

왜정규 위험요인 기반 포트폴리오 위험측도에 대한 안장점근사

유혜경¹ · 나중화²

¹조달청 · ²충북대학교 정보통계학과/비즈니스데이터융합학과

접수 2014년 7월 2일, 수정 2014년 7월 21일, 게재확정 2014년 8월 3일

요약

본 논문에서는 금융분야에서 사용되고 있는 포트폴리오 위험측도인 VaR (value at risk)와 ES (expected shortfall)의 측정 방법으로 안장점근사의 적용 방법을 제시하였다. 본 연구의 특징은 금융 자료에 대하여 정규분포를 가정하지 않고, 치우침을 가정한 왜정규분포를 가정하여 왜정규분포를 따르는 위험요인으로 구성된 선형 포트폴리오 위험측도에 대해 안장점근사를 실시하였다. 또한 모의실험을 통해 위험측도의 안장점근사의 정도가 매우 우수함을 확인하였다.

주요용어: 기대부족액, 안장점근사, 왜정규분포, 위험측도, 최대손실예상금액.

1. 머리말

최근 금융 및 보험 분야에서 중요시되고 있는 위험측도인 VaR (value at risk)과 ES (expected shortfall) 추정에 대해 많은 관심이 집중되고 있다. 위험측도로 사용되는 VaR과 ES의 정확한 계산에 있어 위험요인의 분포 가정이 중요하다. 일반적으로 금융자산의 위험요인들의 분포는 정규분포보다 꼬리가 두터우며 첨도가 큰 분포를 가진다 (Lane, 2000). 본 연구에서는 최근 많은 응용 분야에서 연구되고 있는 왜정규분포를 가정하고, VaR 및 ES 위험측도에 대한 추정을 실시한다. 왜정규분포는 Azzalini (1985, 1986)에 의해 처음 소개된 분포로 정규분포를 포함할 뿐 아니라, 수학적으로 다루기 쉬우며, 다변량으로의 확장이 자연스러운 장점 때문에, 최근 많은 통계적 응용 문제에 적용되고 있다 (Azzalini와 Capitanio, 1999; Azzalini, 2005). 이 가운데 보험 분야에 다변량 왜정규분포를 적용한 연구로는 Vernic (2006)을 들 수 있다.

본 연구에서는 위험요인의 분포로 일변량 및 다변량 왜정규분포를 가정하였다. 2절에서는 위험측도와 안장점 근사를 소개하고, 3절에서는 단변량 및 다변량 왜정규 분포 기반의 선형결합 통계량의 분포함수에 대한 안장점근사를 제시하였다. 4절의 모의실험에서는 분포함수와 함께 VaR과 ES 위험측도에 대한 안장점 근사의 결과를 소개하고, 5절은 결론을 제시하였다.

¹ (302-701) 대전광역시 서구 청사로 189 대전정부청사 3동, 조달청 정보기획과, 지원관.

² 교신저자: (361-763) 충북 청주시 서원구 내수동로 52, 충북대학교 정보통계학과/비즈니스데이터융합학과, 교수. E-mail: cherin@cbnu.ac.kr

2. 위험측도와 안장점근사

2.1. 위험측도

일반적으로 위험 (risk)은 우연한 사고 발생의 불확실성 또는 가능성을 의미하며, 손실의 양적 가능성 또는 기대수익률보다 작게 나타날 양적 가능성으로 정의할 수 있다. 전통적인 방법으로 효율적 포트폴리오를 도출할 때 수익률의 표준편차를 위험측도로 사용하였으나, 최근 실무적인 관점에서 위험관리에 직접적으로 사용될 수 있는 VaR과 ES를 위험측도로 사용하고 있다.

VaR은 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격에 대해 주어진 신뢰수준 하에서 목표기간 동안 발생 가능한 최대손실금액을 의미하며, 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = \int_{VaR_\alpha}^{\infty} f(x)dx.$$

위 식은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$P(X < VaR_\alpha) = F(VaR_\alpha) = 1 - \alpha.$$

여기서 $F(\cdot)$ 는 수익률 X 의 분포함수이다.

VaR은 위험측도로 유용하게 사용되고 있으나, 반면 다음과 같은 한계도 지니고 있다. 첫 번째로 VaR은 VaR을 넘어서는 값의 분포를 반영하지 못하며, 두 번째로 부가법성 (subadditivity)이 성립하지 않는다. 부가법성이란 서로 다른 두 가지 금융상품에 대한 수익률을 X, Y 라 하고, 임의의 위험측도 ρ 를 정의할 때, $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y)$ 가 성립하면 위험측도 ρ 는 부가법성을 갖는다고 한다. Artzner 등 (1999)은 부가법성을 만족하지 않는 위험측도는 일관성 (coherence)이 없다고 주장하였으며, Fery와 Mcneil (2002)는 위험 추정에 있어 일관성이 없는 위험측도가 갖는 문제점을 구체적인 예를 통해 지적하였다. VaR에 대한 최근 연구로는 Byun 등 (2013)이 있다.

위험측도 ES는 위에서 언급한 VaR이 갖는 단점을 보완하기 위한 측도이며 VaR를 넘어서는 값들의 조건부 기대값으로 다음과 같이 정의된다.

$$ES_\alpha = E[X|X > VaR_\alpha].$$

이는 VaR을 넘어서는 값들의 조건부평균으로 VaR을 초과하는 값의 정보를 평균값을 통해 반영한다. 또한 ES는 여러 연구에서 VaR의 단점으로 지적되어 온 부가법성 (subadditivity)을 가지는 측도로 위험측도의 새로운 표준으로 제시되고 있다 (Acerbi와 Tasche, 2001).

위험측도인 ES는 TCE (tail conditional expectation)로 불리는 $E[X|X \geq k]$ 에 대한 계산이 요구된다. 여기서

$$\begin{aligned} E(X|X \geq k) &= E(X - k|X - k \geq 0) + k \\ &= \int_{x \geq k} (x - k) \frac{f(x)}{P(X \geq k)} dx + k \\ &= \frac{E(X - k)^+}{P(X \geq k)} + k, \quad (X - k)^+ = \begin{cases} X - k, & X - k \geq 0 \\ 0, & X - k < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} E(X|X \geq k) &= \int xf(x|x \geq k)dx \\ &= \int \frac{xf(x)}{P(X \geq k)}dx \\ &= \frac{E(X \cdot 1_{\{X \geq k\}})}{P(X \geq k)} \end{aligned}$$

이므로, 식 (2.1)로부터 다음 관계가 성립된다.

$$E[(X - k)^+] = E[X \cdot 1_{\{X \geq k\}}] - kP(X \geq k). \quad (2.2)$$

식 (2.1)과 (2.2)의 두 기댓값은 X 가 특히 서로 독립이며 동일한 분포를 따르는 (*i.i.d*) 확률변수들의 합 즉, $X = \sum X_i$ 으로 표현될 때, 금융과 보험 분야에서 자주 등장한다. 옵션 가격결정에서 $E(X - k)^+$ 는 콜옵션의 지불금 (Rogers와 Zane, 1999)으로 사용되며, CDO (collateralized debt obligation)의 가격에서도 중요한 역할을 한다 (Yang 등, 2006; Antonov 등, 2005). 보험분야에서 $E(X - k)^+$ 은 초과손해액할증금 (stop-loss premium)으로 알려져 있다. 앞서 언급한 바와 같이 $E(X|X \geq k)$ 은 기대부족액 (ES)에 대응되며, 금융과 보험분야에서 위험관리의 측도로써 그 역할이 매우 커지고 있다.

본 연구에서는 *i.i.d* 확률변수들의 선형 포트폴리오 $Y = h'X = \sum_{i=1}^d h_i X_i$ 의 분포함수와 이에 기초한 VaR과 ES 위험측도에 대한 안장점근사를 수행한다. 여기서 $h' = (h_1, \dots, h_d)$ 은 상수벡터이다.

2.2. ES에 대한 안장점근사

안장점근사 (saddlepoint approximation)는 확률표본들의 표본평균의 확률밀도함수에 대한 Daniels (1954)의 연구를 시작으로 1960~1970년대에는 크게 발전을 이루지는 못하였으나, 1980년에 접어들어 많은 연구자들에 의해 연구가 수행되었다. 이 가운데 Barndorff-Nielsen과 Cox (1979)은 안장점근사에 대한 많은 통계적 응용 문제를 제시하였고, Lugannani와 Rice (1980)는 Daniels의 결과를 분포함수의 경우로 확장하였다.

본 절에서는 식 (2.1)로 정의된 위험측도 ES에 대하여 안장점근사를 나타내고자 한다. 확률변수 X 에 대한 누울생성함수를 $\kappa(t)$ 라 할때, $\kappa'(\lambda) = k$ 을 만족하는 안장점을 λ 라 정의하자. $P(X \geq k)$ 의 분포함수에 대한 안장점 근사는 Lugannani와 Rice (1980)의 연구에서 제시한 표본평균에 대한 안장점근사의 결과를 활용하였으며, 그 결과는 다음과 같다.

$$P(X \geq k) \approx 1 - \Phi(R) + \phi(R) \left[\frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right]. \quad (2.3)$$

여기서 $S = \lambda \sqrt{\kappa''(\lambda)}$, $R = \text{sgn}(\lambda) \sqrt{2[\lambda k - \kappa(\lambda)]}$ 이다.

또한 Huang과 Oosterlee (2009)의 연구에서는 $E[(X - k)^+]$ 의 안장점근사 결과를 다음과 같이 도출하였다.

$$E[(X - k)^+] \approx (\mu - k) \left[1 - \Phi(R) - \frac{\phi(R)}{R} \right]. \quad (2.4)$$

여기서 μ 와 R 은 $\mu = E(X)$, $R = \text{sgn}(\lambda) \sqrt{2[\lambda k - \kappa(\lambda)]}$ 이다.

3. 왜정규 선형결합 분포함수 대한 안장점근사

3.1. 왜정규분포

왜정규분포 (skew-normal distribution)는 Azzalini (1985, 1986)에 의해 처음 소개된 분포로 밀도함수가 다음과 같이 주어진다.

$$f(x) = \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{x-\xi}{\omega}\right) \Phi\left(\alpha \frac{x-\xi}{\omega}\right). \quad (3.1)$$

위의 식 (3.1)에서 ξ 와 ω 는 각각 위치 (location)모수와 척도 (scale)모수이고, α 는 왜도모수로 $-\infty < \alpha < \infty$ 이다. 왜정규분포함수는 정규분포의 확률밀도함수 $\phi(\cdot)$ 와 누적확률밀도함수 $\Phi(\cdot)$ 의 곱으로 표현된다. 위 분포는 $SN(\xi, \omega, \alpha)$ 로 나타낸다.

Azzalini와 Della Valle (1996)는 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)' \sim SN_d(\xi, \Omega, \alpha)$ 일 때, 다변량 왜정규분포의 확률밀도함수를 다음과 같이 정의하였다.

$$f(x) = 2\phi_d(x - \xi; \Omega)\Phi(\alpha'\omega^{-1}(x - \xi)), \quad x \in R^d. \quad (3.2)$$

여기서 $\phi(x; \Omega)$ 는 $N_d(0, \Omega)$ 을 따르는 다변량 정규확률분포이며, $\omega = \text{diag}(\sqrt{\Omega})$ 이고, Ω 는 양정치 상관행렬, $\Phi(\cdot)$ 는 $N(0, 1)$ 의 누적분포함수이다.

위의 식 (3.2)를 분포함수로 갖는 다변량 왜정규 확률벡터 \mathbf{X} 의 적률생성함수는 다음과 같다.

$$M_X(t) = 2\exp\left\{\xi't + \frac{1}{2}t'\Omega t\right\}\Phi(\delta'\omega t), \quad t \in R^d. \quad (3.3)$$

여기서 $\delta = \bar{\Omega}\alpha/\sqrt{1 + \alpha'\bar{\Omega}\alpha}$, $\bar{\Omega} = \omega^{-1}\Omega\omega^{-1}$ 이다.

식 (3.3)의 1차 미분과 2차 미분을 이용하여 확률벡터 \mathbf{X} 에 대한 평균벡터와 분산벡터를 구하면 각각 다음과 같다.

$$E(X) = \xi + \omega \cdot \delta\sqrt{2/\pi}, \quad \text{Var}(X) = \Omega - \omega\mu\mu'\omega.$$

3.2. 일변량 왜정규 선형결합 분포함수 대한 안장점근사

X_1, X_2, \dots, X_d 가 서로 독립인 $SN(\xi_i, \omega_i, \alpha_i)$ 을 따를 때, 일변량 왜정규 선형결합 확률변수 $Y = h'X = \sum_{i=1}^d h_i X_i$ 의 누울생성함수는 다음과 같다.

$$\kappa_Y(t) = d \cdot \log 2 + \sum_{i=1}^d t \cdot h_i \xi_i + \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} \omega_i^2 h_i^2 t^2 + \sum_{i=1}^d \log \Phi(\delta_i \omega_i h_i t). \quad (3.4)$$

이때 일변량 왜정규 선형결합의 분포함수에 대한 안장점 근사는 식 (2.3)을 통해 구해진다. 안장점근사를 적용하기 위한 누울생성함수의 1차미분 $\kappa'_Y(t)$ 와, 2차미분 $\kappa''_Y(t)$ 는 각각 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \kappa'_Y(t) &= \sum_{i=1}^d h_i \xi_i + \sum_{i=1}^d h_i^2 \omega_i^2 t + \sum_{i=1}^d \frac{\delta_i \omega_i h_i \phi(\delta_i \omega_i h_i t)}{\Phi(\delta_i \omega_i h_i t)}, \\ \kappa''_Y(t) &= \sum_{i=1}^d \omega_i^2 h_i^2 - \sum_{i=1}^d \frac{\delta_i^2 \omega_i^2 h_i^2 \phi(\delta_i \omega_i h_i t) \{\delta_i \omega_i h_i t \Phi(\delta_i \omega_i h_i t) + \phi(\delta_i \omega_i h_i t)\}}{\Phi^2(\delta_i \omega_i h_i t)}. \end{aligned}$$

여기서 $\delta_i = \alpha_i/\sqrt{1 + \alpha_i}$ 이다. 위 결과로부터 식 (2.3)을 적용하기 위해서는 안장점방정식의 해를 수치적으로 구하는 과정이 요구된다. 일변량 왜정규분포의 표본평균에 대한 안장점근사에 대한 관련 연구로는 Na와 Yu (2013)가 있다.

3.3. 다변량 왜정규 선형결합에 대한 안장점근사

다변량 확률벡터 \mathbf{X} 가 $SN_d(\xi, \Omega, \alpha)$ 를 따른다고 할 때, 확률변수 $Y = h'\mathbf{X}$ 로 정의하자. 이때 다변량 왜정규 선형결합의 분포함수에 대한 안장점 근사는 식 (2.3)을 이용해 구해진다. 앞의 식 (3.3)에 제시된 다변량 확률벡터 \mathbf{X} 의 적률생성함수로부터 확률변수 Y 의 적률생성함수는 다음과 같으며,

$$M_Y(t) = 2exp\left\{th'\xi + \frac{1}{2}t^2h'\Omega h\right\}\Phi(t\delta'\omega h) \quad (3.5)$$

식 (3.5)로부터 누울생성함수 $\kappa_Y(t)$ 에 대한 1차미분 $\kappa'_Y(t)$ 과, 2차미분 $\kappa''_Y(t)$ 는 각각 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \kappa'_Y(t) &= h'\xi + th'\Omega h + \frac{\delta'\omega h\phi(\delta'\omega ht)}{\Phi(\delta'\omega ht)}, \\ \kappa''_Y(t) &= h'\Omega h - \frac{(\delta'\omega h)^2\phi(\delta'\omega ht)(\delta'\omega ht\Phi(\delta'\omega ht) + \phi(\delta'\omega ht))}{\Phi^2(\delta'\omega ht)}. \end{aligned}$$

다변량 분포기반의 안장점근사에 대한 관련연구로 Na (2008)는 다변량정규분포 기반의 이차형식의 분포함수에 대한 안장점근사를 다룬 바 있다.

4. 모의실험

이 절에서는 모의실험을 통해 일변량 왜정규 선형 포트폴리오의 위험측도 VaR과 ES에 대한 안장점 근사의 결과를 제시하고, 정규근사 등과 비교하였다. 위험측도인 VaR과 ES에 대한 안장점 근사는 식 (2.3)과 (2.4)를 적용하였으며, 왜정규 포트폴리오의 위험측도를 측정하기 위하여 3절의 결과를 활용하였다.

4.1. 일변량 왜정규 선형 포트폴리오의 안장점 근사

다음의 Table 4.1은 모의실험에 사용된 왜정규 위험요인의 설계를 나타낸다. 모의실험은 5개의 왜정규 위험요인으로 구성된 선형포트폴리오 $Y = h'X$ 를 고려하였다. 모의실험 결과에서 Sim.Exact는 반복횟수 10 만 번의 모의실험 수행결과를 의미하고, Saddlepoint는 안장점근사, Normal은 정규근사의 결과이다. 여기서 정규근사는 $Y \sim N(E(Y), Var(Y))$ 로 근사한 결과이다.

Table 4.1 Simulation design for linear portfolios based on univariate skew-normal distribution

Simulation	h'	ξ'	ω'	α'
(a)	(1, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 0, 0, 0)	(0.1, 0.5, 1, 1.5, 2)	(0.5, 1, 1.5, 2, 3)
(b)	(1, 3, 5, 7, 10)	(0, 0, 0, 0, 0)	(0.1, 0.5, 1, 1.5, 2)	(0.5, 1, 1.5, 2, 3)
(c)	(10, 7, 5, 3, 1)	(0, 0, 0, 0, 0)	(2, 1.5, 1, 1.5, 2)	(3, 2, 1.5, 1, 0.5)
(d)	(10, 10, 5, 5, 1)	(0, 0, 0, 0, 0)	(2, 1.5, 1, 1.5, 2)	(3, 2, 1.5, 1, 0.5)

분포함수와 VaR과 ES 위험측도에 대한 안장점근사의 결과는 아래의 Figure 4.1, Table 4.2와 Table 4.3에 제시되었다. 이로부터 안장점근사는 정규근사보다 매우 정확한 결과를 제공하며, 모의실험을 통한 정확한 값에 매우 잘 근사하여 위험측도의 근사에 효과적으로 사용될 수 있음을 확인하였다.

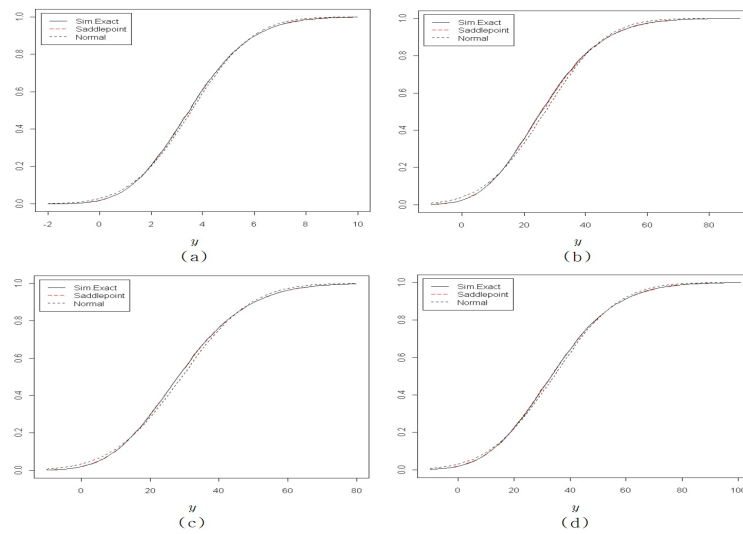


Figure 4.1 Saddlepoint approximations for the distribution function of linear combinations based on univariate skew-normal distribution

Table 4.2 Saddlepoint approximations for VaR of the linear portfolios based on univariate skew-normal distribution

α	(a)			(b)		
	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>
0.050	6.8389	6.8412	6.6654	54.1076	54.3948	52.3389
0.025	7.5721	7.5490	7.2592	60.2528	60.5534	57.2250
0.010	8.4461	8.3922	7.9496	68.1040	67.9025	62.9062
0.005	9.0367	8.9775	8.4197	73.4157	73.0039	66.7747
0.001	10.2781	10.2092	9.3890	83.9697	83.7203	74.7511

α	(c)			(d)		
	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>
0.050	57.3661	57.4764	55.5316	66.2720	66.0885	64.3054
0.025	63.7088	63.7391	60.5753	73.2966	73.0257	70.0905
0.010	70.8636	71.2081	66.4397	81.9952	81.2927	76.8168
0.005	76.1680	76.3913	70.4329	87.4530	87.0320	81.3970
0.001	87.5934	87.2782	78.6664	99.0203	99.1067	90.8407

Table 4.3 Saddlepoint approximations for ES of the linear portfolios based on univariate skew-normal distribution

k	(a)			k	(b)		
	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>		<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>
6.84	7.8219	7.7816	7.6029	54.11	62.5753	62.2588	60.3502
7.57	8.4816	8.4347	8.2490	60.25	68.2584	67.7202	65.7755
8.45	9.2652	9.2284	9.0395	68.10	75.1525	74.8297	72.8941
9.04	9.8110	9.7720	9.5833	73.42	79.8677	79.7085	77.8010
10.28	10.9351	10.9300	10.7452	83.97	89.3577	89.5371	87.7107

k	(c)			k	(d)		
	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>		<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>
57.37	65.7811	65.6500	63.8088	66.27	75.7528	75.4781	73.6795
63.71	71.3854	71.2894	69.4088	73.30	82.0803	81.7369	79.8756
70.86	78.2017	77.7654	75.8867	82.00	89.6801	89.6346	87.7478
76.17	83.1878	82.6315	80.7748	87.45	94.8397	94.6568	92.7751
87.59	93.6197	93.2649	91.4864	99.02	105.5605	105.4361	103.5984

4.2. 다변량 왜정규 선형 포트폴리오의 안장점 근사

다음의 Table 4.4는 다변량 확률변수 \mathbf{X} 가 $SN_d(\xi, \Omega, \alpha)$ 를 따를 때, 선형결합 통계량 $Y = h'\mathbf{X}$ 에 대하여 안장점근사의 정확도를 확인하기 위해 실시한 모의실험 설계이다. 모의실험 결과에서 Sim.Exact는 반복횟수 10만 번의 모의실험 수행결과를 의미하고, Saddlepoint는 안장점근사, Normal은 정규근사의 결과이다. 여기서 정규근사는 $Y \sim N(E(Y), Var(Y))$ 로 근사한 결과이다.

Table 4.4 Simulation design for linear portfolios based on multivariate skew-normal distribution

Simulation	h'	ξ'	α'	Ω
(a)	(1,1,1,1,1)	(0,0,0,0,0)	(0.5,1,1.5,2,3)	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 2.0 & 0.4 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 3.0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 1.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 2.0 \end{pmatrix}$
(b)	(1,3,5,7,10)	(0,0,0,0,0)	(0.5,1,1.5,2,3)	
(c)	(10,7,5,3,1)	(0,0,0,0,0)	(3,2,1.5,2,3)	
(d)	(10,10,10,10,10)	(0,0,0,0,0)	(0.5,1,1.5,2,3)	

분포함수와 VaR과 ES 위험측도에 대한 안장점근사의 결과는 아래의 [그림 4.2], [표 4.4]와 [표 4.5]에 제시되었다. 이로부터 안장점근사는, 일변량의 경우와 마찬가지로, 정규근사보다 매우 정확한 결과를 제공하며, 모의실험을 통한 정확한 값에 매우 잘 근사하여 위험측도의 근사에 효과적으로 사용될 수 있음을 확인하였다.

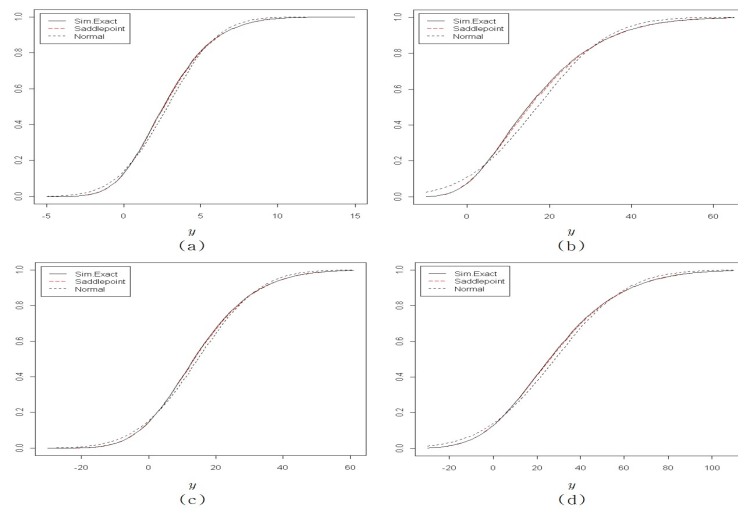


Figure 4.2 Saddlepoint approximations for the distribution function of linear combinations based on multivariate skew-normal distribution

Table 4.5 Saddlepoint approximations for VaR of the linear portfolios based on multivariate skew-normal distribution

α	(a)			(b)		
	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
0.050	7.5470	7.5404	7.1252	42.9406	42.9573	39.8216
0.025	8.6262	8.6153	7.9503	49.0563	49.0999	44.1903
0.010	9.9118	9.8974	8.9095	56.7607	56.4316	49.2699
0.005	10.7746	10.7861	9.5627	61.9010	61.5134	52.7287
0.001	12.6898	12.6481	10.9095	72.5430	72.1539	59.8604
α	(c)			(d)		
	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal	Sim.Exact	Saddlepoint	Normal
0.050	40.4237	40.4635	38.4967	75.7355	75.4035	71.2525
0.025	46.0324	46.2295	43.0489	86.4032	86.1525	79.5027
0.010	53.0753	53.1025	48.3419	99.1425	98.9735	89.0954
0.005	57.7547	57.8661	51.9460	107.8375	107.8610	95.6273
0.001	68.2109	67.8473	59.3773	126.5269	126.4810	109.0954

Table 4.6 Saddlepoint approximations for ES of the linear portfolios based on multivariate skew-normal distribution

(a)				(b)			
k	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>	k	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>
7.55	8.9939	8.9501	8.5852	42.94	51.3500	50.8639	48.3283
8.63	9.9494	9.9081	9.5416	49.06	57.0010	56.2926	53.7752
9.91	11.1171	11.0699	10.7104	56.76	63.7839	63.2587	60.8200
10.77	11.9318	11.8602	11.5087	61.90	68.4603	67.9743	65.6053
12.69	13.7227	13.6404	13.3098	72.54	78.9071	77.8815	75.6676
(c)				(d)			
k	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>	k	<i>Sim.Exact</i>	<i>Saddlepoint</i>	<i>Normal</i>
40.42	48.1692	47.9934	46.2036	75.74	90.0414	89.7353	86.0847
46.03	53.3582	52.9685	51.1607	86.40	99.5496	99.2077	95.5429
53.08	59.7108	59.3292	57.5470	99.14	111.0890	110.7210	107.1269
57.75	64.1738	63.6144	61.8672	107.84	119.2558	118.6868	115.1724
68.21	74.2422	73.3305	71.6834	126.53	137.8814	136.0560	132.7464

5. 결론

일반적으로 금융 및 보험분야에서 발생하는 자료는 정규분포에 비해 꼬리부분이 두터우며, 치우친 형태를 띠고 있는 것으로 알려져 있다. 본 논문에서는 정규분포를 특별한 경우로 포함하는 왜정규분포를 기반으로 하는 선형형포트폴리오의 분포함수에 대한 안장점근사를 다루었다. 또한 보험 및 금융분야의 위험관리 측도로 사용되는 VaR과 ES에 대해 안장점근사도 함께 제시하였다. 모의실험을 통해 제안된 안장점근사가 기존 정규근사에 비해 10 만 번의 모의실험을 통해 구한 정확한 값에 매우 근사함을 확인하였다. VaR을 비롯한 위험측도는 포트폴리오의 꼬리확률의 추정에 매우 민감하며, 따라서 본 논문에서 제시한 분포함수에 대한 안장점근사는 위험측도에 대한 추정에 유용하게 사용될 수 있다.

References

- Acerbi, C. and Tasche, D. (2002). Expected shortfall: A natural coherent alternative to value at risk. *Economic Notes*, **31**, 379-388.
- Antonov, A., Mechkov, H. and Misirpashaev, T (2005). *Analytical techniques for synthetic CDOs and credit default risk measures*, Technical Report, Numerix, New York.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203-228.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.
- Azzalini, A. (1986). Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica*, **46**, 199-208.
- Azzalini, A. (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families(with discussion). *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**, 159-188.
- Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew normal distributions. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **61**, 579-602.
- Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, **83**, 715-726.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. (1979). Edgeworth and saddlepoint approximations with statistical applications(with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **41**, 279-312.
- Byun, B. G., Yoo, D.S. and Lim, J. T. (2013). Validity assessment of VaR with Laplacian distribution. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 1263-1274.
- Daniels, H. E. (1954). Saddlepoint approximations in statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 631-650.
- Huang, X. and Oosterlee C. W. (2009). Saddlepoint approximations for expectations. preprint.
- Lane, M. N. (2002). Pricing risk transfer transactions, *ASTIN Bulletin*, **30**, 259-293.
- Lugannani, R. and Rice, S. (1980). Saddlepoint approximations for the distribution of the sum of independent random variables. *Advances in Applied Probability*, **12**, 475-490.

- McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*, Princeton University Press, New Jersey.
- Na, J. H. (2008). Saddlepoint approximation to quadratic form and application to intraclass correlation coefficient. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **19**, 497-504.
- Na, J. H. and Yu, H. K. (2013). Saddlepoint approximation for distribution function of sample mean of skew-normal distribution. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 1211-1219.
- Rogers, L. C. G. and Zane, O. (1999). Saddlepoint approximations to option prices. *The Annals of Applied Probability*, **9**, 493-503.
- Vernic, R.(2006). Multivariate skew-normal distributions with applications in insurance. *Insurance Mathematics and Economics*, **38**, 413-426.
- Yang, J., Hurd, T. and Zhang, X. (2006). Saddlepoint approximation method for pricing CDOs. *Journal of Computational Finance*, **10**, 1-20.

Saddlepoint approximations for the risk measures of portfolios based on skew-normal risk factors

Hye-Kyung Yu¹ · Jong-Hwa Na²

¹Public Procurement Service

²Department of Information and Statistics/Business Data Convergence,
Chungbuk National University

Received 2 July 2014, revised 21 July 2014, accepted 3 August 2014

Abstract

We considered saddlepoint approximations to VaR (value at risk) and ES (expected shortfall) which frequently encountered in finance and insurance as the measures of risk management. In this paper we supposed univariate and multivariate skew-normal distributions, instead of traditional normal class distributions, as underlying distribution of linear portfolios. Simulation results are provided and showed the suggested saddlepoint approximations are very accurate than normal approximations.

Keywords: Expected shortfall, saddlepoint approximation, skew normal, value at risk.

¹ Researcher, Public Procurement Service, Daejeon 302-701, Korea.

² Corresponding author: Professor, Department of Information and Statistics/Business Data Convergence, Chungbuk National University, Chungbuk 361-763, Korea. E-mail: cherin@cbu.ac.kr