

Q-응력을 이용한 휨 광폭평판 균열부 구속상태 변화 평가[§]

이휘승* · 허남수*† · 김기석** · 심상훈** · 조우연**

* 서울과학기술대학교 기계시스템디자인공학과, ** POSCO 에너지인프라연구그룹

Investigation into Crack-Tip Constraint of Curved Wide-Plate using Q-Stress

Hwee-Sueng Lee^{*}, Nam-Su Huh^{*†}, Ki-Seok Kim^{**}, Sang-Hoon Shim^{**} and Woo-Yeon Cho^{**}

^{*} Dept. of Mechanical System Design Engineering, Seoul Nat'l Univ. of Science and Technology

^{**} Energy Infrastructure Research Group, POSCO

(Received April 7, 2014 ; Revised July 3, 2014 ; Accepted July 10, 2014)

Key Words: Crack-tip Constraint(균열부 구속상태), Curved Wide-Plate(휨 광폭평판), Finite Element Analysis(유한요소해석), HRR Singularity(HRR 특이성), Q-Stress(Q-응력)

초록: 본 논문에서는 휨 광폭평판의 두께와 폭, 균열길이 그리고 가공경화지수의 변화가 휨 광폭평판의 균열부 구속상태에 미치는 영향을 평가하였다. 이를 위해 5가지의 휨 광폭평판 두께, 3가지의 균열길이, 3가지의 휨 광폭평판 폭 그리고 3가지의 가공경화지수를 고려한 3차원 탄소성 유한요소해석을 수행하였다. Ramberg-Osgood 관계식을 만족하는 비선형 재료로 가정하였으며 균열부 구속상태를 정량화하기 위해서 Q-응력을 이용하였다. 3차원 유한요소해석 결과를 바탕으로 기하학적 형상 및 재료특성에 따른 휨 광폭평판의 Q-응력 변화를 평가하였다. 평가 결과 면외 구속조건에 의한 영향은 면내 구속조건과 밀접한 관계가 있었으며, 면외 구속조건이 면내 구속조건 보다 균열부 구속상태에 더 큰 영향을 미쳤다.

Abstract: In the present paper, the effects of the thickness and width of a curved wide-plate, the crack length, and the strain hardening exponent on the crack-tip constraint of the curved wide-plate were investigated. To accomplish this, detailed three-dimensional elastic-plastic finite element (FE) analyses were performed considering various geometric and material variables. The material was characterized by the Ramberg-Osgood relationship, and the Q-stress was employed as a crack-tip constraint parameter. Based on the present FE results, the variations in the Q-stress of the curved wide-plate with the geometric variables and material properties were evaluated. This revealed that the effect of out-of-plane constraint conditions on the crack-tip constraint was closely related to the in-plane constraint conditions, and out-of-plane constraint conditions affected the crack-tip constraint more than in-plane constraint conditions.

1. 서론

에너지 자원의 이송을 위한 핵심 설비인 배관 계통의 건전성 유지는 원자력과 가스를 비롯한 모든 에너지 플랜트 산업에서 가장 중요한 요소 가운데 하나로 인식되고 있다. 이에 따라 설계 및 평가 시 배관 계통에 대한 건전성 평가 결과의 정

확성을 향상시키기 위한 많은 연구들이 수행되고 있다. 결함이 존재하는 원자력 혹은 가스 배관의 정확한 건전성 평가를 위한 요소 가운데 하나는 결함 배관에 대해 정확하게 파괴인성(fracture toughness)을 측정하는 것이다. 일반적으로 결함 배관의 건전성 평가 시 파괴인성을 구하기 위해서는 비교적 깊은 균열이 존재하는 표준시편(standard specimens)을 이용한다. 하지만 표준시편의 경우 평면 변형률 상태를 만족하도록 규정되고 있어 높은 균열부 구속상태를 나타낸다.^(1,2) 그러나 실제 배관의 경우 일반적으로 균열이 얇으며 하중도 인장성분이 지배적이기에 균열부 구속상태가

§ 이 논문은 2014년도 대한기계학회 재료 및 파괴부문 춘계 학술대회(2014. 4. 3.-4., 서귀포 KAL 호텔) 발표논문임

† Corresponding Author, nam-su.huh@seoultech.ac.kr

© 2014 The Korean Society of Mechanical Engineers

낮으며, 이에 따라 높은 균열부 구속상태를 나타내는 표준시편을 사용하여 결정된 파괴인성을 실제 배관 건전성 평가에 이용하면 지나치게 보수적인 결과를 제시하는 것으로 알려져 있다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 다양한 비표준 시편이 제시되었으며,⁽³⁾ 이 가운데 인장 하중이 작용하는 흰 광폭평판이 가스 배관의 건전성 평가를 위해 널리 사용되고 있다. 하지만 결함이 존재하는 구조물의 균열부 구속상태는 구조물의 형상 조건 및 재료 특성에 따라 변하게 되며 이에 따라 흰 광폭평판의 균열부 구속 상태 역시 면내(in-plane) 혹은 면외(out-of-plane) 구속조건에 따라 변하게 된다.⁽⁴⁾ 따라서 인장 하중이 작용하는 흰 광폭평판을 이용하여 실제 배관의 파괴인성을 구하려면 먼저 흰 광폭평판과 실제 배관에 대한 균열부 구속상태 평가가 선행되어야 한다. 그러나 현재까지 인장 하중이 작용하는 흰 광폭평판 균열부 구속효과를 체계적으로 정량화하기 위해 다양한 면내 혹은 면외 구속조건을 고려한 연구는 미비한 실정이다.

본 연구에서는 다양한 형상 조건 및 재료 특성을 고려한 3차원 탄소성 유한요소해석을 수행하여 흰 광폭평판의 균열부 구속상태를 평가하였다. 균열부 구속상태는 Q -응력을 이용하여 정량화하였으며, 3차원 유한요소해석 결과에 입각하여 흰 광폭평판 두께와 폭, 균열길이, 그리고 가공경화지수에 따른 Q -응력 변화를 평가하였다.

2. 해석대상 및 유한요소 구속해석

2.1 해석대상

Fig. 1은 본 논문에서 고려된 흰 광폭평판의 형상을 도식적으로 나타낸 것이다. R_m , R_o 그리고 t 는 평균반경, 외반경 그리고 흰 광폭평판의 두께이며 흰 광폭평판의 폭을 정의하는 각과 원주방향 균열각의 절반을 각각 w 와 β 로 나타냈다. 또한 흰 광폭평판의 길이는 흰 광폭평판 폭의 절반의 3배로 가정하였다. 흰 광폭평판의 형상 변수와 관련하여 먼저 서로 다른 5가지의 흰 광폭평판 두께($R_m/t=5, 10, 20, 26, 30$)를 고려하였다. 일반적인 가스 배관의 경우 R_m/t 값은 약 25~30정도이며 본 연구에서는 특히 가스 배관의 경우를 고려할 수 있도록 R_m/t 값이 큰 범위까지 고려하였다. 흰 광폭평판의 폭으로 3가지 경우($w/\pi=0.125, 0.25, 0.5$)를 고려하였으며, 균열길어도 3가지($\beta/w=0.125, 0.25, 0.5$) 경우를 고려하였다.

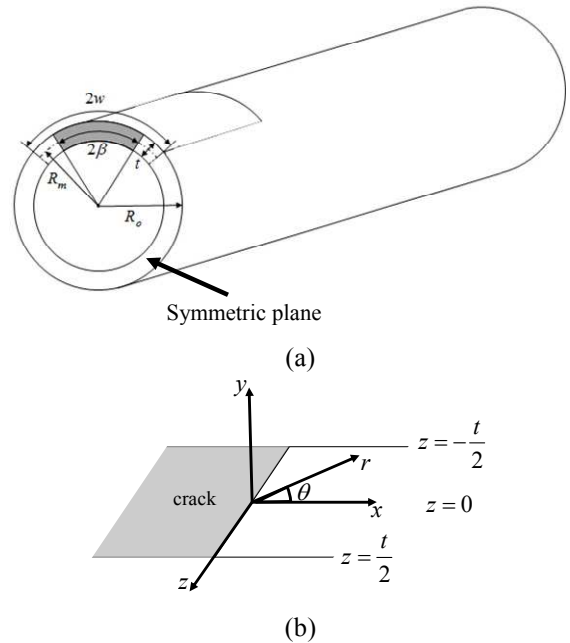


Fig. 1 (a) Schematic of curved wide-plate specimen and (b) local coordinate at the crack-tip

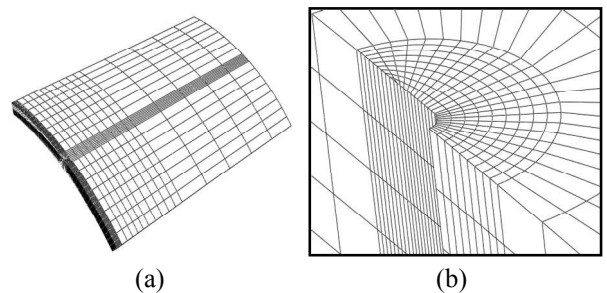


Fig. 2 Typical FE meshes employed in the present study: (a) Curved wide-plate ($\beta/w=0.5, w/\pi=0.25$) and (b) crack- tip region with initial blunting

2.2 유한요소 구속해석

유한요소해석에는 범용 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS⁽⁵⁾가 사용되었다. Fig. 2는 본 연구에서 사용한 대표적인 유한요소모델을 나타낸 것으로 대칭성을 고려하여 전체의 1/4만을 모델링하였으며, 20절점 사각 감차적분요소(20-nodes isoparametric brick reduced integration element, C3D20R in ABAQUS element library)를 사용하여 17,440개의 요소(element)와 76,819개의 절점(node)으로 구성하였다. 균열선단의 구속상태를 정량화하기 위해서는 매우 조밀한 유한요소망이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 균열선단에서 가장 작은 요소와 리가먼트(ligament)의 가장 큰 요소의 비를 $3 \times 10^{-3} \sim 7 \times 10^{-5}$ 로 구성하였다. 또한 두께 방향으로 20개의 요소가

적용되었다.^(1,4)

구속상태 해석을 위해 재료는 다음과 같이 Ramberg-Osgood 관계식을 만족하는 비선형 재료로 가정하였으며, 변형소성이론을 사용하였다.

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (1)$$

여기서, σ_0 는 항복응력, E 는 탄성계수, α 는 재료상수, n 은 가공경화지수이다.

본 논문에서는 $\sigma_0 = 400$ MPa, $E = 200$ GPa, $\alpha = 1$ 로 고정하였으며, 가공경화지수가 흰 광폭평판의 균열부 구속상태에 미치는 영향을 고려하기 위해 3가지 가공경화지수($n=3, 5, 7$) 값을 고려하였다.

J -적분에 의한 균열선단 응력과 변형률은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (3)$$

여기서, I_n 는 가공경화지수에 따른 상수, $\tilde{\sigma}_{ij}$ 와 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ 는 θ 와 n 으로 표현되는 무차원 함수값으로서 평면 응력과 평면 변형률에 따른 값들이 주어져 있다. 식 (2)와 식 (3)에서 J -적분값은 응력 특이성의 정도와 변형률 특이성의 정도를 각각 나타낸다. 균열 선단에서의 국부 좌표의 정의는 Fig. 1(b)에 나타내었다.

전술한 바와 같이 본 논문에서는 균열부 구속상태를 평가하기 위해 Q -응력을 이용하였으며 식 (2)와 Q -응력을 이용하면 실제 균열부 응력상태를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij} \approx \sigma_{ij}^{HRR} + Q \sigma_0 \delta_{ij} \quad (4)$$

여기서, σ_{ij}^{HRR} 은 Hutchinson,⁽⁶⁾ Rice와 Rosengren⁽⁷⁾이 비선형 탄성 재료에서 J -적분을 이용하여 예측한 균열선단 응력장이다. J -적분에 기초한 HRR 응력장은 구조물의 구속상태에 따라 균열선단 응력장을 제대로 나타내지 못할 수 있다. 따라서 O'Dowd와 Shih^(8,9)는 구속효과를 나타내는 매개변수인 Q -응력을 제안하였다. 이들은 소성역 내부의 균열선단 응력장을 급수형태로 나타내었으며, 이를 급수의 첫째항에 해당하는 HRR 응력장과 나머지 고차항으로 구분하여 고차항의 크기를 Q -응력이라

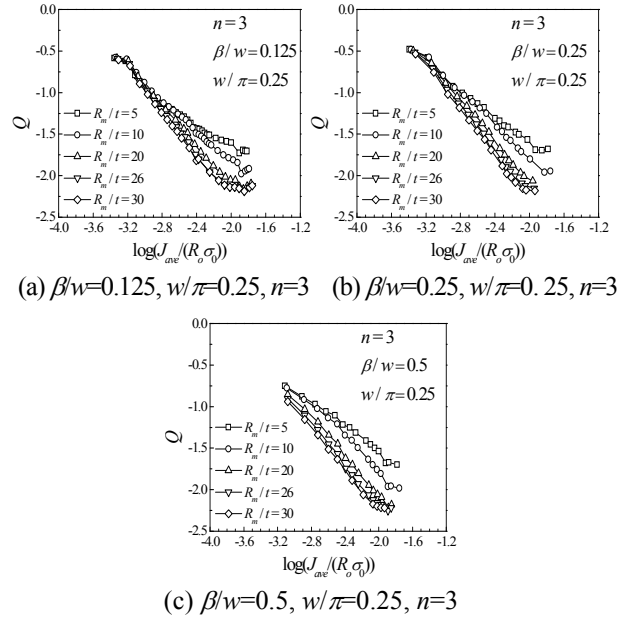


Fig. 3 Variations of Q -stress with the thickness of curved wide-plate

정의하였다. Q -응력은 다음과 같이 정의되며 소규모 항복(small scale yielding) 조건일 때 0이며 변형에 의해 점차 음의 값을 갖게 된다.

$$Q \equiv \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}^{HRR}}{\sigma_0} \quad \text{at } \theta=0, r=2 \frac{J}{\sigma_0} \quad (5)$$

여기서, $\sigma_{\theta\theta}$ 는 원주방향 응력을 나타낸다. 식 (5)에서 $\sigma_{\theta\theta}$ 는 평면 변형률 또는 평면 응력을 기반으로 정의될 수 있으며, 본 연구에서는 평면 변형률 조건을 적용하였다.

또한 유한요소 구속해석 시 J -적분값과 응력값은 Fig. 1(b)에 나타난 바와 같이 흰 광폭평판 두께의 중심($z=0$)에서 계산하였다.

3. 해석결과

Fig. 3과 Fig. 4는 흰 광폭평판 두께에 따른 Q -응력값을 비교하여 나타낸 것이다. 그림에서 x 축은 J -적분값을 흰 광폭평판의 외반경과 항복응력으로 무차원화한 것이다. Fig. 3은 $w/\pi=0.25, n=3$ 일 때 균열길이 별 흰 광폭평판 두께의 영향을 나타낸 것이다. Fig. 3에 나타난 바와 같이 형상 및 재료물성치 조건에 관계없이 흰 광폭평판은 J -적분값이 증가할수록 빠르게 균열부 응력 삼축성(stress triaxiality)이 감소하는 것으로 나타났다(낮은 균열부 구속상태). 또한 J -적분값이 작을 때는 흰 광폭평판의 두께에 따른 구속조건의 변화가 적었지만 J -적분값이 증가하면서 두께에 의한 Q -응력값 차이가 뚜렷하

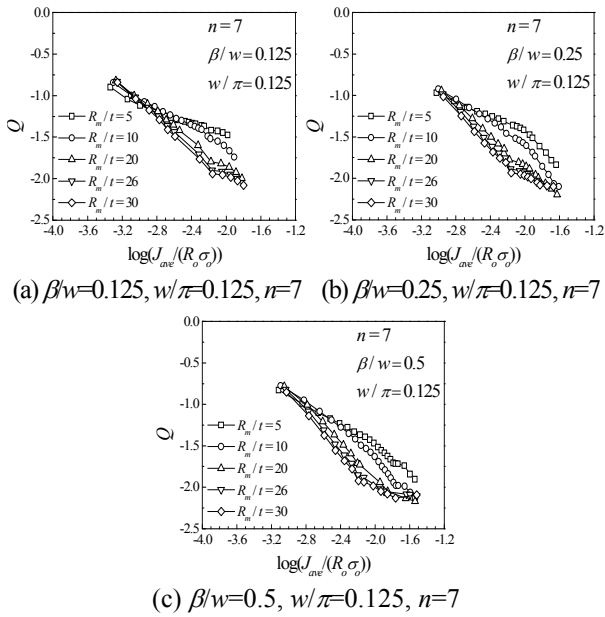


Fig. 4 Variations of Q -stress with the thickness of curved wide-plate

게 나타났는데 이는 J -적분값이 작은 경우에는 비교적 소규모 항복 조건과 유사하여 두께에 따른 Q -응력값의 차이가 적지만 J -적분값이 커질수록 시편 조건에 따라 급격하게 응력 삼축성이 감소하기 때문이다.⁽¹⁰⁾ 이에 따라 균열길이에 관계없이 흰 광폭평판 두께가 두꺼워 질수록(R_m/t 값이 작을수록) 높은 균열부 구속상태 (Q -응력 절대값이 작음)를 나타냈으며, 특히 두께가 비교적 두꺼운 $R_m/t=5$ 와 10 인 경우에는 구속상태의 차이가 큰 반면 비교적 얇은 $R_m/t=20, 26, 30$ 인 경우에는 두꺼운 경우에 비해서 균열부 구속상태의 차이가 작은 것으로 나타났다. 따라서 흰 광폭평판 두께가 두꺼운 경우에는 Q -응력에 미치는 두께의 영향이 크지만 일정 두께 이하일 경우에는 두꺼운 경우에 비해 두께가 Q -응력에 미치는 영향이 줄어드는 것으로 판단된다.

Fig. 4는 $w/\pi=0.125, n=7$ 일 때 흰 광폭평판 두께에 따른 Q -응력값을 균열길이 별로 나타낸 것이며 Fig. 3에 나타난 결과와 유사한 경향을 나타냈다. 또한 위의 결과를 통해서 균열길이에 관계없이 흰 광폭평판 두께에 따른 균열부 구속상태의 차이가 뚜렷하게 나타나는 것으로 보아 균열길이보다 흰 광폭평판 두께가 균열부 구속상태에 미치는 영향이 더 큰 것으로 판단된다. Fig. 3과 Fig. 4에서 전체적으로 Q -응력값은 두께에 의해 5%~29% 정도까지 차이가 발생하였다.

Fig. 5는 균열길이에 따른 Q -응력값을 비교한 것이다. Fig. 5(a)와 (b)는 $w/\pi=0.25, n=5$ 일 때 균열

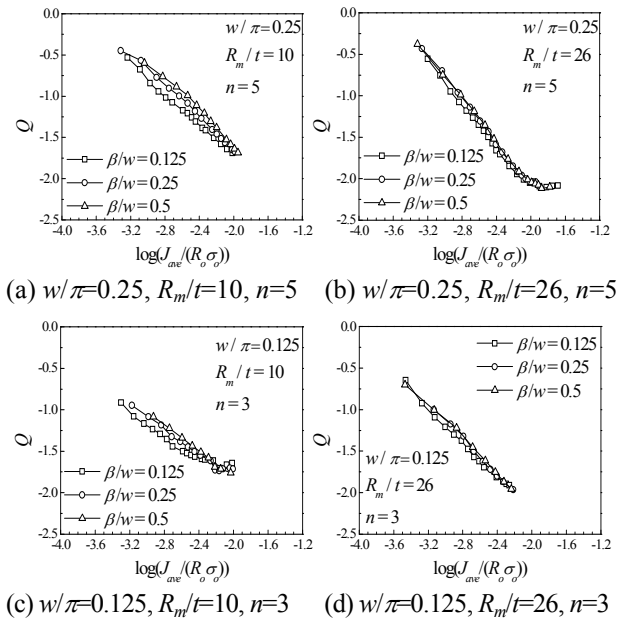
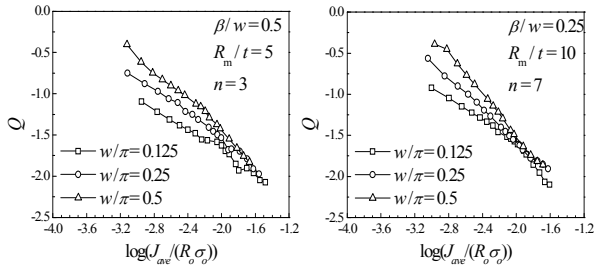


Fig. 5 Variations of Q -stress with the crack length of curved wide-plate

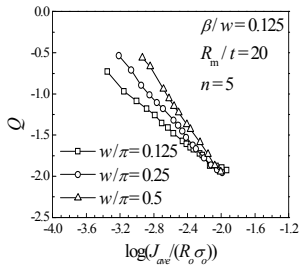
길이에 따른 Q -응력값을 두께 별로 나타낸 것이다. Fig. 5(a)는 R_m/t 가 10인 비교적 두꺼운 흰 광폭평판의 결과이다. Fig. 5(a)에 나타난 바와 같이 균열길이가 길어질수록 높은 균열부 구속상태(Q -응력 절대값 감소)를 나타냈다. 또한 J -적분값이 증가할수록 균열길이에 따른 Q -응력값의 차이가 줄어드는 것으로 나타났다. Fig. 5(b)는 R_m/t 가 26인 비교적 얇은 흰 광폭평판의 결과이다. Fig. 5(a)의 결과와 마찬가지로 균열길이가 길어질수록 더 높은 균열부 구속상태를 나타냈다. 또한 Fig. 5(a)와 (b)를 비교해보면 두께가 두꺼운 경우에는 균열길이에 따른 Q -응력값의 차이가 뚜렷하게 나타나는 반면 두께가 얇은 경우에는 균열길이에 따른 Q -응력값의 차이가 미미한 것으로 나타났다. 이에 따라 두께와 같은 면외 구속조건(out-of-plane constraint condition)이 균열부 구속상태에 미치는 영향은 균열길이와 같은 면내 구속조건(in-plane constraint condition)과 서로 밀접하게 연관되어 있는 것으로 나타났다.

Fig. 5(c)와 (d)는 $w/\pi=0.125, n=3$ 일 때 균열길이에 따른 Q -응력값을 두께 별로 나타낸 것으로 Fig. 5(a), (b)에 나타난 결과와 유사한 경향을 나타냈으며, 전체적으로 균열길이에 의해 Q -응력값은 3%~12% 정도까지 차이가 발생하였다.

Fig. 6은 흰 광폭평판 폭에 따른 Q -응력값을 비교한 것으로 다양한 형상 및 재료물성치 조건에 대해 흰 광폭평판 폭의 영향을 나타내었다. Fig. 6에 나타난 바와 같이 균열길이, 흰 광폭평판 두



(a) $\beta/w=0.5, R_m/t=5, n=3$ (b) $\beta/w=0.25, R_m/t=10, n=7$



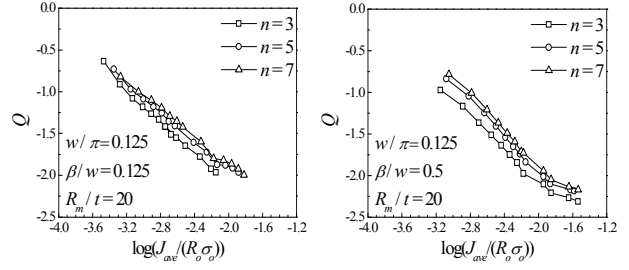
(c) $\beta/w=0.125, R_m/t=20, n=5$

Fig. 6 Variations of Q -stress with the width of curved wide-plate

께 그리고 가공경화지수에 관계없이 흰 광폭평판 폭이 넓어질수록 높은 균열부 구속상태를 나타냈다. J -적분값이 증가할수록 흰 광폭평판 폭에 따른 Q -응력값의 차이가 미미한 것으로 나타났다. 또한 서로 다른 조건을 고려하였다더라도 흰 광폭평판 폭에 따른 Q -응력값 차이의 정도는 유사하게 나타났으며, 전체적으로 3%~58% 정도까지 차이가 발생하였다. 이를 통해 흰 광폭평판 폭이 다른 조건들에 비해 흰 광폭평판 균열부 구속 상태에 많은 영향을 미치는 것으로 판단된다.

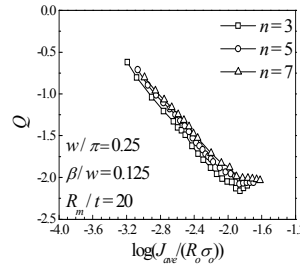
Fig. 7은 가공경화지수에 따른 흰 광폭평판 균열부 Q -응력값을 비교한 것이다. Fig. 7(a)와 (b)는 $w/\pi=0.125, R_m/t=20$ 일 때 가공경화지수의 영향을 각각의 균열길이에 대해 나타낸 것이다. Fig. 7(a)는 $\beta/w=0.125$ 인 균열길이가 짧은 흰 광폭평판의 결과이다. Fig. 7(a)에 나타난 바와 같이 가공경화지수가 높을수록 높은 균열부 구속상태를 나타냈다. Fig. 7(b)는 $\beta/w=0.5$ 인 균열길이가 긴 흰 광폭평판의 결과이며 Fig. 7(a)의 결과와 마찬가지로 가공경화지수가 높을수록 높은 균열부 구속상태를 나타냈다. 또한 균열길이가 긴 경우에는 가공경화지수에 따른 Q -응력값의 차이가 뚜렷하게 나타나는 반면 균열길이가 짧은 경우에는 가공경화지수에 따른 Q -응력값의 차이가 미미한 것으로 나타났다.

Fig. 7(c)와 (d)는 $w/\pi=0.25, R_m/t=20$ 일 때 Q -응력값에 미치는 가공경화지수의 영향을 균열길이 별로 나타낸 것이며 Fig. 7(a)와 (b)에 나타난 결과와 유사한 경향을 나타냈다. 전체적으로 Q -

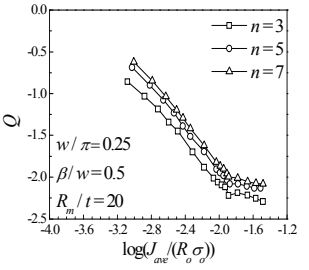


(a) $w/\pi=0.125, \beta/w=0.125, R_m/t=20$

(b) $w/\pi=0.125, \beta/w=0.5, R_m/t=20$



(c) $w/\pi=0.25, \beta/w=0.125, R_m/t=20$



(d) $w/\pi=0.25, \beta/w=0.5, R_m/t=20$

Fig. 7 Variations of Q -stress with the strain hardening exponent

응력값은 고려된 가공경화지수에 의해 1%~38% 정도 차이가 발생하였다.

4. 결론

본 논문에서는 흰 광폭평판의 두께와 폭, 균열길이 그리고 가공경화지수의 변화를 고려하여 흰 광폭평판에 대한 균열부 구속상태 해석을 수행하였다. 이를 통해 얻은 주요 결론은 다음과 같다.

(1) 흰 광폭평판의 두께가 두꺼울수록(R_m/t 가 작을수록) 높은 구속상태를 나타냈으며, 일정 두께 이하가 되면 균열부 구속상태에 미치는 두께의 영향은 미미하였다. 본 논문에서 고려된 범위의 경우 전체적으로 두께에 의한 Q -응력값의 차이는 5%~29% 정도였다.

(2) 균열길이가 길어질수록 흰 광폭평판 균열부는 높은 구속상태를 나타냈다. 흰 광폭평판의 두께가 두꺼운 경우에는 균열길이에 의한 균열부 구속상태의 차이가 뚜렷하게 나타났지만 비교적 두께가 얇은 흰 광폭평판에서는 균열길이에 의한 균열부 구속상태의 차이가 미미하였다. 본 논문에서 고려된 범위의 경우 전체적으로 균열길이에 의한 Q -응력값의 차이는 3%~12% 정도였다.

(3) 흰 광폭평판 폭이 넓어질수록 높은 구속상태를 나타냈으며 J -적분값이 증가할수록 흰 광폭평판 폭에 의한 Q -응력값의 차이는 작아지는 것으로 나타났다. 전체적으로 본 논문에서 고려된 폭 범위에서 Q -응력값의 차이는 3%~58% 정도였

다.

(4) 가공경화지수가 높을수록 높은 균열부 구속 상태를 나타냈다. 균열길이가 긴 경우에는 가공경화지수에 따른 Q -응력값의 차이가 뚜렷하게 나타난 반면 균열길이가 짧은 경우에는 균열길이가 긴 경우에 비해 Q -응력값의 차이가 작았다. 본 논문에서 고려된 범위에서 Q -응력값은 가공경화지수에 의해 1%~38% 정도까지 변화였다.

(5) 면내 구속조건(균열길이, 가공경화지수 등)과 면외 구속조건(두께 등)은 서로 밀접하게 영향을 미쳤으며 특히 면외 구속조건이 면내 구속조건보다 균열부 구속상태에 더 많은 영향을 미치는 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 국토교통과학기술진흥원 플랜트 연구사업의 연구비 지원으로 수행되었습니다(13IFIP-B06700801).

참고문헌 (References)

- (1) Kim, Y.J., Kim, J.S., Cho, S.M. and Kim, Y.J., 2004, "3-D Constraint Effects on J Testing and Crack-Tip Constraint in M(T), SE(B), SE(T) and C(T) Specimens: Numerical Study," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, pp. 1203~1218.
- (2) Betegon, C. and Hancock, J.W., 1991, "Two-Parameter Characterization of Elastic-Plastic Crack-Tip Fields," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 104~110.
- (3) Kirk, M.T. and Dodds, R.H.Jr., 1993, " J and CTOD Estimation Equations for Shallow Cracks in Single Edge Notch Bend Specimens," *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 21, No. 4, pp. 228~238.
- (4) Huh, N.S., Kim, Y.J., Choi, J.B., Kim, Y.J. and Pyo, C.R., 2004, "Prediction of Failure Behavior for Nuclear Piping Using Curved Wide-Plate Test," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 126, pp. 419~425.
- (5) "ABAQUS/Standard User's Manual," Version 6.11-1, Dassault Systemes Corp., 2011.
- (6) Hutchinson, J.W., 1968, "Singular Behavior of End of a Tensile Crack Tip in a Hardening Material," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 13~31.
- (7) Rice, J.R. and Rosengren, G.F., 1968, "Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 1~12.
- (8) O'Dowd, N.P. and Shih, C.F., 1991, "Family of Crack Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter-I, Structure of Fields," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 39, No. 8, pp. 989~1015.
- (9) O'Dowd, N.P. and Shih, C.F., 1991, "Family of Crack Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter-II, Fracture Applications," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 40, No. 5, pp. 939~963.
- (10) Anderson, T.L., 2004, "Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications," Third Edition, Chap. 3, CRC Press.