하는 4 x 4 라틴방격모형 내 2 x 2 요인모형의 주효과 및 상호작용효과를 검정하기 위한 순위변환 통계량의 검정력은 단일모형에 비하여 효과크기 및 반복크기가 커질수록 빠르게 증가한다. 일반적으로 다양한 효과구성 및 모든 오차항 분포와 상관없이 검정하고자 하는 요인 이외의 효과가 존재하는 요인 수가 적고 효과크기가 작을수록 순위변환 통계량의 검정력은 뛰어나다. 특히 오차항이 지수분포 및 이중지수분포일 때 순위변환 통계량의 검정력은 모수적 통계량의 검정력보다 상대적으로 높은 비교우위를 보이며, 정규분포 및 균일분포에서는 전반적으로 별다른 차이가 없다. 이는 두개의 주효과, 한개의 상호작용효과 및 두개의 블록효과 등의 다섯 가지 효과가 동시에 존재하는 다인자로 구성된 라틴방격과 요인모형의 결합형태의 특이성으로 인한 결과이다.

주요용어: 검정력, 순위변환 통계량, 2 x 2 요인모형, 4 x 4 라틴방격모형.

1. 서론

순위변환기법의 응용은 실험계획법의 단일모형에 집중되어 왔으며, 결합모형을 통한 확대적용은 복잡성과 이론적 근거의 미약으로 더디게 발전하여 왔다. Pirie와 Rauch (1984), Pavur와 Nath (1986), Kepner와 Robinson (1988), Akritas와 Papadatos (2004), Choi (1998, 2011)는 요인모형의 순위변환에 따른 이론적 결과 및 모수적 통계량과 순위변환 통계량의 검정력 비교를 연구하였다. 추가적으로 Hora와 Iman (1988), Jo와 Kim (2013)은 하나의 블록만이 존재하는 완전확률화 블록모형을, Choi (2009, 2012)는 두 블록이 동시에 존재하고 관심 처리수준이 랜덤화의 제약을 갖는 두 블록인 행과 열의 수준과 동일하며 행과 열에 한 번씩만 존재하는 특이성을 갖는 라틴방격모형의 검정력 분석을 수행하였다. 한편 Choi (2012)는 아직까지 구체화하지 못한 단일모형들이 다인자로 결합구성된 실험계획에 적용할 순위변환 검정력의 타당성 및 앞으로 이러한 응용모형의 폭을 더욱 확대하기 위한 연구과제의 필요성을 제시하였다. 따라서 본 연구를 통하여 자주 사용하는 보편화된 모형으로 주효과와 상호작용효과가 동시에 존재하는 요인모형과 적용상에 뛰어난 효율성을 가진 라틴방격모형의 결합에 따른 모수적 ANOVA F 통계량과 순위변환된 ANOVA FR 통계량 사이의 검정력을 시뮬레이션을 이용하여 비교분석하고자 한다. 구체적으로 다양한 검정력 변화분석을 살펴보고자 기본적인 반복이 존재하는 4 x 4 라틴방격모형 내의 2 x 2 요인모형을 고려하고자 한다. 주어진 4 x 4 라틴방격모형이 이용된다면 관심대상의 처리수준은 2 x 2 요인모형으로부터 네 가지 조합형태를 갖으며, 이는 실질적으로 각 처리수준이 검정력 분석에 너무 적은 반복형태가 될 수 있다. 그러므로 Neter 등 (1990)이 제시한 각 행과 각 열의

[†] 본 연구는 한신대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.

¹ (447-791) 경기도 오산시 양산동 411, 한신대학교 응용통계학과, 교수. E-mail: choicyh@hs.ac.kr

결합셀 내에서 2 x 2 요인모형으로 구성된 각 처리수준에 대하여 약간의 반복수를 증가함으로써 세밀한 검정력 비교분석을 시도하고자 한다.

Choi (2009)에서와 같이 실험계획 시 모집단 인자수준을 임의로 선택하는 랜덤효과를 고려한 모형에서는 모수적 통계량과 순위변환된 통계량의 검정력을 더욱 떨어뜨려 차이점을 희석시키기도 한다. 특히 요인간의 상호작용이 동시에 존재하는 요인모형은 검정력 비교분석을 보다 명확히 하기위해 고정효과를 가정할 필요가 있다. 이에 본 연구는 4 x 4 라틴방격모형 내 2 x 2 요인모형의 검정력 분석을 위하여 인자들이 모두 고정인 경우의 고정효과에 따른 F 통계량 및 FR 통계량간의 검정력에 미치는 영향력 분석을 중점적으로 살펴보고자 한다.

2. 통계모형 및 검정기법

연구대상인 반복이 존재하는 4 x 4 라틴방격모형 내 2 x 2 요인모형의 통계적 결합모형은

$$Y_{ijklm} = \mu + \tau_i + \beta_j + \tau\beta_{ij} + \gamma_k + \delta_l + \epsilon_{ijklm},$$

단 $i, j = 1, 2, k, l = 1, 2, 3, 4, m = 1, 2, \dots, n$

으로 Hicks (1982)는 정의한다. τ_i 는 주인자 A의 i 번째 수준의 주효과를, β_j 는 주인자 B의 j 번째 수준의 주효과를, $\tau\beta_{ij}$ 는 인자 A의 i 번째 수준과 인자 B의 j 번째 수준의 조합 AB에 의한 상호작용 효과를, γ_k 는 블럭인자 C의 k 번째 수준의 블럭효과를, δ_l 는 블럭인자 D의 l 번째 수준의 블럭효과를, ϵ_{ijklm} 는 정규모집단 $N(0, \sigma^2)$, 단 $\sigma^2 = 1, 2$, 지수모집단 $Exp(1)$, 이중지수모집단 $D(0, 1)$ 및 균일모집단 $U(-1, 1)$ 으로 발생한 오차항을 가정한다. 즉 본 연구의 대상인 Montgomery (1991)이 제시한 4 x 4 라틴방격모형 내 2 x 2 요인모형은 아래의 Table 2.1과 같다.

Table 2.1 2 x 2 factorial in 4 x 4 latin square design

row	column			
	1	2	3	4
1	$P(\tau_1\beta_1)$	$Q(\tau_1\beta_2)$	$R(\tau_2\beta_1)$	$S(\tau_2\beta_2)$
2	$Q(\tau_1\beta_2)$	$P(\tau_1\beta_1)$	$S(\tau_2\beta_2)$	$R(\tau_2\beta_1)$
3	$R(\tau_2\beta_1)$	$S(\tau_2\beta_2)$	$Q(\tau_1\beta_2)$	$P(\tau_1\beta_1)$
4	$S(\tau_2\beta_2)$	$R(\tau_2\beta_1)$	$P(\tau_1\beta_1)$	$Q(\tau_1\beta_2)$

4 x 4 라틴방격모형 내에서 2 x 2 요인모형을 관심 처리수준으로 동시에 반영한 결합모형에 있어서 각 블럭인자들은 4개씩의 수준을 갖고, 요인모형의 인자조합의 수는 정확하게 블럭인자의 수준수와 일치하여야 한다. 즉 관측값 Y_{ijklm} 은 라틴방격모형의 두 블럭인자간 16개의 결합셀 내에서 2 x 2 요인모형의 요인수준 조합형태인 처리수준 P, Q, R, S 가 각행과 각열에 한번씩 나타난다. Montgomery (1991)에 의하면 실질적인 관심 처리수준으로 일컬어지는 라틴문자 P, Q, R, S 는 구체적으로 2 x 2 요인모형의 4종류 조합형태로 Table 2.1의 $P(\tau_1\beta_1) = \tau_1 + \beta_1 + \tau\beta_{11}$, $Q(\tau_1\beta_2) = \tau_1 + \beta_2 + \tau\beta_{12}$, $R(\tau_2\beta_1) = \tau_2 + \beta_1 + \tau\beta_{21}$, $S(\tau_2\beta_2) = \tau_2 + \beta_2 + \tau\beta_{22}$ 로 요약 정의할 수 있다.

한편 Neter 등 (1990)에서와 같이 분산분석표는 Table 2.2로 정리할 수 있으며, 결합셀 내의 반복크기 n 을 고려할 경우에 주인자, 상호작용 및 블럭인자 제공합들의 자유도는 변함이 없으나, n 이 증가하면 오차 제공합의 자유도가 증가함을 알 수 있다.

Table 2.2 ANOVA for 2 x 2 factorial in 4 x 4 latin square with n replications per cell

Source	SS	df	MS	Statistic
A	$SS_A = 8n \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_{i\dots\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$	1	$MS_A = SS_A/1$	MS_A/MSE
B	$SS_B = 8n \sum_{j=1}^2 (\bar{y}_{.j\dots\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$	1	$MS_B = SS_B/1$	MS_B/MSE
AB	$SS_{AB} = 4n \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\bar{y}_{ij\dots\dots} - \bar{y}_{i\dots\dots} - \bar{y}_{.j\dots\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$	1	$MS_{AB} = SS_{AB}/1$	MS_{AB}/MSE
C	$SS_C = 4n \sum_{k=1}^4 (\bar{y}_{..k\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$	3	$MS_C = SS_C/3$	MS_C/MSE
D	$SS_D = 4n \sum_{l=1}^4 (\bar{y}_{...l} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$	3	$MS_D = SS_D/3$	MS_D/MSE
Error	$SSE = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n (y_{ijklm} - \bar{y}_{ij\dots\dots} - \bar{y}_{..k\dots} - \bar{y}_{...l} + 2\bar{y}_{\dots\dots})^2$	16n-10	$MSE = SSE/(16n-10)$	
Total	$SST = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n (y_{ijklm} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$	16n-1		

Table 2.2로부터 관심사항인 주효과 검정을 위한 귀무가설 $H_0 : \tau_i = 0$ 및 상호작용효과 검정을 위한 귀무가설 $H_0 : \tau\beta_{ij} = 0$ 에 대하여 F 와 FR 은 각각 모수적 ANOVA 검정통계량과 순위변환 F 검정통계량으로 Table 2.3과 같다.

Table 2.3 Hypothesis, statistic, rejection region for testing main and interaction effect

H_0 Statistic	$H_0 : \tau_i = 0$	$H_0 : \tau\beta_{ij} = 0$
F	$8n(16n-10) \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_{i\dots\dots} - \bar{y}_{\dots\dots})^2$	$4n(16n-10) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\bar{y}_{ij\dots\dots} - \bar{y}_{i\dots\dots} - \bar{y}_{.j\dots\dots} + \bar{y}_{\dots\dots})^2$
FR	$8n(16n-10) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n (y_{ijklm} - \bar{y}_{ij\dots\dots} - \bar{y}_{..k\dots} - \bar{y}_{...l} + 2\bar{y}_{\dots\dots})^2$	$4n(16n-10) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\bar{R}_{ij\dots\dots} - \bar{R}_{i\dots\dots} - \bar{R}_{.j\dots\dots} + \bar{R}_{\dots\dots})^2$
r.r.	F, FR > $F_{1,16n-10,0.95}$	

이때 $\bar{y}_{ij\dots\dots} = \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n y_{ijklm}/4n$, $\bar{y}_{i\dots\dots} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n y_{ijklm}/8n$, $\bar{y}_{.j\dots\dots} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n y_{ijklm}/8n$, $\bar{y}_{..k\dots} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^n y_{ijklm}/4n$, $\bar{y}_{...l} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n y_{ijklm}/16n$ 로 정의하며, 순위자료 $R_{ijklm} = R(y_{ijklm})$, $\bar{R}_{ij\dots\dots} = \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n R_{ijklm}/4n$, $\bar{R}_{i\dots\dots} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n R_{ijklm}/8n$, $\bar{R}_{.j\dots\dots} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n R_{ijklm}/8n$, $\bar{R}_{..k\dots} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^n R_{ijklm}/4n$, $\bar{R}_{...l} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^n R_{ijklm}/16n$ 을 의미한다.

주어진 고정효과의 변량을 발생시키기 위하여 Visual C++을 이용하여 각각의 모집단분포를 따르는 오차항을 생성시킨 후, Table 2.1 및 효과크기 $c = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 을 반영한 수치를 통계적 결합모형에 가산하며, Table 2.3의 주효과와 상호작용효과 검정을 위한 모수적 F 통계량 및 순위변환된 FR 통계량 공식을 이용하여 10000번의 반복과정으로부터 유의수준 5% 하에서의 기각율을 계산한다. 이때 τ_i, β_j 의 주효과 및 $\tau\beta_{ij}$ 의 상호작용효과는 각각 $\tau_1 = \tau, \tau_2 = -\tau, \beta_1 = \beta, \beta_2 = -\beta$ 및 $\tau\beta_{11} = \tau\beta_{22} = \tau\beta, \tau\beta_{12} = \tau\beta_{21} = -\tau\beta$ 의 조건식을 이용한다. 한편 $k, l = 4$ 에 따른 블럭효과 γ_k 및 δ_l 구성은 다양화할 수 있지만, $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = 0.5\gamma, \gamma_3 = -0.3\gamma, \gamma_4 = -1.2\gamma$ 및 $\delta_1 = \delta, \delta_2 = 0.3\delta, \delta_3 = -0.2\delta, \delta_4 = -1.1\delta$ 의 비균등간격 효과크기를 나타내는 관계식으로부터 유도하였다.

3. 검정력 비교

본 절에서는 주인자 A, B, 상호작용 AB 및 블럭인자 C, D가 고정인 경우의 주인자 A의 주효과 τ_i 및 상호작용인자 AB의 상호작용효과 $\tau\beta_{ij}$ 를 검정하기 위한 통계량 F 와 FR의 검정력이 빠르게 증가하므

로 반복크기 $n = 1, 4$ 의 상황 하에서 분석하고자 한다.

3.1. 주인자 A, B, 상호작용 AB 및 블럭인자 C, D가 모두 고정인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력

첫 번째로 아래의 Table 3.1은 주인자 A, B, 상호작용 AB 및 블럭인자 C, D가 모두 고정인 경우의 주효과 τ_i 의 검정력을 분석하기 위한 다양한 경우를 제시하고 있다.

Table 3.1 Effect size when factors A, B, AB, C, D are fixed

case	τ	β	$\tau\beta$	γ	δ	case	τ	β	$\tau\beta$	γ	δ
F			all cases of F			FR(3) ⁴	c	0	0	$0.5c$	$0.5c$
FR(1)	c	0	0	0	0	FR(3) ⁵	c	c	0	$0.5c$	0
FR(2) ¹	c	$0.5c$	0	0	0	FR(3) ⁶	c	c	0	c	0
FR(2) ²	c	c	0	0	0	FR(4) ¹	c	$0.5c$	$0.5c$	$0.5c$	0
FR(2) ³	c	0	$0.5c$	0	0	FR(4) ²	c	$0.5c$	0	$0.5c$	$0.5c$
FR(2) ⁴	c	0	c	0	0	FR(4) ³	c	0	$0.5c$	$0.5c$	$0.5c$
FR(2) ⁵	c	0	0	$0.5c$	0	FR(4) ⁴	c	$0.5c$	0	c	$0.5c$
FR(2) ⁶	c	0	0	c	0	FR(4) ⁵	c	c	0	$0.5c$	$0.5c$
FR(3) ¹	c	$0.5c$	$0.5c$	0	0	FR(4) ⁶	c	$0.5c$	$0.5c$	c	0
FR(3) ²	c	$0.5c$	0	$0.5c$	0	FR(5)	c	$0.5c$	$0.5c$	$0.5c$	$0.5c$
FR(3) ³	c	0	$0.5c$	$0.5c$	0						

아래의 Table 3.2 및 Table 3.3은 다섯 인자가 모두 고정인 경우로 Table 3.1에서 제시한 효과크기의 변화 및 각각 반복크기 $n = 1$ 과 $n = 4$ 에 따른 검정력 결과를 나타낸다. Figure 3.1 ($n = 1$)은 F, FR(1), FR(2)⁵, FR(3)²의 경우 및 Figure 3.2 ($n = 4$)는 F, FR(1), FR(2)⁵, FR(3)²의 경우로서 오차항이 정규분포, 지수분포, 이중지수분포 및 균일분포인 모집단으로부터 유의수준 0.05하에서의 주효과 τ_i 의 검정력을 종합적으로 요약한다.

Table 3.2 Power of main effect τ_i when factors A, B, AB, C, D are fixed and $n = 1$

Dist.	c	F	FR(1)	FR(2) ¹	FR(2) ²	FR(2) ³	FR(2) ⁴	FR(2) ⁵	FR(2) ⁶	FR(3) ¹	FR(3) ²	FR(3) ³	FR(3) ⁴	FR(3) ⁵	FR(3) ⁶	FR(4) ¹	FR(4) ²	FR(4) ³	FR(4) ⁴	FR(4) ⁵	FR(4) ⁶	FR(5)	
$N(0, 1)$	0.20	0.104	0.111	0.111	0.109	0.109	0.108	0.110	0.108	0.108	0.111	0.107	0.109	0.110	0.107	0.109	0.109	0.107	0.107	0.107	0.106	0.107	
	0.40	0.275	0.277	0.275	0.269	0.275	0.264	0.276	0.275	0.271	0.276	0.274	0.276	0.271	0.267	0.269	0.272	0.271	0.268	0.269	0.268	0.266	
	0.60	0.526	0.527	0.522	0.505	0.520	0.500	0.523	0.506	0.504	0.513	0.514	0.513	0.502	0.503	0.501	0.516	0.508	0.506	0.505	0.496	0.493	
	0.80	0.768	0.764	0.751	0.727	0.753	0.753	0.755	0.740	0.716	0.744	0.747	0.746	0.729	0.729	0.722	0.746	0.741	0.732	0.730	0.719	0.711	
	1.00	0.910	0.903	0.898	0.882	0.895	0.881	0.903	0.892	0.861	0.895	0.892	0.891	0.883	0.882	0.864	0.892	0.887	0.880	0.886	0.873	0.858	
$N(0, 2)$	0.20	0.076	0.083	0.081	0.082	0.083	0.081	0.082	0.082	0.082	0.081	0.082	0.083	0.080	0.079	0.081	0.081	0.082	0.080	0.081	0.081	0.081	
	0.40	0.162	0.166	0.162	0.163	0.164	0.161	0.167	0.164	0.162	0.162	0.163	0.165	0.159	0.162	0.160	0.164	0.163	0.164	0.157	0.161	0.159	
	0.60	0.305	0.305	0.304	0.299	0.302	0.292	0.304	0.303	0.300	0.304	0.297	0.304	0.296	0.296	0.293	0.300	0.297	0.295	0.296	0.293	0.293	
	0.80	0.481	0.482	0.478	0.462	0.475	0.458	0.478	0.463	0.466	0.470	0.469	0.475	0.463	0.463	0.462	0.472	0.467	0.465	0.468	0.454	0.455	
	1.00	0.664	0.659	0.650	0.629	0.649	0.630	0.657	0.636	0.625	0.648	0.644	0.649	0.629	0.627	0.624	0.644	0.640	0.634	0.631	0.618	0.617	
$Exp(1)$	0.20	0.120	0.181	0.177	0.169	0.168	0.168	0.177	0.172	0.171	0.176	0.174	0.174	0.167	0.165	0.166	0.174	0.174	0.166	0.170	0.164	0.165	
	0.40	0.335	0.444	0.436	0.403	0.437	0.400	0.440	0.419	0.411	0.426	0.428	0.434	0.398	0.389	0.407	0.421	0.420	0.396	0.396	0.390	0.387	
	0.60	0.591	0.675	0.674	0.626	0.671	0.622	0.675	0.651	0.644	0.670	0.662	0.671	0.634	0.620	0.637	0.663	0.654	0.630	0.637	0.618	0.619	
	0.80	0.781	0.824	0.831	0.785	0.830	0.789	0.829	0.814	0.812	0.829	0.822	0.832	0.797	0.790	0.804	0.820	0.815	0.799	0.800	0.790	0.782	
	1.00	0.900	0.916	0.923	0.887	0.922	0.889	0.925	0.911	0.908	0.923	0.920	0.924	0.900	0.894	0.906	0.918	0.914	0.903	0.904	0.897	0.887	
$D(0, 1)$	0.20	0.078	0.097	0.096	0.093	0.096	0.093	0.098	0.097	0.096	0.098	0.097	0.098	0.096	0.096	0.096	0.096	0.096	0.098	0.097	0.097	0.095	
	0.40	0.179	0.216	0.215	0.207	0.216	0.206	0.214	0.211	0.209	0.211	0.212	0.214	0.206	0.202	0.209	0.207	0.213	0.206	0.206	0.203	0.207	
	0.60	0.336	0.387	0.382	0.364	0.385	0.367	0.382	0.368	0.368	0.380	0.379	0.378	0.362	0.362	0.367	0.375	0.376	0.367	0.364	0.362	0.366	
	0.80	0.520	0.568	0.565	0.537	0.562	0.537	0.568	0.546	0.536	0.550	0.559	0.559	0.533	0.526	0.533	0.554	0.550	0.536	0.534	0.531	0.524	
	1.00	0.687	0.724	0.716	0.687	0.717	0.688	0.720	0.700	0.682	0.710	0.712	0.712	0.688	0.679	0.682	0.705	0.704	0.688	0.689	0.679	0.668	
$U(-1, 1)$	0.20	0.202	0.199	0.199	0.192	0.199	0.194	0.199	0.193	0.195	0.193	0.197	0.196	0.194	0.192	0.195	0.196	0.198	0.191	0.194	0.192	0.193	
	0.40	0.627	0.585	0.587	0.563	0.585	0.565	0.589	0.576	0.578	0.588	0.581	0.584	0.570	0.567	0.567	0.583	0.574	0.574	0.573	0.563	0.562	
	0.60	0.944	0.915	0.919	0.890	0.919	0.890	0.921	0.907	0.895	0.918	0.916	0.915	0.900	0.899	0.891	0.912	0.910	0.900	0.908	0.894	0.877	
	0.80	0.999	0.998	0.997	0.995	0.996	0.995	0.998	0.997	0.998	0.997	0.996	0.995	0.995	0.995	0.993	0.982	0.997	0.994	0.993	0.993	0.989	0.981
	1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.998

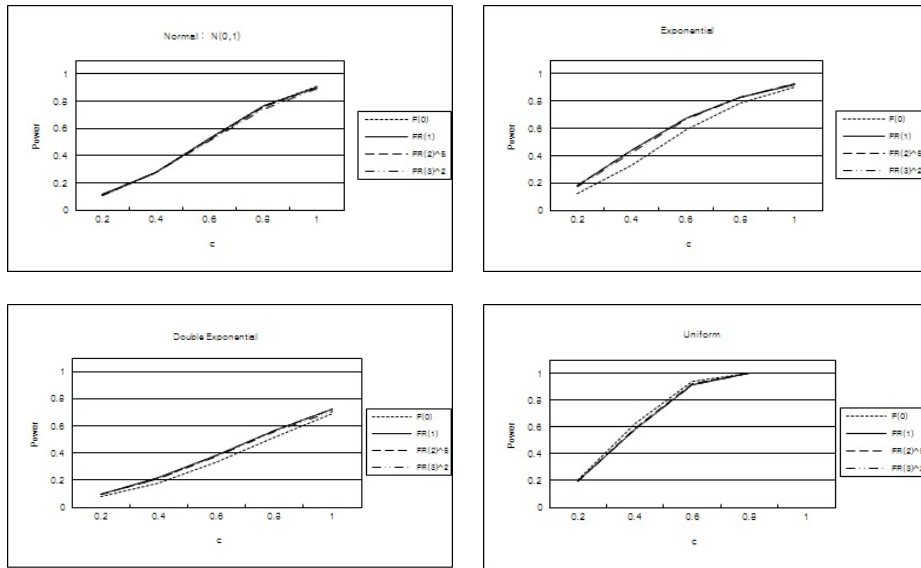


Figure 3.1 Power of main effect τ_i where $n = 1$ and $FR(1) \tau = c, \beta = \tau\beta = \gamma = \delta = 0,$
 $FR(2)^5 \tau = c, \gamma = 0.5c, \beta = \tau\beta = \delta = 0, FR(3)^2 \tau = c, \beta = \gamma = 0.5c, \tau\beta = \delta = 0$

Table 3.2 및 Figure 3.1에서 알 수 있는 바와 같이, 우선적으로 F 통계량의 검정력은 검정하고자 하는 주효과 τ_i 이외에 주효과 β_j , 상호작용효과 $\tau\beta_{ij}$ 및 블럭효과 γ_k, δ_l 등이 주효과 τ_i 와 동시에 존재하는지 여부에 영향을 받지않고 동일하다. 즉 F 통계량의 검정력은 검정하고자 하는 주효과 τ_i 의 효과크기 c 의 영향만을 받으며, 검정대상이 아닌 주효과 β_j , 상호작용효과 $\tau\beta_{ij}$ 및 블럭효과 γ_k, δ_l 의 효과크기에는 영향을 받지않는다. 이에 반해 FR 통계량의 검정력은 검정하고자 하는 주효과 이외의 모든 효과들의 존재유무, 구성형태 및 크기여부에 상당한 영향을 받는다. 이와같은 현상은 FR 통계량이 순위자료에 기반하고 있음에 기인한다.

한편 4 x 4 라틴방격모형 블럭인자간 결합셀 내의 반복이 존재하지 않는 2 x 2 요인모형에서의 주효과 τ_i 검정을 위한 FR 통계량의 검정력은 모든 효과구성 및 오차항의 모집단 분포에 대하여 효과크기 c 가 커질수록 빠르게 증가하는 추세를 보이고 있다. 이는 주효과 τ_i, β_j , 상호작용 $\tau\beta_{ij}$ 및 블럭효과 γ_k, δ_l 등의 다섯 가지 효과가 동시에 존재하는 다인자로 구성된 라틴방격과 요인모형의 결합형태로 인한 결과임을 유추할 수 있다.

특히 오차항이 대표적 비대칭분포인 지수분포하에서 다른 모집단분포에 비하여 주효과 τ_i 검정을 위한 FR 통계량의 검정력은 F 통계량보다 상대적으로 월등히 높은 수준임을 알 수 있다. 그리고 양쪽 끝이 길게 늘어진 이중지수분포에서도 FR 통계량의 검정력이 F 통계량의 검정력보다 상대적으로 높은 비교우위를 갖는다. 정규분포와 균일분포에서는 전반적으로 별다른 차이가 없음을 알 수 있다.

일반적으로 효과가 존재하는 요인수가 적어지고 효과크기가 작아질수록 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 높아짐을 알 수 있다. 즉 대략적으로 다섯 가지 효과가 전부 존재하는 FR(5)의 경우보다는, 네 가지 효과가 존재하는 FR(4)¹ ~ FR(4)⁶의 경우가, 세 가지 효과가 존재하는 FR(3)¹ ~ FR(3)⁶의 경우가, 두 가지 효과가 존재하는 FR(2)¹ ~ FR(2)⁶의 경우가, 한 가지 효과만이 존재하는 FR(1)의 경우일수록 FR 통계량의 검정력은 상대적으로 높아진다. 아울러 효과가 존재하는 요인 수가 동일하다면, 주인자나 상호작용 인자보다는 블럭인자의 효과가 존재하는 경우가 FR 통계량의 검정력을 향상시키는 결과를 보인다.

Table 3.3 Power of main effect τ_i when factors A, B, AB, C, D are fixed and $n = 4$

Dist.	c	F	FR(1)	FR(2) ¹	FR(2) ²	FR(2) ³	FR(2) ⁴	FR(2) ⁵	FR(2) ⁶	FR(3) ¹	FR(3) ²	FR(3) ³	FR(3) ⁴	FR(3) ⁵	FR(3) ⁶	FR(4) ¹	FR(4) ²	FR(4) ³	FR(4) ⁴	FR(4) ⁵	FR(4) ⁶	FR(5)		
N(0, 1)	0.20	0.359	0.344	0.344	0.346	0.343	0.341	0.343	0.343	0.344	0.344	0.341	0.343	0.343	0.343	0.344	0.343	0.342	0.343	0.344	0.344	0.344	0.344	
	0.40	0.888	0.875	0.874	0.869	0.873	0.871	0.874	0.870	0.872	0.871	0.871	0.873	0.869	0.868	0.871	0.871	0.872	0.870	0.869	0.868	0.869	0.869	
	0.60	0.997	0.997	0.996	0.995	0.996	0.996	0.997	0.996	0.996	0.997	0.996	0.997	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
	0.81	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
N(0, 2)	0.20	0.206	0.198	0.196	0.196	0.199	0.199	0.197	0.196	0.196	0.196	0.198	0.196	0.194	0.194	0.196	0.196	0.199	0.195	0.194	0.197	0.197	0.197	
	0.40	0.614	0.593	0.591	0.587	0.590	0.589	0.592	0.588	0.590	0.590	0.590	0.587	0.589	0.589	0.587	0.590	0.589	0.589	0.588	0.589	0.589	0.589	
	0.60	0.919	0.907	0.906	0.904	0.908	0.907	0.908	0.906	0.905	0.907	0.907	0.908	0.902	0.901	0.905	0.905	0.907	0.905	0.903	0.904	0.904	0.904	
	0.80	0.994	0.993	0.992	0.999	0.992	0.991	0.992	0.992	0.991	0.992	0.993	0.993	0.991	0.989	0.992	0.993	0.992	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	
Exp(1)	0.20	0.380	0.645	0.634	0.602	0.633	0.599	0.637	0.614	0.624	0.625	0.628	0.631	0.595	0.581	0.618	0.619	0.620	0.602	0.593	0.596	0.609	0.609	
	0.40	0.882	0.982	0.980	0.969	0.979	0.969	0.981	0.974	0.978	0.978	0.979	0.980	0.968	0.962	0.976	0.978	0.976	0.971	0.968	0.970	0.973	0.973	
	0.60	0.994	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	
	0.81	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
D(0, 1)	0.20	0.216	0.277	0.273	0.269	0.275	0.273	0.277	0.271	0.272	0.274	0.274	0.274	0.269	0.268	0.271	0.274	0.273	0.271	0.268	0.271	0.272	0.272	
	0.40	0.626	0.748	0.745	0.725	0.741	0.725	0.745	0.730	0.738	0.740	0.738	0.743	0.722	0.715	0.734	0.739	0.736	0.725	0.724	0.723	0.733	0.733	
	0.60	0.916	0.968	0.965	0.955	0.965	0.955	0.966	0.960	0.960	0.964	0.963	0.964	0.954	0.950	0.957	0.961	0.960	0.955	0.954	0.954	0.956	0.956	
	0.80	0.989	0.997	0.997	0.996	0.997	0.995	0.997	0.997	0.996	0.997	0.997	0.997	0.996	0.995	0.996	0.997	0.997	0.997	0.997	0.996	0.996	0.996	
U(-1, 1)	0.20	0.784	0.783	0.732	0.721	0.734	0.724	0.736	0.727	0.728	0.731	0.732	0.735	0.724	0.720	0.727	0.729	0.731	0.726	0.722	0.722	0.725	0.725	
	0.41	0.900	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	1.000	0.999	1.000	0.999	0.999	
	0.61	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	0.81	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	

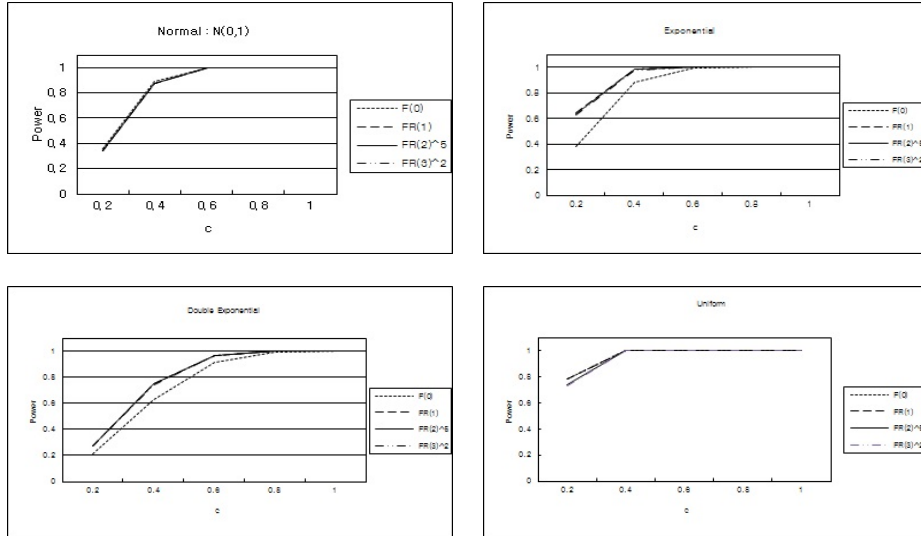


Figure 3.2 Power of main effect τ_i where $n = 4$ and $FR(1) \tau = c, \beta = \tau\beta = \gamma = \delta = 0, FR(2)^{0.5} \tau = c, \gamma = 0.5c, \beta = \tau\beta = \delta = 0, FR(3)^{0.2} \tau = c, \beta = \gamma = 0.5c, \tau\beta = \delta = 0$

블럭인자 간 결합셀 내의 반복크기 $n = 4$ 인 경우 Table 3.3 및 Figure 3.2의 결과들은 반복이 존재하지 않는 $n = 1$ 인 Table 3.2 및 Figure 3.1의 결과들과 전체적으로 일치하며, 보다 명확한 FR 통계량의 검정력 우위성의 결과를 유도한다. 특히 블럭인자간 결합셀 내의 작은 반복크기 $n = 4$ 및 작은 효과크기 $c = 0.2(1.0)0.2$ 를 가정하여도 F 및 FR 통계량의 검정력은 1.0에 빠르게 수렴하며, FR 통계량의 검정력 우위성은 F 통계량의 검정력보다 뛰어남을 알 수 있다. 4×4 라틴방격모형 내의 2×2 요인모형

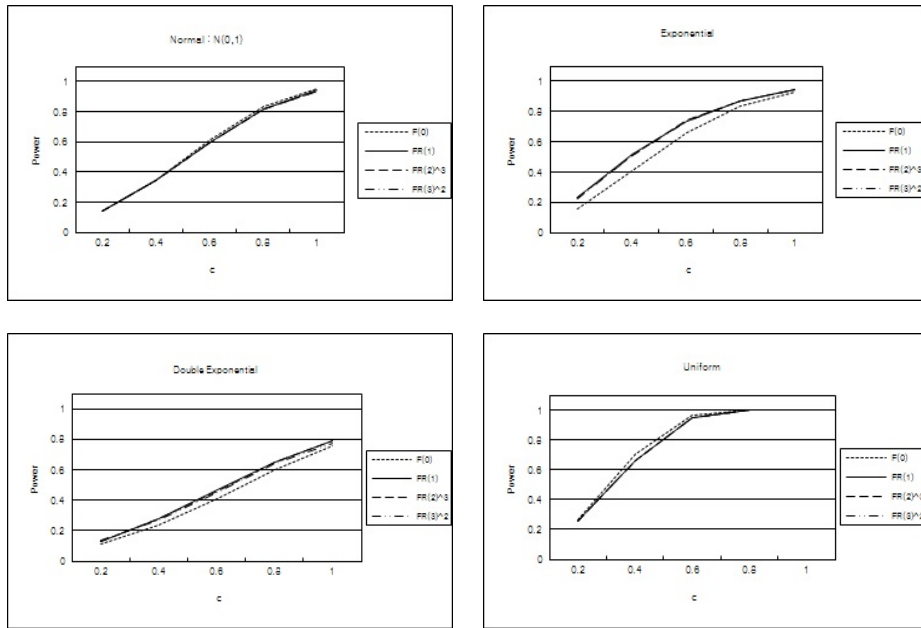


Figure 3.3 Power of interaction effect $\tau\beta_{ij}$ where $n = 1$ and $FR(1) \tau\beta = c, \tau = \beta = \gamma = \delta = 0$
 $FR(2)^3 \tau\beta = c, \gamma = 0.5c, \tau = \beta = \delta = 0, FR(3)^2 \tau\beta = c, \tau = \gamma = 0.5c, \beta = \delta = 0$

Table 3.5 및 Figure 3.3에서 알 수 있듯이 반복크기 $n = 1$ 인 경우 4×4 라틴방격모형 내의 2×2 요인모형에서 유일한 상호작용의 존재로 말미암아 상호작용효과 $\tau\beta_{ij}$ 를 검정하기 위한 F 및 FR 통계량의 검정력은 Table 3.2 및 Figure 3.1의 주효과 τ_i 를 검정하기 위한 F 및 FR 통계량의 검정력보다 전체적으로 높음을 알 수 있으며, 오차항의 모집단분포 및 효과구성 형태등에 상관없이 모든 상황에 있어서 앞선 주효과 검정결과와 상당히 유사하다. 특히 지수분포 및 이중지수분포하에서 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 뛰어난 수준임을 보여준다. 아울러 검정하고자 하는 상호작용효과 $\tau\beta_{ij}$ 만이 존재하는 경우에는 [FR(1)], FR 통계량의 검정력이 가장 뛰어나다. 검정하고자 하는 상호작용 이외에 다른 주효과, 블럭효과 등이 추가로 하나씩 존재하는 경우나 [FR(2)¹ ~ FR(2)⁴], 추가로 두개씩 존재하는 경우나 [FR(3)¹ ~ FR(3)⁵], 추가로 세개씩 존재하는 경우나 [FR(4)¹ ~ FR(4)⁵], 추가로 네개 모두 존재하는 경우에도 [FR(5)], FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 명백한 우위를 나타낸다.

Table 3.6 및 Figure 3.4는 반복크기 $n = 4$ 인 경우 4×4 라틴방격모형 내의 2×2 요인모형에서 상호작용효과 $\tau\beta_{ij}$ 를 검정하기 위한 F 및 FR 통계량의 검정력 비교결과로서, 앞선 Table 3.3 및 Figure 3.2의 반복크기 $n = 4$ 인 경우 주효과 τ_i 에 따른 검정력 결과와 전체적으로 높은 수준으로 일치함을 알 수 있다. 적은 반복크기에도 상호작용효과 이외에 두개의 주효과 및 두개의 블럭효과가 추가로 존재하는 다인자 모형의 특이성으로 말미암아 검정력은 빠르게 증가하며, 지수분포 및 이중지수분포하에서는 모든 상황에서 FR 통계량이 F 통계량보다 검정력 우위를 보이고, 정규분포 및 균일분포에서는 전체적으로 F 통계량과 FR 통계량의 검정력 차이가 존재하지 않는다.

Table 3.6 Power of interaction effect $\tau\beta_{ij}$ when factors A, B, AB, C, D are fixed and $n = 4$

Dist.	c	F	FR(1)	FR(2) ¹	FR(2) ²	FR(2) ³	FR(2) ⁴	FR(3) ¹	FR(3) ²	FR(3) ³	FR(3) ⁴	FR(3) ⁵	FR(4) ¹	FR(4) ²	FR(4) ³	FR(4) ⁴	FR(4) ⁵	R(5)
N(0, 1)	0.2	0.374	0.360	0.359	0.360	0.360	0.361	0.360	0.362	0.360	0.361	0.362	0.361	0.362	0.361	0.361	0.363	0.362
	0.4	0.901	0.886	0.885	0.882	0.886	0.883	0.884	0.883	0.884	0.882	0.880	0.883	0.883	0.879	0.880	0.881	0.876
	0.6	0.999	0.998	0.998	0.998	0.998	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.997	0.997	0.998	0.997	0.998	0.997	0.997
	0.8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
N(0, 2)	0.2	0.218	0.210	0.210	0.210	0.210	0.210	0.208	0.211	0.210	0.212	0.210	0.211	0.211	0.211	0.211	0.212	0.211
	0.4	0.635	0.618	0.614	0.616	0.616	0.615	0.617	0.615	0.616	0.615	0.614	0.616	0.618	0.612	0.615	0.612	0.610
	0.6	0.930	0.918	0.918	0.915	0.917	0.917	0.916	0.916	0.918	0.915	0.913	0.914	0.916	0.912	0.914	0.913	0.909
	0.8	0.997	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.994	0.996	0.995	0.995	0.994	0.995	0.995	0.994	0.995	0.994	0.994
	1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Exp(1)	0.2	0.399	0.661	0.651	0.615	0.654	0.632	0.642	0.642	0.647	0.611	0.598	0.634	0.636	0.614	0.604	0.614	0.627
	0.4	0.887	0.984	0.982	0.971	0.983	0.976	0.981	0.980	0.981	0.971	0.965	0.977	0.979	0.971	0.969	0.973	0.977
	0.6	0.994	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999
	0.8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
D(0, 1)	0.2	0.232	0.298	0.295	0.289	0.296	0.292	0.294	0.294	0.295	0.291	0.287	0.293	0.293	0.289	0.289	0.290	0.292
	0.4	0.639	0.765	0.759	0.742	0.758	0.748	0.754	0.754	0.755	0.741	0.734	0.748	0.749	0.738	0.736	0.743	0.740
	0.6	0.920	0.971	0.968	0.960	0.971	0.964	0.965	0.966	0.968	0.957	0.954	0.962	0.964	0.958	0.957	0.958	0.960
	0.8	0.992	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.997	0.997	0.998	0.998	0.997	0.997	0.997	0.997
	1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
U(-1, 1)	0.2	0.799	0.748	0.746	0.739	0.746	0.740	0.741	0.743	0.742	0.736	0.736	0.741	0.741	0.734	0.734	0.737	0.735
	0.4	1.000	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
	0.6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

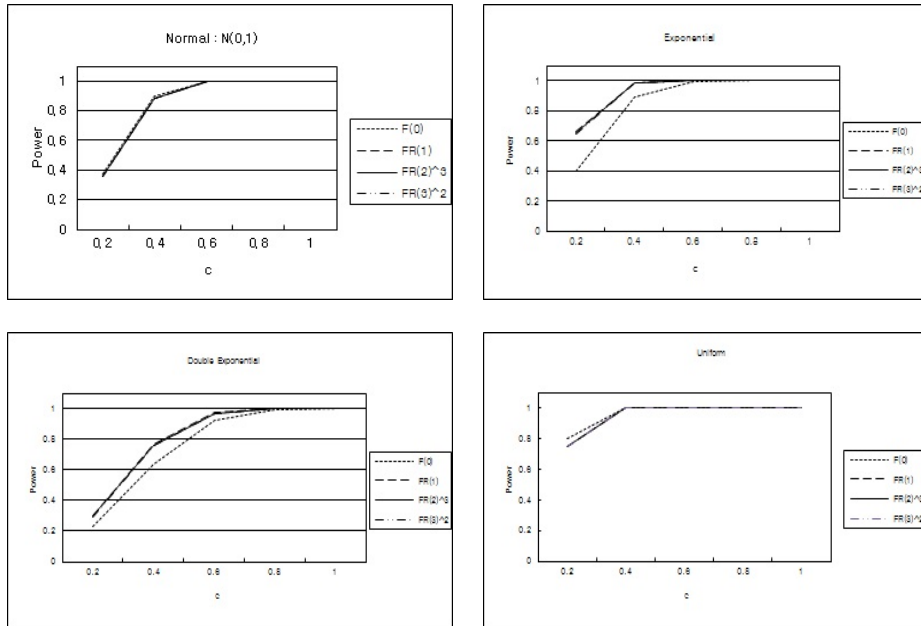


Figure 3.4 Power of interaction effect $\tau\beta_{ij}$ where $n = 4$ and $FR(1) \tau\beta = c, \tau = \beta = \gamma = \delta = 0$, $FR(2)^3 \tau\beta = c, \gamma = 0.5c, \tau = \beta = \delta = 0$, $FR(3)^2 \tau\beta = c, \tau = \gamma = 0.5c, \beta = \delta = 0$

4. 결론

반복이 존재하는 4 x 4 라틴방격모형 내 2 x 2 요인모형에서의 주효과 τ_i 및 상호작용효과 $\tau\beta_{ij}$ 를 검

정하기 위한 순위변환 FR 통계량의 검정력은 효과구성 및 오차항의 모집단분포에 상관없이 단일모형에 비하여 효과크기 및 반복크기가 커질수록 빠르게 증가하는 추세를 보이고 있다. 이는 두개의 주효과, 한 개의 상호작용효과 및 두개의 블록효과 등의 다섯 가지 효과가 동시에 존재하는 다인자로 구성된 라틴 방격과 요인모형의 결합형태의 특이성으로 인한 결과이다. 일반적으로 효과가 존재하는 요인 수가 적고 검정하고자 하는 요인 이외의 효과크기가 작을수록 FR 통계량의 검정력은 뛰어나다. 특히 오차항이 비대칭인 지수분포 및 양쪽 끝이 길게 늘어진 이중지수분포에서 FR 통계량의 검정력은 F 통계량의 검정력보다 상대적으로 높은 비교우위를 나타내며, 정규분포 및 균일분포에서는 전반적으로 별다른 차이가 없음을 알 수 있다.

References

- Akritas, M. G. and Papadatos, N. (2004). Heteroscedastic one way ANOVA and lack of fit tests. *Journal of the American Statistical Association*, **99**, 368-382.
- Choi, Y. H. (1998). A study of the power of the rank transform test in a 2(3) factorial experiment. *Communications in Statistics*, **27**, 251-266.
- Choi, Y. H. (2009). Power analysis for 3 x 3 latin square design. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 401-410.
- Choi, Y. H. (2011). Power analysis for 2 x 2 factorial in randomized complete block design. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 245-253.
- Choi, Y. H. (2012). Power study for 4 x 4 Graeco latin square design. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **23**, 683-691.
- Hicks, C. R. (1982). *Fundamental concepts in the design of experiments*, 3rd edition, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Hora, S. C. and Iman, R. L. (1988). Asymptotic relative efficiencies of the rank transformation procedure in randomized complete block design. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 462-470.
- Jo, S. and Kim, D. (2013). Nonparametric procedures using aligned method and joint placement in randomized block design. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 95-103.
- Kepner, J. L. and Robinson, D. H. (1988). Nonparametric methods for detecting treatment effects in repeated-measures designs. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 456-461.
- Montgomery, D. C. (1991). *Design and analysis of experiments*, 3rd edition, John Wiley & Sons, New York.
- Neter, J., Wasserman, W. and Kutner, M. (1990). *Applied linear statistical model*, 3rd edition, Irwin, Homewood and Boston.
- Pavur, R. and Nath, R. (1986). Parametric versus rank transform procedures in the two-way factorial experiment. *Journal of Statistical Computation Simulation*, **23**, 231-240.
- Pirie, W. R. and Rauch, H. L. (1984). Simulated efficiencies of tests and estimators from general linear models analysis based on ranks: The two-way layout with interaction. *Journal of Statistical Computation Simulation*, **20**, 197-204.

Power study for 2 x 2 factorial design in 4 x 4 latin square design[†]

Young Hun Choi¹

¹Department of Applied Statistics, Hanshin University

Received 10 July 2014, revised 26 July 2014, accepted 21 August 2014

Abstract

Compared with single design, powers of rank transformed statistic for testing main and interaction effects for 2 x 2 factorial in 4 x 4 latin square design are rapidly increased as effect size and replication size are increased. In general powers of rank transformed statistic are superior without regard to the diversified effect composition and the type of error distributions as nontesting factors are few and effect size are small. Powers of rank transformed statistic show much higher level than those of parametric statistic in exponential and double exponential distributions. Further powers of rank transformed statistic are very similar with those of parametric statistic in normal and uniform distributions.

Keywords: Power, rank transformed statistic, 2 x 2 factorial, 4 x 4 latin square.

[†] This research was supported by Hanshin University Research Grant.

¹ Professor, Department of Applied Statistics, Hanshin University, 447-791, Korea.
E-mail: choicyh@hs.ac.kr