

입 · 출력 제약을 갖는 도립진자의 스윙업 제어

Swing-up Control of an Inverted Pendulum Subject to Input/Output Constraints

Tum Meta, 경 기 영, 박 재 현, 이 영 삼*
(Tum Meta¹, Gi-Young Gyeong², Jae-Heon Park², and Young-Sam Lee^{2*})

¹Program in Robot Engineering, Inha University

²Department of Electrical Engineering, Inha University

Abstract: In this paper we propose a swing-up strategy for a single inverted pendulum. The proposed method has a feature whereby can handle the input and output constraint of a pendulum in a systematic way. For the swing-up of a pendulum, we adopt a 2-DOF control structure that combines the feedforward and feedback control. In order to generate the swing-up feedforward trajectories that satisfy the input and output constraint, we formulate the problem of generating feedforward trajectories as a nonlinear optimal control problem subject to constraints. We illustrate that the proposed method is more flexible than the existing method and provides great freedom in choosing the actuator of the inverted pendulum. Through an experiment, we show that the proposed method can swing a pendulum upward effectively while satisfying all the imposed constraints.

Keywords: cart inverted pendulum, boundary value problem, feedforward control, input and output constraints, linear feedback control

I. 서론

학생들에게 제어공학에 대한 흥미를 유발하고 피드백 제어의 효용성을 효과적으로 전달하기 위해 오래전부터 도립진자 시스템이 교육에 사용되어 왔다. 제어공학을 연구하는 학자들의 경우에는 새로운 제어기법을 개발한 후 그 효용성을 검증하기 위한 대상 시스템으로 도립진자를 사용하기도 한다. 도립진자 시스템은 불안정 시스템이고 비선형 특성을 가지고 있기 때문에 제어기 설계의 측면에서 보았을 때 비교적 난이도가 높은 시스템에 속한다고 볼 수 있다 [3,6,8,11]. 또한 구동기의 갯수에 비해 제어의 대상 변수가 더 많은 시스템이기도 하다. 이런 이유로 인해 지금까지 도립진자의 제어에 대한 다양한 연구들이 발표되어 왔는데, 도립진자의 제어는 도립 상태에서의 제어보다는 진자를 아래쪽에서부터 위쪽으로 흔들어서 올리는 스윙업 제어에 초점을 맞추고 있다고 볼 수 있다. 스윙업 제어의 가장 기본이 되는 방법은 에너지 기반 제어를 이용한 방법이다[1,12]. 에너지 기반의 제어를 이용한 스윙업 제어의 기본 생각은 진자가 가지는 에너지를 상태변수를 이용하여 정의하고 도립 상태의 진자가 가지는 에너지 값을 가지게끔 진자를 흔들어서 에너지를 주입함으로써 진자를 도립시키는 제어방식을

말한다. 이를 위해 진자를 움직여주는 카트(cart)의 가속도를 제어입력으로 본 수학적 모델식을 사용한다. 초창기 스윙업 제어에서는 카트가 무한한 길이의 레일(rail)위에서 운동하는 것을 가정하였으나 대부분의 도립진자 시스템의 레일 길이는 제약이 있으므로 이를 고려하기 위한 제어기법이 제안되었다[2,9,13]. 하지만 이러한 방법들에서도 제어기 설계 단계에서부터 스윙업이 이루어지는 동안 카트가 어느 정도 변위 내에서 머무를 것인지는 알 수 없고 단지 계수 튜닝을 통해서 시행착오적으로 카트의 변위에 영향을 주는 방식으로 레일의 길이제약을 고려할 수 있을 뿐이다. 종전의 스윙업 제어가 혼드는 동작을 여러 번으로 나누어 점진적으로 진자를 흔들어서 올리기 때문에 스윙업까지 소요되는 시간이 비교적 긴 방식인데 비해 최근 연구된 스윙업 제어는 진자를 흔들어서 올리기 위해 필요한 카트의 궤적 자체를 사전에 계산해놓고 계산된 궤적을 카트가 잘 추종하게끔 피드포워드 제어와 피드백제어를 같이 사용하여 단시간에 진자를 세워올리는 방식을 사용한다[4]. 하지만 이러한 방식에서는 피드포워드 궤적을 특정한 형태의 함수집합 내에서 찾아내는 방식을 사용하기 때문에 자유도에 제약이 있고, 도립진자의 입력 및 출력제약조건을 조직적으로 고려하지 못하는 단점이 있다. 이는 카트의 피드포워드 궤적이 입력과 출력 제약조건을 만족하도록 생성된 것이 아니라, 일단 피드포워드 궤적을 생성한 후 입력 및 출력 제약조건을 만족하는지 여부를 살피는 방식이기 때문이다.

이 논문에서는 [4]에서와 같이 피드포워드 제어와 피드백 제어를 같이 사용하여 도립진자를 제어하는 구조를 취하되 피드포워드 궤적을 특정한 형태의 함수로 가정하여 생성하는 것이 아니라 이점 경계치와 제약조건을 가지는

* Corresponding Author

Manuscript received May 19, 2014 / revised May 28, 2014 / accepted June 2, 2014

Tum Meta: 인하대학교 로봇공학과(tummeta@gmail.com)

경기영, 박재현, 이영삼: 인하대학교 전기공학과

(jihad12@korea.com/mihonyang@gmail.com/lys@inha.ac.kr)

※ 본 연구는 미래창조과학부 및 정보통신산업진흥원의 IT융합 고
급인력과정지원사업의 연구결과로 수행되었으며(NIPA-2014-H04
01-14-1003) 인하대학교 지원을 받아 수행하였음.

비선형 최적제어 문제의 해로 정의하고 이를 이용하여 도립진자를 스윙업 하는 방법을 제안한다.

II. 문제설정

이 논문에서는 그림 1과 같은 카트형 도립진자 시스템의 스윙업 제어를 다룬다. 여기서 x 는 레일중심으로부터 측정된 카트의 변위를, θ 는 지면과 수직을 이루는 선으로부터 진자막대가 가지는 회전변위, m 은 진자의 질량, l 은 진자의 회전축에서 진자의 무게중심까지의 거리, c 는 진자의 회전축에서 나타나는 회전 마찰계수, x_{lim} 은 레일의 중심으로부터 양끝의 벽까지의 거리를 나타낸다. 도립진자 시스템의 수학적 모델식은 다음과 같은 미분방정식으로 나타낸다.

$$(I+ml^2)\ddot{\theta}+ml(\cos\theta)\ddot{x}=mgl(\sin\theta)-c\dot{\theta} \quad (1)$$

여기서 I 는 진자의 무게중심에 대한 회전관성모멘트, $g=9.8m/s^2$ 는 중력가속도 상수이다. 식 (1)에서 볼 수 있듯이 도립진자의 운동은 카트의 가속도에 의해 결정된다. 카트의 가속도 \ddot{x} 를 도립진자 시스템의 제어입력 u 로 보면 도립진자의 운동방정식은 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u, \\ \ddot{\theta} &= \frac{mgl(\sin\theta)-c\dot{\theta}}{I+ml^2} - \frac{ml(\cos\theta)}{I+ml^2}u. \end{aligned}$$

상태변수를 $\xi_1 = x, \xi_2 = \dot{x}, \xi_3 = \theta, \xi_4 = \dot{\theta}$ 로 선정하면 도립진자 시스템은 다음과 같은 4차의 비선형 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= \frac{mgl(\sin\xi_3)-c\xi_4}{I+ml^2} - \frac{ml(\cos\xi_3)}{I+ml^2}u \end{aligned} \quad (2)$$

이 논문에서는 제안되는 제어기법의 효용성을 검증하기 위한 실험을 위해 연구실에서 개발한 도립진자 시스템(그림 2)을 활용할 것이다. 개발된 도립진자 시스템은 카트를 움직이기 위한 구동기로서 DC 모터를 사용하고 있으며 동력 전달을 위하여 타이밍벨트를 사용하고 있다. DC 모터는 토크증폭을 위해 4:1의 감속기어를 사용하고 있다. x 및 θ 를 측정하기 위해 2개의 회전형 엔코더를 사용하고 있으며 엔코더의 해상도는 5000 PPR(Pulse per revolution)이다. 측정 및 계산을 통해 구한 도립진자 시스템의 모델계수 m, l, I, c 는 표 1과 같다.

구동기로 사용되는 DC모터의 성능 제약으로 인해 카트의 직선운동은 속도 및 가속도 제약을 갖는데, 실험에 사용될 도립진자 시스템은 다음과 같은 제약을 갖는다.

$$|\dot{x}| \leq 1.3m/s, |\ddot{x}| \leq 22m/s^2 \quad (3)$$

스윙업을 하는 동안 양끝의 벽에 충돌하지 않아야 하므로 카트의 변위는 다음을 만족해야 한다.

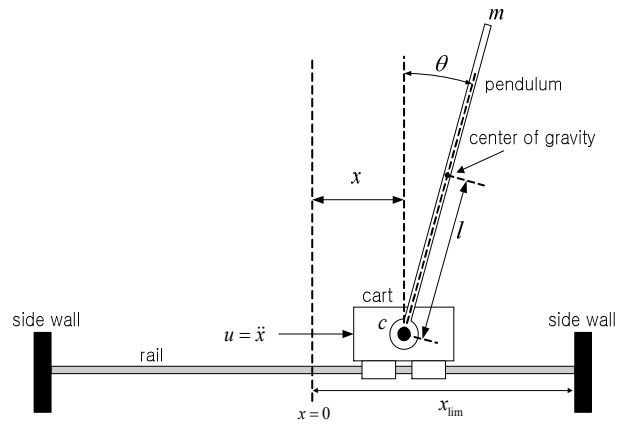


그림 1. 카트형 도립진자 시스템의 개념도.

Fig. 1. The conceptual diagram of a cart inverted pendulum system.

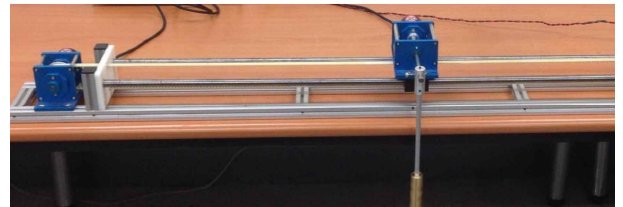


그림 2. 실험에 사용될 연구실에서 제작된 카트형 도립진자.

Fig. 2. A lab-built cart inverted pendulum system used for experiments.

표 1. 도립진자 시스템의 모델 계수.

Table 1. Model parameters of the inverted pendulum system.

Parameters	Values
m	0.41 Kg
l	0.22m
I	0.116 Nm s^2
c	0.005 Nm s

$$|x| \leq 0.4m \quad (4)$$

x 와 \dot{x} 는 도립진자 시스템의 출력, $\ddot{x}=u$ 는 도립진자 시스템의 입력이므로 도립진자 시스템의 스윙업 제어를 효과적으로 수행하기 위해서는 입력 제약조건을 만족시키면서 동시에 출력을 특정범위에 머물도록 제어해야만 한다. 출력 제약조건 중 x 와 관련된 제약은 카트의 충돌방지를 통해 시스템을 보호하기 위한 제약조건이며 \dot{x} 에 대한 제약은 구동기의 성능으로 인해 발생하는 하드웨어적인 제약조건이다. 제약조건을 효율적으로 고려할 수 있는 대표적인 제어 기법에 예측제어[7]가 있으나 실용적으로 적용하는 것은 주로 선형시스템에 한정되어 있어 비선형 제어문제인 스윙업 제어에 예측제어의 적용은 곤란하다. 기존의 스윙업 제어 관련 연구에서도 카트의 충돌 방지를 위하여 레일 길이의 제약을 고려했던 연구들은 다수 제안되었으나 제어기 설계 단계에서부터 제약조건 만족여부를 알 수 있는 것이 아니라 시행착오적으로 파라미터를 조정하면서 제약조건을

만족시키는 한계를 가지고 있다. 그리고 이러한 연구들에서는 입력에 대한 제약조건은 다루지 않고 있다.

이 논문은 도립진자가 가지는 입, 출력 제약조건을 조직적으로 고려할 수 있는 스윙업 제어기법을 제안하는 것을 목표로 한다. 이를 통해 스윙업이 이루어지는 동안 카트가 양끝의 벽에 충돌하지 않게 하고 구동부의 제약조건을 설계단계에서부터 고려함으로써 구동부의 선정에 폭을 넓힐 수 있도록 한다.

III. 피드포워드 궤적의 생성

이 논문에서는 [4]에서와 같이 피드포워드 제어와 피드백 제어를 함께 사용하는 2자유도 구조의 제어구조를 이용하여 스윙업 제어문제를 다룬다. [4]에서는 진자가 지면을 향해 정지해 있는 상태에서 진자를 흔들어서 올려 도립 상태에 도달하게끔 만드는 카트의 운동궤적을 도립진자의 모델식을 이용하여 미리 계산해 놓고 카트가 이 궤적을 추종하도록 카트의 가속도를 발생시켜 진자를 스윙업 시키는 방식을 취하고 있다. 그림 3은 [4]에서 사용된 2자유도 스윙업제어기의 구조를 나타내고 있다. 피드포워드 제어는 사전에 계산된 가속도궤적 u^* 를 도립진자에 인가하여 스윙업이 이루어지도록 하는 역할을 수행한다. 하지만 피드포워드 제어만을 사용할 경우 불확실성으로 인해 사전에 계산한 스윙업 궤적과 완전히 일치하게끔 스윙업이 일어나지 않으므로 이를 보상하기 위해 피드백제어를 같이 사용한다. 이 논문에서도 그림 3의 2자유도 스윙업 제어구조를 사용하기로 한다.

이 논문에서는 피드포워드 궤적 생성 문제를 제약조건을 갖는 시스템에 대한 최적제어 문제로 설정함으로써 [4]의 방법보다 더 유연하고 조직적인 스윙업 제어가 가능하도록 한다. 스윙업이 이루어지기 위해서 도립진자 시스템은 $t=0$ 인 시점과 $t=T$ 인 시점에서 다음의 경계치 조건을 만족해야 한다.

$$\xi_1(0) = 0, \xi_2(0) = 0, \xi_3(0) = -\pi, \xi_4(0) = 0 \quad (5)$$

$$\xi_1(T) = 0, \xi_2(T) = 0, \xi_3(T) = 0, \xi_4(T) = 0 \quad (6)$$

$$u(0) = 0, u(T) = 0 \quad (7)$$

여기서 T 는 스윙업에 소요되는 시간을 나타낸다. 스윙업이 이루어지는 동안 도립진자가 만족해야 하는 제약조건을 입력 u 와 상태변수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$|\xi_1| \leq x_{lim}, |\xi_2| \leq \dot{x}_{lim}, |u| \leq u_{lim} \quad (8)$$

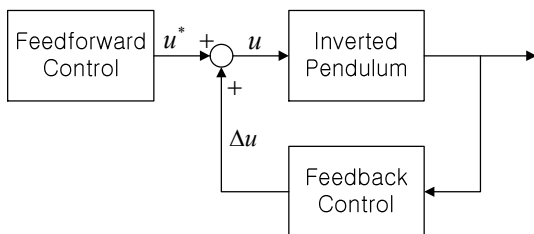


그림 3. 2-자유도 스윙업 제어구조.

Fig. 3. 2-DOF swing-up control structure.

여기서 $x_{lim}, \dot{x}_{lim}, u_{lim}$ 은 각각 양수로서 카트의 변위, 속도, 가속도의 절대값에 대한 상한치를 나타낸다. 이 논문의 실험에 사용된 도립진자의 제약조건에 대한 상한치는 식 (3), (4)와 같다. 본 논문의 스윙업 제어에서 제안되는 피드포워드 궤적계산 문제는 다음과 같은 최적 제어문제로 설정된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && J(\xi, u, T) \\ & \text{subject to} && \text{input/output constraint (8),} \\ & && \text{dynamic equations (2),} \\ & && \text{boundary conditions (5), (6), (7)} \end{aligned}$$

여기서 $J(\xi, u, T)$ 는 설계자의 의도가 반영된 비용함수이다. 예를 들어

$$J = \int_0^T (a\xi_1^2 + bu^2) dt, a, b \geq 0 \quad (9)$$

은 스윙업을 수행하는 동안 카트의 변위와 카트의 가속도를 중점적으로 고려하고자 하는 비용함수이다. a 와 b 의 상대적인 값을 조정하여 어떤 값에 더 중점을 둘 것인지를 조절할 수 있다. 스윙업에 소요된 시간을 최소로 만들고자 한다면 다음과 같은 비용함수를 사용할 수 있다.

$$J = \int_0^T 1 dt. \quad (10)$$

제안되는 피드포워드 궤적 생성방법은 u 가 어떤 특정한 형태의 함수라고 가정하지 않고 단지 제약조건을 만족하는 최적제어 문제를 풀이하여 얻어진다는 특징을 가진다. 반면 [4]에서 사용된 방법은 u 가 상수항과 cosine 함수의 조합 형태를 가지는 것으로 가정하고 (5), (6), (7)에 주어진 이점 경계치 조건을 만족하도록 상수항과 cosine 함수의 계수를 찾는 방법을 이용하였다. 그리고 T 는 변수가 아닌 상수, 즉 설계자가 미리 정한 값을 사용하고 있다. 따라서 [4]에서 제시된 방법으로는 스윙업에 소요된 시간을 최소화하는 것이 문제설정에 포함되지 않고 제약조건에 대한 고려가 궤적생성 단계에 이루어지는 것이 아니라 궤적을 생성하고 난 후 제약조건 만족여부를 검토하는 수동적인 방식이다. 더불어 궤적자체가 특정한 형태를 가지는 것을 가정하고 있기 때문에 유연성이 떨어져서 주어진 제약조건을 만족하는 궤적 자체를 얻을 수 없을 가능성도 높다.

Remark 1: [4]에서는 이점 경계치 문제를 풀기위해 Matlab의 `bvp4c` 명령을 사용한다. 이 논문에서 제안되는 궤적 생성 방법은 최근 개발된 GPOPS-II라는 수치해법을 사용하여 구현할 수 있다[10].

제안된 궤적 생성 방법의 특징을 살펴보기 위하여 다양한 비용함수를 가정하여 스윙업 궤적을 생성하여 보았다. 그림 4는 생성된 궤적을 비교한 그림이다. 입·출력과 관련된 제약조건은 식 (8)과 같으며 이때 사용한 $x_{lim}, \dot{x}_{lim}, u_{lim}$ 은 실험에 사용된 도립진자의 제약조건식을 반영하여 다음과 같다.

$$x_{lim} = 0.3m, \dot{x}_{lim} = 1.3m/s, u_{lim} = 22m/s^2$$

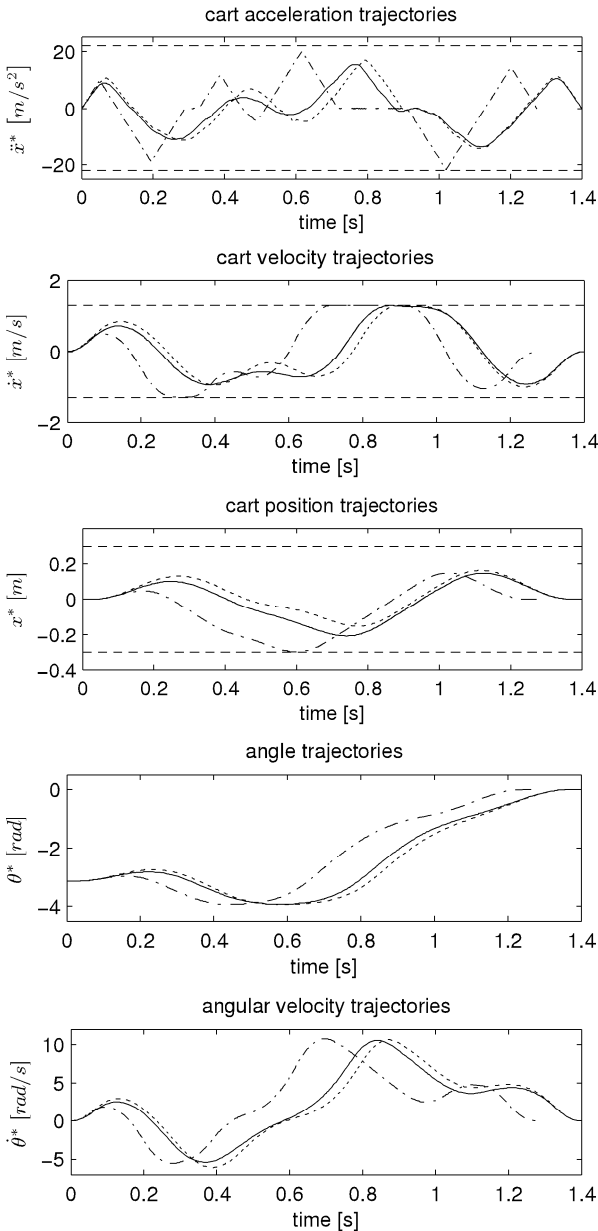


그림 4. 비용함수를 달리 했을 때 얻어지는 도립진자의 스윙업

피드포워드 궤적: $J = \int_0^T 1 dt$ (dash-dot), $J = \int_0^T \xi_1^2 dt$

(점선), $J = \int_0^T (0.5\xi_1^2 + 0.5u^2) dt$ (실선).

Fig. 4. The possible feedforward trajectory for swing-up maneuver

of the inverted pendulum system for different cost functions: $J = \int_0^T 1 dt$ (dash-dot), $J = \int_0^T \xi_1^2 dt$ (dotted),

$J = \int_0^T (0.5\xi_1^2 + 0.5u^2) dt$ (solid).

제약조건 중에서 x_{lim} 은 여유분을 갖고 궤적을 생성하기 위해서 실제 제약조건인 0.4m보다 작은 값을 사용하였다. 그림에서 dash-dot 형태의 선으로 나타난 궤적은 스윙업 소요시간 T 를 최소화하기 위해 (10)의 비용함수를 사용하여

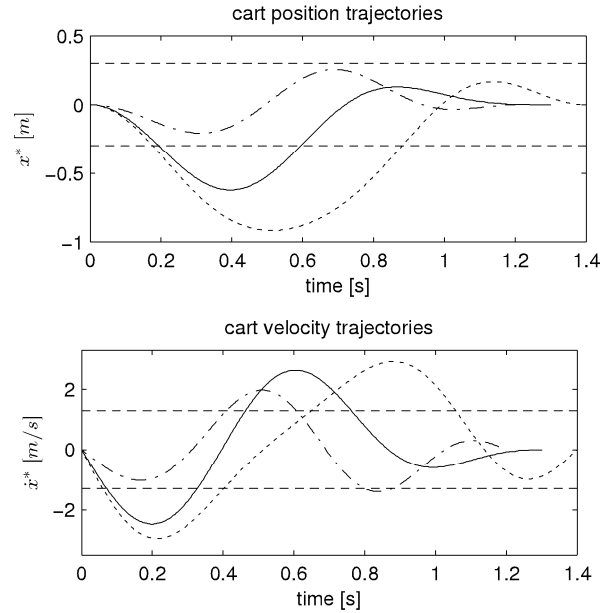


그림 5. 다른 T 를 사용했을 때 [4]의 방법을 통해 생성한 피드포워드 궤적: $T=1.2$ (dash-dot), $T=1.3$ (실선), $T=1.4$ (점선).

Fig. 5. Feedforward trajectories generated by the method of [4] for different values of T : $T=1.2$ (dash-dot), $T=1.3$ (solid), $T=1.4$ (dotted).

구한 궤적이고 점선 형태의 궤적은 $T=1.4$ 로 고정하고 카트의 변위만을 최소화 하기 위해 (9)에서 $a=1, b=0$ 을 가정하고 계산한 궤적이다. 마지막으로 실선 형태의 궤적은 $T=1.4$ 로 동일하고 (9)에서 $a=0.5, b=0.5$ 로 하여 카트 변위와 가속도를 동시에 고려한 비용함수를 사용했을 때 계산된 궤적이다. T 를 최소화하기 위한 비용함수를 사용했을 때 T 는 1.3초가 구해졌다. 이것은 위의 제약조건을 만족하면서 도립진자를 최대한 빨리 스윙업할 수 있는 시간이 1.3초임을 의미한다. 짧은 시간 내에 스윙업을 수행하기 위해서 카트를 흔드는 동작들이 다른 두 가지 경우보다 더 역동적인 것을 볼 수 있고 카트의 속도가 제약조건에 해당하는 1.3 m/s에 오랫동안 머물러 있는 것을 볼 수 있다. 카트의 변위만을 고려한 경우의 궤적은 다른 두 경우에 비해 카트의 변위 최대치가 작은 것을 볼 수 있다. 카트변위와 가속도를 동시에 고려한 경우에는 카트변위만을 고려한 경우보다 가속도의 최대값이 더 작게 나타나는 것을 볼 수 있다. 세 가지 모두 주어진 제약조건을 만족시키면서 생성 되었으므로 생성된 궤적을 효과적으로 추종하게만 한다면 스윙업을 수행하는 동안 제약조건을 모두 만족하리라는 것을 예상할 수 있다.

제안되는 방법과의 비교를 위하여 [4]의 방법을 이용하여 피드포워드 궤적을 생성하였고 그중 카트의 변위와 속도에 대한 궤적을 그림 5에 나타내었다. 스윙업 소요시간을 $T=1.2$ (dash-dot), $T=1.3$ (실선), $T=1.4$ (점선)와 같이 변화시켜가며 궤적을 생성하였다. $T=1.3$ 또는 $T=1.4$ 인 경우에는 카트의 변위 및 카트의 속도가 모두 제약조건을 크게 벗어나는 것을 볼 수 있다. $T=1.2$ 인 경우 카트의

변위는 제약조건은 만족하지만 카트의 속도가 제약조건을 벗어나는 것을 볼 수 있다. 카트의 변위 제약조건을 만족시키지 못할 경우 스윙업을 하는 동안 카트의 충돌이 발생하게 되며 카트의 속도 제약조건을 만족시키지 못할 경우에는 사용하고 있는 구동부로는 생성된 스윙업 궤적을 추종할 수 없음을 의미하므로 더 좋은 성능을 갖는 모터로 교체해야만 하는 것을 의미한다.

살펴본 것처럼 제안되는 방법은 [4]의 방법과는 달리 시스템의 제약조건을 궤적 생성시에 고려하고 있기 때문에 구동부의 성능을 최대한 활용한 궤적을 생성할 수 있다. 또한 이것은 구동부를 선정하는데 있어서 [4]의 방법보다 더 큰 자유도를 가질 수 있음을 의미한다.

IV. 모델계수 추정 및 피드백제어기 설계

표 1에 주어진 모델계수들은 측정 및 계산을 통해 합리적으로 구한 값이지만 이 값들을 이용하여 계산한 피드포워드 궤적을 스윙업 실험에 적용하면 계산에 의해 얻어진 궤적과 다른 실험 궤적이 얻어진다. 이같은 현상은 [4]에서도 지적되었듯이 카트의 가속도를 원하는 형태로 발생시키기 위해 사용하는 PID 형태의 제어기 시간지연을 포함한 응답과 비선형 마찰과 같은 모델링 되지 않은 효과들에 기인하는 것으로 볼 수 있다. 계산된 궤적과 실제 궤적의 차이를 보정하기 위해 피드백 제어기를 사용하지만 계산된 피드포워드 궤적이 실제 실험궤적과 최대한 일치하도록 만드는 것이 더 큰 성능향상을 가져올 것이다. 표 1에 주어진 모델계수를 초기값으로 하여 [4]에 사용된 방법을 이용하여 모델계수를 실험적으로 추정하였다. 표 2는 추정을 통해 새롭게 얻은 모델계수들이고 그림 6은 두 가지 모델계수를 사용해서 얻은 궤적을 이용하여 실험을 했을 때 얻은 실험 결과를 비교하여 나타낸 것이다. 그림 6(a)는 모델계수를 추정하기 전의 모델계수를 이용하여 계산한 궤적과 실험궤적을 비교한 것이고 (b)는 모델계수를 추정하고 난 후의 모델계수를 이용하여 계산한 궤적과 실험궤적을 비교하여 나타낸 것이다. 각각의 경우에서 점선은 계산을 통해 얻은 궤적이고 실선은 실제 실험을 통해 나타낸 궤적이다. (a)의 경우 계산된 궤적과 실제 실험 궤적간의 차이가 크게 나타나는 것을 볼 수 있다. $t=1.4$ 인 시점에 계산을 통해 얻은 θ 의 궤적은 0의 값을 가져서 진자가 직립 상태에 있게 되지만 실제 실험에서 나타난 θ 는 0에 도달하기 전에 이미 다시 아래쪽으로 기울어져 있는 것을 볼 수 있다. 이 경우는 피드백제어기를 같이 사용해도 오차가 피드백 제어기로 보정하기에는 너무 크기 때문에 스윙업 제어가 성공적으로 수행되기 어렵다. 하지만 (b)의 경우 계산된 궤적과 실험궤적이 매우 유사하게 나타나는 것을 볼 수 있다. 이렇게 계산된 궤적과 실험궤적이 최대한 일치하게 하고 발생하는 미세한 오차는 피드백제어기를 통해 보정하도록 한다.

피드백제어기는 피드포워드제어의 오차를 보정해 주는 역할을 수행하며 이 논문에서는 [4]에서와 같이 LQ 제어기를 사용하였다. 제어기 설계에 사용되는 선형시스템은 본 논문에서 제안된 방법을 통해 생성해낸 피드포워드 궤적을 중심으로 비선형 독립진자시스템을 선형화하여 얻은 시스

표 2. 독립진자 시스템의 추정된 모델 계수.

Table 2. Estimated model parameters of the inverted pendulum system.

Parameters	Values
m	$0.4 Kg$
l	$0.24m$
I	$0.016 Nm s^2$
c	$0.005 Nm s$

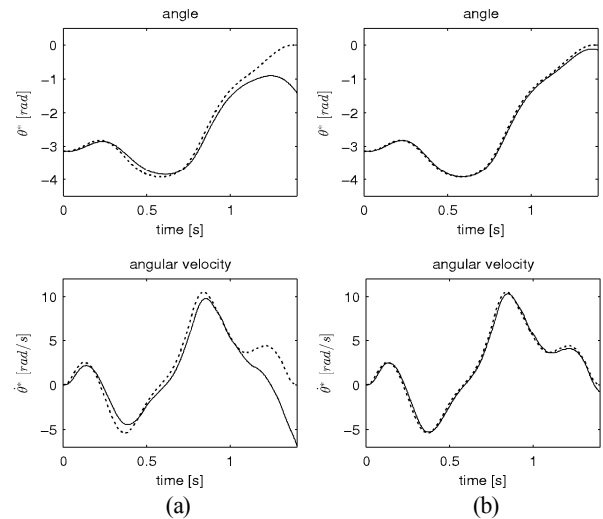


그림 6. 다른 계수들을 이용했을 때의 각과 각속도에 대한 개루프 실험 결과: (a) 기본계수, (b) 추정계수, 희망궤적(점선), 실제궤적(실선).

Fig. 6. The open-loop experimental result of angle and angular velocity using (a) default parameters and (b) the estimated parameters : desired trajectories (dotted), actual trajectories (solid).

템을 사용한다. 특정 동작점을 중심으로 선형화한 것이 아니라 궤적을 중심으로 선형화하므로 얻어지는 선형시스템은 시불변 시스템이 아니라 시변시스템이 얻어진다. 카트의 위치에서 발생할 수 있는 정상상태 오차를 제거하기 위하여 새로운 상태변수 $\xi_5 = \int_0^t x d\tau$ 를 도입해 선형 시스템의 차수를 5차로 확대하였으며 최적제어 이론[5]에 따라 LQ 제어 이득을 계산하여 그림 7과 같은 궤적을 얻었다.

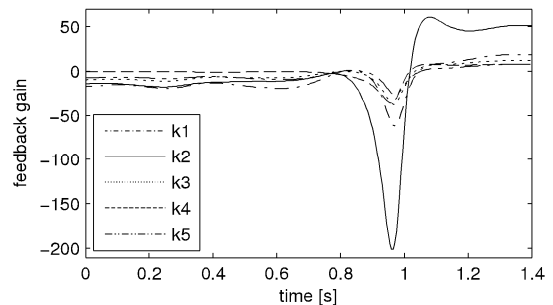


그림 7. 시변 되먹임 이득.

Fig. 7. Time-varying feedback gain.

V. 스윙업 제어 실험

제안된 방법의 유용성을 검증하기 위하여 2자유도 구조의 스윙업 제어를 이용한 스윙업 제어 실험을 수행하였다. 피드포워드 제어를 수행하기 위해서 본 논문에서 제안된 방법을 이용하여 생성한 궤적을 사용하였다. [10]의 폴이법을 사용하여 피드포워드 궤적을 생성하는데 9.5초의 시간이 소요되었다. 카트의 가속도를 정확히 생성해 낼 수는 없으므로 실제 실험에서는 카트의 가속도 궤적을 2번 적분하여 카트의 위치궤적으로 변환하였고 이를 추종하기 위하여 PD 형태의 위치제어기를 사용하였다. 그림 8은 그림 3의 2자유도 스윙업 제어를 실제로 구현하기 위해 실험에서 사용한 개략도이다. 실시간 제어를 위한 마이크로콘트롤러로서 Texas Instrument의 TMS320F2812을 이용하였고 사용한 샘플타입은 1ms이다. 피드포워드 궤적과 그림 7의 시변 이득(time-varying gain)은 조건표(look-up table)를 이용하여 구현하였다. RAM의 크기가 한정되어 있기 때문에 조건표를 구성할 때 피드포워드 궤적은 2ms 간격의 데이터를 사용하였고 시변 이득은 5ms 간격의 데이터를 사용하였다. 조건표를 저장하기 위해 약 18KB 정도의 RAM을 사용하였다. 참고로 TMS320F2812는 34KB의 RAM을 가지고 있기 때문에 조건표의 시간 데이터 간격을 너무 작게 할 경우 RAM 용량을 넘어서게 된다.

그림 9는 제안된 방식을 이용하여 스윙업 제어를 수행했을 때의 카트의 위치와 진자의 각도를 나타내고 있다. 실선(solid)은 제안된 방식을 통해 생성된 피드포워드 궤적이고 dash-dot 형태의 선은 스윙업을 하는 동안 피드백제어기는 사용하지 않고 피드포워드 제어기만을 사용해서 스윙업을 수행한 후 $t = T$ 인 시점에 선형제어기로 스위칭했을 때의 실험궤적이다. 마지막으로 점선형태의 선은 피드포워드 제어기와 피드백 제어기를 둘 다 사용한 2자유도 스윙업 제어의 실험 궤적이다. 피드백제어기를 사용하지 않았을 때에도 $t = T$ 시점까지 궤적이 계산된 피드포워드 궤적과 유사하게 나타나는 듯 보이지만 스위칭 이후 카트가 크게 요동치는 것을 볼 수 있다. 이것은 피드백제어기를 사용하지 않음으로 인해 발생하는 오차가 커서 제어기 스위칭 시 선형제어기가 한꺼번에 큰 제어작용을 하기 때문이다. 피드백제어기를 같이 사용한 경우에는 제어를 교체한 시점에도 카트가 크게 요동치지 않고 부드럽게 스위칭이 이루어지는 것을 볼 수 있다. 실험결과로부터 스윙업을 하는 동안 카트는 부여한 제약조건 $|x| \leq 0.3m$ 를 모두 만족하는 것을 볼 수 있다.

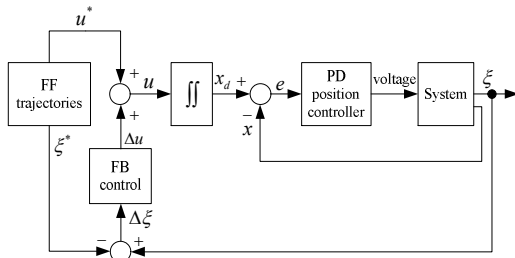


그림 8. 스윙업 제어를 위한 제어구조.
Fig. 8. The control scheme for the swing-up

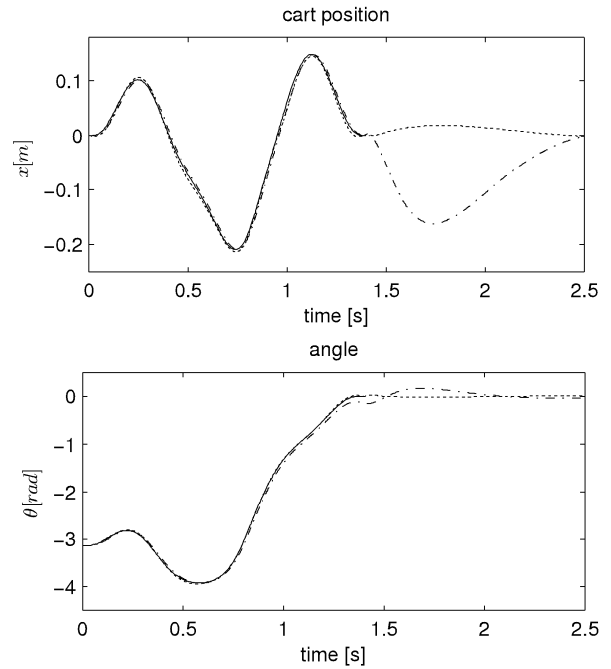


그림 9. 실험결과와의 비교: 개루프 궤적(dash-dot), 폐루프 궤적(점선), 희망 궤적(실선).
Fig. 9. Comparison of the experimental results: open loop trajectory(dash-dot), closed loop trajectory(dotted), desired trajectory(solid).

VI. 결론

이 논문에서는 도립진자의 입력과 출력 제약조건을 고려하여 도립진자를 스윙업 제어하는 방법을 제안하였다. 제안되는 방법은 기존에 제안된 2자유도 구조의 제어구조를 취하되 피드포워드 궤적 생성을 제약조건을 고려한 최적제어 문제로부터 계산해내는 방식을 특징으로 한다. 기존의 방법에서는 카트 가속도의 피드포워드 궤적이 특정한 형태의 함수인 것을 가정한 것과 달리 제안되는 방식은 특별한 형태를 가정하지 않음으로써 더 유연성을 가지고 문제 설정 단계에서 도립진자의 입·출력 제약조건을 조직적으로 고려할 수 있는 장점을 가지기 때문에 도립진자 시스템의 구동부 선택에 더 큰 자유도를 줄 수 있다. 기존방법에서 사용했던 모델계수 추정과 피드백 제어기 설계법을 적용하여 제안된 피드포워드 제어방식과 결합하여 2자유도 스윙업 실험을 수행하였으며 실험을 통해 제안된 방식이 도립진자 시스템의 입·출력 제약조건을 효과적으로 만족하며 스윙업 제어를 수행해 냄을 검증하였다.

REFERENCES

[1] K. Åström and K. Fruta, "Swinging up a pendulum by energy control," *Automatica*, vol. 36, no. 2, pp. 287-295, 2000.
[2] D. Chatterjee, A. Patra, and H. K. Joglekar, "Swing-up and stabilization of a cart-pendulum system under restricted cart track length," *Systems & Control Letters*, vol. 47, pp. 355-364, 2002.

- [3] K. Furuta, M. Yamakitan, and S. Kobayashi, "Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback," *Journal of System and Control Engineering*, vol. 206, pp. 263-269, 1992.
- [4] K. Graichen, M. Treuer, and M. Zeitz, "Swing up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation," *Automatica*, vol. 43, pp. 63-71, 2007.
- [5] D. E. Kirk. *Optimal Control Theory : An Introduction*, Prentice Hall, 1970.
- [6] R. Lozano, I. Fantoni, and D. J. Block, "Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit," *System & Control Letters*, vol. 40, pp. 197-204, 2000.
- [7] J. M. Maciechowski, *Predictive Control with Constraints*, Prentice Hall, 2002.
- [8] N. Muškinja and B. Tovornik, "Swinging up and stabilization of real inverted pendulum," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 2, pp. 631-639, 2006.
- [9] Y. Otani, T. Kurokami, A. Inoue, and Y. Hirashima, "A swingup control of an inverted pendulum with cart position control," In *Proc. of the IFAC Conference on New Technologies for Computer Control*, pp. 13-22, Hongkong, China, 2001.
- [10] M. A. Patterson and A. V. Rao, *GPOPS - II Version 1.0: A General-purpose Matlab Toolbox for Solving Optimal Control Problems using Variable-order Gaussian Quadrature Collocation Methods*, 2014.
- [11] M. Wilklund, A. Kristenson, and K. Åström, "A new strategy for swing up an inverted pendulum," In *Proc. of IFAC 12th World Congress*, vol. 9, pp. 151-154, Sydney, Australia, 1993.
- [12] X. Xin, "Analysis of the energy-based swing-up control for the double pendulum on a cart," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, pp. 387-403, 2010.
- [13] J. H. Yang, S. Y. Shim, J. H. Seo, and Y. S. Lee, "Swing up control for an inverted pendulum with restricted cart rail length," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 70, no. 4, pp. 674-680. 2009.

**Tum Meta**

2012년 Institute of Technology of Cambodia 대학교 Electronic Automatic and Telecommunication과 졸업. 2013년~현재 인하대학교 대학원 로봇공학과 재학중. 관심분야는 실시간 제어.

**경기영**

2014년 인하대학교 전기공학부 졸업. 2014년~현재 인하대학교 대학원 전기공학과 석사과정 재학중. 관심분야는 제어기 구현 및 모델 분석.

**박재현**

2014년 인하대학교 전기공학부 졸업. 2014년~현재 인하대학교 대학원 전기공학과 석사과정 재학중. 관심분야는 예측제어.

이영삼

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제15권 제4호 참조.