

# 관측기 모델 선정을 통한 모델 불확실성을 갖는 선형 시불변 시스템 강인 안정화

## Robust Stabilization of Uncertain LTI Systems via Observer Model Selection

오 상 록, 김 정 수\*, 심 형 보  
(Sangrok Oh<sup>1</sup>, Jung-Su Kim<sup>2,\*</sup>, Hyungbo Shim<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>ASRI, Department of Electrical and Computer Engineering, Seoul National University

<sup>2</sup>Dept. of EIE, Seoul National University of Science and Technology

**Abstract:** This paper presents a robust observer-based output feedback control for stabilization of linear time invariant systems with polytopic uncertainties. To this end, this paper not only finds a robust observer gain but also suggests how to determine the model used in the observer, which is not obvious due to model uncertainties in the conventional observer design method. The robust observer gain and the observer model are selected in a way that the whole closed-loop is stable by solving LMIs and BMIs (Linear Matrix Inequalities and Bilinear Matrix Inequalities). A simulation example shows that the proposed robust observer-based output feedback control successfully leads to closed-loop stability.

**Keywords:** robust observer, robust control, model uncertainty, linear and bilinear matrix inequalities, separation principle

### I. 서론

불확실성을 갖는 시스템의 강인성 분석과 강인 제어기 설계는 오랫동안 활발히 연구된 분야이다[1-5]. 이와 같은 연구가 활발하게 진행된 이유는 현실적인 공학 문제를 해결함에 있어서 시스템이 가진 불확실성을 고려하는 것이 매우 중요한 문제이기 때문이다.

일반적으로 제어하고자 하는 시스템의 상태 변수를 측정할 수 없는 경우가 많다. 따라서 상태 변수 궤환 제어(state feedback control)보다 출력 궤환 제어(output feedback control)를 적용할 수 있는 시스템의 범위가 더 넓다. 그래서 아직까지도 불확실성을 갖는 시스템에 대한 출력 궤환 제어에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다[8-10]. 그러나 이전까지의 연구는 시스템 모델(공칭 모델)을 정확하게 알고 있고 그 공칭 모델에 교란(perturbation)이 있는 시스템을 주로 다루었다. 이런 경우에는 시스템에 불확실성이 있음에도 관측기 모델을 직관적으로 선정할 수 있다. 본 논문에서는 볼록 다각형 불확실성을 갖는 시스템의 안정화 문제를 해결하고자 한다.

볼록 다각형 불확실성을 갖고 있고, 상태 변수를 측정할 수 없는 시스템의 강인 안정화 문제가 쉽지 않은 첫 번째 이유는 제어 대상이 되는 시스템의 모델 불확실성으로 인해 관측기로 사용할 관측기 모델이 분명하지 않기 때문이다. 두 번째 이유는 관측기 모델 선정 어려움으로 인해 관측

오차 방정식을 구하는 것이 쉽지 않기 때문이다. 그로 인해 관측기 이득을 결정하는 것에도 어려움이 있다. 일반적으로 관측기 오차 방정식이 안정하도록 관측기 이득을 설계하기 때문이다.

본 논문에서는 다각형 형태의 불확실성(polytopic uncertainty)을 갖는 선형 시스템의 안정화를 위한 관측기 기반의 제어를 설계한다. 이를 위해 우선 관측기의 모델을 고려하지 않고 제어기 이득(controller gain)과 관측기 이득(observer gain)은 다각형 안에 포함된 모든 모델에 대해서 제어기 극점(controller pole)과 관측기 극점(observer pole)이 모두 단위 원 안에 위치하도록 설계한다. 최종적으로 관측기 모델을 선정하는데, 이 과정에서 관측기 모델이 다각형의 꼭지점에 해당하는 모델들의 볼록 조합(convex combination)이라고 가정한다. 이렇게 가정한 관측기 모델과 미리 구해둔 제어기 이득과 관측기 이득을 이용하여 관측 오차 동특성을 구하고 그 관측 오차 동특성이 안정하도록 관측기 모델에 포함된 볼록 조합 계수를 가능성 문제를 풀어 선정한다.

본 논문의 기여는 모델 불확실성을 가지는 시스템에 대한 관측기 기반의 제어를 설계하는데 있어서 관측기 이득 선정 방법을 제시하였을 뿐만 아니라 기존의 결과들과 다르게 관측기 모델을 설계 파라미터로 사용하여 전체 폐루프 시스템을 안정화한 것이다.

### II. 사전 지식 및 동기

#### 1. 사전 지식

불확실성을 가지는 선형 이산 시스템의 강인한 상태 관측기를 설계하기 위해서 [6]에서 제시한 이산 시스템의 강인 안정화 조건(robust stability condition)을 이용한다. 아래와 같은 이산 선형 시스템을 고려하자:

\* Corresponding Author

Manuscript received April 28, 2014 / revised May 5, 2014 / accepted June 9, 2014

오상록, 심형보: ASRI, 서울대학교 전기정보공학부

(roleinhero@csl.kr/hshim@snu.ac.kr)

김정수: 서울과학기술대학교 전기정보공학부(jungsu@seoultech.ac.kr)

※ 이 연구는 서울과학기술대학교 교내연구비의 지원으로 수행되었음.

※ 본 논문의 예비논문이 ICROS 2014 학술대회에 출판되었음.

$$x(k+1) = A(\alpha)x(k) \quad (1)$$

여기서  $A(\alpha)$ 는 다각형 형태의 불확실성(polytopic uncertainty) 집합에 속하며, 이 집합은 다음과 같이 정의된다:

$$\mathcal{A} := \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}. \quad (2)$$

$A(\alpha) \in \mathcal{A}$ 을 만족하는 모든 행렬  $A(\alpha)$ 의 고유치의 크기가 모든  $\alpha$ 에 대하여 1보다 작을 때, 시스템 (1)이 불확실성을 가지는 집합 (2)에서 강인하게 안정하다(robustly stable)고 정의한다. 시스템 (1)이 집합 (2)에서 강인하게 안정한 것과 다음의 조건이 동치라는 사실이 알려져 있다:

$$A(\alpha)^T P(\alpha) A(\alpha) - P(\alpha) < 0 \quad (3)$$

(3)을 만족하는  $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$  가  $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ 를 만족하는 모든  $\alpha$ 에 대해서 존재한다.

일반적으로  $P(\alpha)$ 를 선형 행렬 부등식 (3)을 풀어서 구하는 것이 간단하지 않다. 왜냐하면  $A$  행렬과  $P$  행렬이 모두 파라미터( $\alpha$ )에 종속되어 있기 때문이다. 따라서 파라미터-종속 리아푸노프 행렬  $P(\alpha)$  (parameter-dependent Lyapunov matrix)에 대하여 부등식 (3)을 푸는 것이 아니라 단일 행렬  $P$ 에 대하여 푼다. 콤팩트 집합 (2)내에 존재하는 시스템의 안정도는 유계되어 있는 다각형의 꼭지점(vertices of polyhedron) 각각에서 안정도를 검사하는 방식으로 확인할 수 있다는 사실이 알려져 있다[4,6]. 이러한 사실들을 이용하여 다각형 형태의 불확실성을 가지는 시스템의 안정도는 아래에 있는 선형 행렬 부등식 (4)에서 단일 행렬  $P$ 의 존재성을 이용하여 확인할 수 있다.

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

본 논문에서 제시한 관측기 기반 출력 제어기 설계에는 선형 행렬 부등식 해결 도구뿐만 아니라 쌍선형 행렬 부등식 해결 도구를 사용해야 한다. 본 논문에서 사용한 쌍선형 행렬 해결 도구는 TOMLAB에서 제공하는 PENBMI이고, YALMIP과 함께 사용하면 된다[11].

## 2. 연구 동기

블록 다각형 모델 불확실성을 갖는 시스템을 기준에 연구되었던 강인 제어 기법으로 다루기 어렵다. 왜냐하면 기존 연구는 시스템의 공칭 모델을 알고 있고, 그 공칭 모델에 교란이 있는 다음과 같은 형태를 다루었기 때문이다:

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k). \quad (5)$$

블록 다각형 불확실성을 갖는 시스템을 (5)와 같은 형태로 표현하는 직관적인 접근 방법은 블록 다각형 불확실성 모델의 꼭지점 평균을 가상의 공칭 모델로 가정하고, 블록 다각형 불확실성과 공칭 모델의 차이를 모두 포함하도록 아래와 같이 교란을 설정하는 것이다:

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i, B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i, \quad (6)$$

$$(A + \Delta A, B + \Delta B) \ni (\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (7)$$

여기서  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 는 블록 다각형 불확실성을 나타내고,  $A_i, B_i$ 는 블록 다각형 불확실성의 꼭지점 행렬이다.

기존의 강인 제어 기법을 사용하려면 (7)의 관계를 만족시키는 더 보수적이고 큰 외란에 대하여 강인 안정화 문제를 풀어야 하는 단점이 있다. 또한 (6), (7)과 같이 표현된 경우에 기존의 연구들은 교란의 영향에도 불구하고 관측 오차 동특성이 안정하도록 하기 위해서  $\Delta A, \Delta B$ 이 추가적인 가정을 만족하는 경우에 대해서 다루고 있다. 그리고 상당히 복잡한 선형 행렬 부등식을 다루어야만 강인 제어가 이득과 강인 관측기 이득을 선정할 수 있는 어려움이 있었다. 본 논문에서 제안하는 방법은 쌍선형 해결 도구를 사용하고 있지만 비교적 간단한 행렬 부등식을 풀어서 시스템을 안정화하는 강인 제어가 이득, 관측기 이득, 관측기 모델을 선정할 수 있다.

## III. 문제 설정

다음과 같은 다각형 형태의 불확실성(polytopic uncertainty)을 가진 이산 선형시스템을 고려하자:

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k), y(k) = \tilde{C}x(k) \quad (8)$$

여기서  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 는 다음과 같은 집합에 포함된다고 가정하자:

$$\Omega = \left\{ (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = \sum_{l=1}^{n_p} \eta_l (A_l, B_l, C_l) \mid \eta_l \geq 0, \sum_{l=1}^{n_p} \eta_l = 1 \right\}. \quad (9)$$

여기서  $A_l, B_l, C_l$ 은 알고 있는 상수 행렬이고,  $n_p$ 는 유한한 양의 정수이다.  $\eta_l$ 은 미지의 상수이다. 집합  $\Omega$ 에 포함된 모든  $(A, B)$ 와  $(A, C)$ 는 각각 제어가능(controllable)하고 관측가능(observable)하다고 가정하자. 본 논문에서는 불확실성을 포함한 시스템 (8)을 안정화하는 상태 변수 관측기 기반의 출력 레환 제어 설계 기법을 제안하고자 한다.

## IV. 주요 결과

본 논문에서 제안하는 관측기 기반의 출력 레환 제어의 설계 과정은 이후에 소개하는 제어기 이득 선정, 관측기 이득 선정, 관측기 모델 선정의 세 단계로 이루어져 있다.

### 1. 강인한 제어기 이득 K 설계

상태 변수  $x$ 가 측정가능(measurable)하다면 시스템 (8)를 위해 사용할 제어 법칙은 아래와 같다:

$$u(k) = Kx(k). \quad (10)$$

여기서  $K$ 는 제어기 이득이다. 시스템 (8)를 안정화하기 위한 제어기 이득  $K$ 는  $\tilde{A} + \tilde{B}K$ 를 안정한 행렬이 되도록 결정하면 된다는 사실이 잘 알려져 있다. 그러한 강인 제어기 이득은 모든  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 에 대해서 다음 부등식을 만족하는  $K$ 와  $P$ 를 찾아서 구할 수 있다.

$$(A_l + B_l K)^T P (A_l + B_l K) - P < -(1 - \varepsilon^2)P \quad (11)$$

여기서  $\varepsilon \in (0, 1)$ 는 조정 파라미터이다. 이 부등식은  $K$ 와  $P$ 가 곱해진 형태이므로 행렬 부등식에서 변수끼리 곱해진 형태가 된다. 따라서 풀기가 어려워지므로 잘 알려진 바와 같이 동치인 다음과 같은 선형 행렬 부등식의 해를 이용해서 구할 수 있다[5]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 Q & (A_l Q + B_l Y)^T \\ (A_l Q + B_l Y) & Q \end{pmatrix} > 0, Q > 0. \quad (12)$$

여기서  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 이다. 선형 행렬 부등식 (12)의 해가 존재한다면 그 해  $Q$ 와  $Y$ 를 이용하여 구한 강인 제어기 이득은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} P &= Q^{-1}, \\ K &= YQ^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

이렇게 구한  $K$ 를 이용한 페루프 행렬  $\bar{A} + \bar{B}K$ 는 안정한 행렬이 된다[5].

언급 1: 조정 파라미터  $\varepsilon$ 의 값을 0에 가깝게 설계 할수록 리아푸노프 레벨 집합(Lyapunov level set)이 이산 시스템의 한 주기마다 더 빠르게 줄어든다.

## 2. 강인한 상태 관측기와 관측기 이득 L 설계

시스템 (8)에 대해서 상태 변수를 측정할 수 없는 경우, 상태 변수 관측기(state observer)를 이용해서 상태 변수를 추정한다. 제어기는 그 추정치를 실제 상태 변수로 여기는 확실성 등가 제어(certainty equivalent control)를 이용한다. 이를 위해 상태 변수 관측기를 아래와 같이 설계한다:

$$\hat{x}(k+1) = \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}u(k) + L(y(k) - \bar{C}\hat{x}(k)) \quad (14)$$

여기서  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 는 제시한 상태 변수 관측기가 사용할 시스템 (8)의 관측기 모델로서 본 논문에서는 설계 파라미터이고 추후에 정할 것이다. 우선은 적절한 값으로 정해졌다고 가정하자. 또한  $L$ 은 관측기의 이득이다.

### • 관측기 이득 선정

관측기의 이득  $L$ 은 앞 절의 제어기 이득  $K$ 를 구하는 원리와 비슷하게  $\bar{A} - LC$ 가 안정한 행렬이 되도록 설계한다. 이를 위해 부등식 (11)과 유사한 다음 부등식을 고려할 수 있다.

$$(A_l^T + C_l^T L)^T P (A_l^T + C_l^T L) - P < -(1 - \delta^2)P \quad (15)$$

여기서  $\delta \in (0, 1)$ 는 조정 파라미터이다. 이 부등식 역시 선형 행렬 부등식이 아니므로 다음과 같은 선형 행렬 부등식을 통해 구할 수 있다[5]:

$$\begin{pmatrix} \delta^2 T & (A_l^T T + C_l^T S)^T \\ (A_l^T T + C_l^T S) & T \end{pmatrix} > 0, T > 0. \quad (16)$$

여기서  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 이다. 선형 행렬 부등식 (13)의 해가 존재한다면 그 해  $T$ 와  $S$ 를 이용하여 아래와 같은 강인 관측기 이득을 구할 수 있다:

$$\begin{aligned} P &= T^{-1}, \\ L &= -(ST^{-1})^T. \end{aligned} \quad (17)$$

### • 상태 관측기 모델 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 선정

상태 변수 관측기를 위한 관측기 모델을 선정하기 위하여 이 논문에서는 그 관측기 모델이 다음과 같이 매개변수화된다고 가정한다.

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = \sum_{l=1}^{n_p} \rho_l (A_l, B_l, C_l), \sum_{l=1}^{n_p} \rho_l = 1, \rho_l \geq 0 \quad (18)$$

여기서  $A_l, B_l, C_l$ 는 집합  $\Omega$ 를 정의할 때 사용한 행렬들과 동일한 행렬이고, 따라서 값을 알고 있는 행렬이다.  $\rho_l$ 는 우리가 임의로 결정할 수 있는 설계 파라미터이다. 따라서  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 를 선정하는 문제는 설계 파라미터  $\rho_l$ 를 선정하는 문제로 귀결된다. 파라미터  $\rho_l$ 은 다음과 같은 방법으로 선정할 수 있다.

### • 상태 관측기 모델 선정 방법

상태 관측기 모델은 미리 설계한 제어기 이득  $K$ 와 관측기 이득  $L$ 을 이용하여 아래의 행렬 (19)을 안정한 행렬이 되도록 선정한다.

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{A} + \bar{B}K + L(\bar{C} - \bar{C}) & L\bar{C} \\ \bar{A} + \bar{B}K - \bar{A} - \bar{B}K - L(\bar{C} - \bar{C}) & \bar{A} - L\bar{C} \end{bmatrix} \quad (19)$$

행렬  $\bar{\Psi}$ 는 알 수 없는 행렬이지만  $\bar{\Psi}$ 의 꼭지점 행렬 (20)을 모두 안정하도록 하는 상태 관측기 모델을 결정함으로써 안정한 행렬이 되도록 할 수 있다.

$$\Psi_l = \begin{bmatrix} \bar{A} + \bar{B}K + L(C_l - \bar{C}) & LC_l \\ A_l + B_l K - \bar{A} - \bar{B}K - L(C_l - \bar{C}) & A_l - LC_l \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 이다.

행렬  $\Psi_l$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Psi_l &= \begin{bmatrix} \bar{A} + \bar{B}K + L(C_l - \bar{C}) & LC_l \\ A_l + B_l K - \bar{A} - \bar{B}K - L(C_l - \bar{C}) & A_l - LC_l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} LC_l & LC_l \\ A_l + B_l K - LC_l & A_l - LC_l \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n_p} \rho_l (A_l + B_l K - LC_l) & 0 \\ -\sum_{l=1}^{n_p} \rho_l (A_l + B_l K - LC_l) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} LC_l & LC_l \\ A_l + B_l K - LC_l & A_l - LC_l \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \rho_1 I_{n_x} & \dots & \rho_{n_p} I_{n_x} \\ -\rho_1 I_{n_x} & \dots & -\rho_{n_p} I_{n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 + B_1 K - LC_1 & 0 \\ \vdots \\ A_{n_p} + B_{n_p} K - LC_{n_p} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

여기서  $n_x$ 는 상태 변수의 개수이다. 위의 식 (21)에서

$$A_1 = \begin{bmatrix} LC_l & LC_l \\ A_l + B_l K - LC_l & A_l - LC_l \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 K - LC_1 & 0 \\ \vdots \\ A_{n_p} + B_{n_p} K - LC_{n_p} & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$L_\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 I_{n_x} & \dots & \rho_{n_p} I_{n_x} \\ -\rho_1 I_{n_x} & \dots & -\rho_{n_p} I_{n_x} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

으로 각각 정의하자. 그러면 행렬  $\Psi_l$ 이 안정한 행렬이 되는 것은  $A_l + L_\rho \Gamma$ 가 안정한 행렬이 되는 것과 동치이다.  $A_l, \Gamma$ 은 알고 있는 행렬이기 때문에 아래의 가능성(feasibility) 문제 (25)를 풀어서  $L_\rho(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_p})$ 를 결정함으로써 관측기 모델을 선정할 수 있다.

### • $L_\rho$ 선정을 위한 가능성 문제

$$\begin{pmatrix} M & (A_l^T M + \Gamma^T L_\rho^T M)^T \\ (A_l^T M + \Gamma^T L_\rho^T M) & M \end{pmatrix} > 0, \quad (25-1)$$

여기서  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 이다.

$$M > 0, \quad (25-2)$$

$$\sum_{l=1}^{n_p} \rho_l = 1, \quad (25-3)$$

$$0 \leq \rho_l \leq 1 \quad \forall l = 1, 2, \dots, n_p. \quad (25-4)$$

가능성 문제 (25)를 풀어서 구한  $L_\rho (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_p})$  는  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 에 대하여 행렬  $\Psi_l$ 을 안정화하고 따라서 행렬  $\tilde{\Psi}$ 를 안정화한다.

언급 2: 가능성 문제 (25)는 쌍선형 행렬 부등식 형태이다. 왜냐하면  $L_\rho^T$ 와  $M$ 은 행렬 부등식의 변수인데, 그 변수들이 서로 곱해진 형태가 (25-1)에 존재하기 때문이다. 이 형태는  $L_\rho^T$  내부에 구조적 제약 (24)과 변수의 제약 (25-3,4)이 있기 때문에 부등식 (16)과 같이 치환을 통하여 선형 행렬 부등식으로 변환하기 어렵다. 따라서, 가능성 문제 (25)는 쌍선형 행렬 부등식 해결도구(bilinear matrix inequality solver)를 이용하여 풀어야 한다. 본 논문에서 사용한 쌍선형 행렬 부등식 해결도구는 가능성 문제 (25)를 풀기 위해서 내부적으로 아래의 최적화 문제를 푼다.

최소화  $\gamma$

$$\text{제약 조건: (27), (28), (29), (30), (31)} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} M & (A_l^T M + \Gamma^T L_\rho^T M)^T \\ (A_l^T M + \Gamma^T L_\rho^T M) & M \end{pmatrix} > \gamma I. \quad (27)$$

여기서  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 이다.

$$M > 0. \quad (28)$$

$$\sum_{l=1}^{n_p} \rho_l = 1. \quad (29)$$

$$0 \leq \rho_l \leq 1 \quad \forall l = 1, 2, \dots, n_p. \quad (30)$$

$$\gamma \geq 0 \quad (31)$$

부등식 (31)는  $\gamma$ 의 하계를 0으로 지정함으로써 최적화 문제 (26)가 해를 갖는 것이  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 에 대하여  $A_l + L_\rho \Gamma (= \Psi_l)$ 가 안정한 행렬이 되는 것을 보장한다.

언급 3: 시스템 행렬  $(A, B, C)$ 의 값을 정확히 아는 경우에 일반적인 상태 변수 관측기를 설계하면, 추정된 상태 변수와 추정 오차로 얻은 페루프 방정식이 블록 상부 삼각 행렬 (upper triangular matrix)이 된다는 사실이 잘 알려져 있다. 따라서 페루프의 고유치는  $(A - BK)$ 의 고유치와  $(A - LC)$ 의 고유치의 합집합으로 얻어진다. 그래서 일반적인 상태 변수 관측기를 시스템에 연결하는 것이 미리 설계한 상태 피드백 (state feedback)의 고유치에 영향을 주지 않게 된다. 위의 사실을

분리법칙 (separation principle)이라고 한다. 분리법칙 덕분에 일반적인 상태 변수 관측기에서는 제어기 이득  $K$ 와 관측기 이득  $L$ 을 각각 독립적으로 설계할 수 있다[7]. 하지만 관측기 모델을 이용한 상태 변수 관측기 (14)는 관측기 모델로 사용할  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 을 선정할 때 제어기 이득  $K$ 를 고려해야 하므로 분리법칙이 적용되지 않는다.

### 3. 페루프 시스템의 안정도 증명

이 절에서는 앞 절에서 선정된 강인 제어기 이득, 강인 관측기 이득, 관측기 모델을 이용하여 구성된 페루프 시스템이 안정함을 보인다.

정리 1: 선형 행렬 부등식 (12)와 (16), 그리고 가능성 문제 (25)가 해를 가진다고 가정하자. 먼저, 선형 행렬 부등식 (12)를 풀어 제어기 이득  $K$ 를 선정하자. 비슷한 방식으로 (16)을 풀어 관측기 이득  $L$ 를 선정하고 마지막으로 관측기 모델 설계 파라미터  $\rho_l (l = 1, 2, \dots, n_p)$ 를 가능성 문제 (25)를 풀어서 선정한다. 선정된 값들로 설계한 상태 변수 관측기 기반 폐환 제어

$$u = K\hat{x} \quad (32)$$

는 시스템 (8)을 안정화한다.  $\hat{x}$ 은 상태 변수 관측기 (14)가 제공하는 추정된 상태 변수 값이다.

증명: 추정 오차를 다음과 같이 상태 변수와 추정된 상태 변수의 차로 정의하자.

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k). \quad (33)$$

이렇게 정의한 추정 오차는 다음과 같은 동특성을 만족한다.

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) - (\bar{A} + \bar{B}K + L(\bar{C} - \bar{C}))\hat{x}(k) \\ &\quad - L\tilde{C}e \\ &= \bar{A}x(k) - \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}K\hat{x}(k) \\ &\quad - (\bar{A} + \bar{B}K + L(\bar{C} - \bar{C}))\hat{x}(k) - L\tilde{C}e(k) \\ &= (\bar{A} + \bar{B}K - \bar{A} - \bar{B}K - L(\bar{C} - \bar{C}))\hat{x}(k) \\ &\quad + (\bar{A} - L\tilde{C})e(k) \end{aligned} \quad (34)$$

또한 선정된 관측기 모델을 사용한 관측기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}u(k) + L(y - \bar{C}\hat{x}) \\ &= \bar{A}\hat{x}(k) + \bar{B}K\hat{x}(k) + L(\bar{C}x - \bar{C}\hat{x}) \\ &= (\bar{A} + \bar{B}K)\hat{x}(k) + L(\bar{C}x - \bar{C}\hat{x} + \bar{C}\hat{x} - \bar{C}\hat{x}) \\ &= (\bar{A} + \bar{B}K + L(\bar{C} - \bar{C}))\hat{x}(k) + L\bar{C}e(k) \end{aligned} \quad (35)$$

두 식 (34)-(35)를 종합하여 간략한 형태의 페루프 방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \tilde{\Psi} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \quad (36)$$

여기서  $\tilde{\Psi}$ 은 앞서 정의한 행렬 (19)이다.  $\rho_l$ 을 선정된 방식에 의해 모든  $l = 1, 2, \dots, n_p$ 에 대하여  $\Psi_l$ 이



안정한 행렬이므로 페루프 방정식  $\tilde{\Psi}$ 는 안정한 행렬이 된다 [6]. 따라서 상태 변수 관측기가 제공하는 추정된 상태 변수와 추정 오차가 0으로 수렴하고, 상태 변수 또한 0으로 수렴하게 되므로 상태 변수 관측기를 이용한 출력 궤환 제어가 페루프 안정을 보장한다. ■

언급 4: 제안한 상태 변수 관측기 기반 출력 궤환 제어기는 집합  $\Omega$  내부에 포함되는 모든 시스템을 안정화한다.

V. 모의 실험

다각형 형태의 불확실성을 갖는 시스템 (5)을 고려하자. 시스템이 가진 다각형 형태의 불확실성 (6)에서 알고 있는 행렬  $A_i, B_i, C_i$ 을 아래의 수치로 모의실험 하였다:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8670 & -0.0047 \\ 21.8638 & 1.6936 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0.0005 \\ 0.2953 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.8826 & -0.0039 \\ 17.9020 & 1.5291 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.0007 \\ 0.2622 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.8026 & -0.0052 \\ 26.1252 & 1.8644 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 0.2445 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [-0.02, 0.93], C_2 = [0.08, 1.04], C_3 = [-0.04, 1.06]..$$

실험을 위해서 임의로 값으로 시스템의 불확실성을 나타내는 매개변수( $\eta_1=0.4639, \eta_2=0.2423, \eta_3=0.2938$ )를 설정하였다. 먼저, 상태 변수를 측정 가능한 경우를 고려하자. 조정 파라미터  $\epsilon = 0.9$ 로 설정하고 4.1 절에서 소개한 방식으로 제어기 이득을 구하면 아래와 같은 값

$$K = (-3.8729 \quad -6.6523)$$

을 얻는다. 이 제어기 이득과 제어 법칙 (10)을 이용하여 상태 변수 궤환 제어를 한 모의실험 결과는 다음과 같다.

다음으로 같은 불확실성 시스템에 대해서 상태 변수를 관측할 수 없는 경우를 고려하자. 앞서 본문에서 제시한 상태

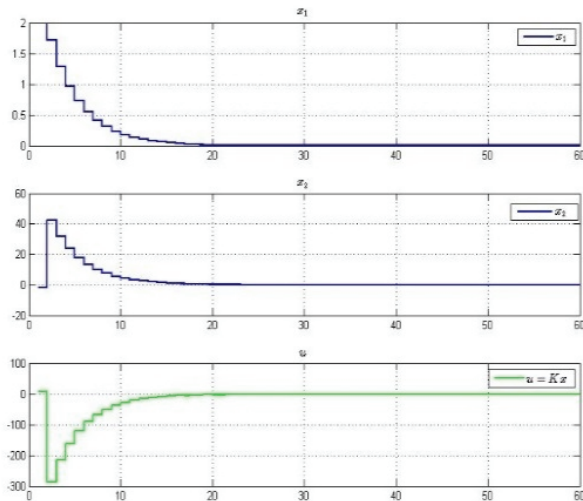


그림 1. 모의 실험 결과. 상태 변수 궤환 제어를 했을때, 상태 변수와 입력의 궤적을 도시화하였다. ( $\eta_1 = 0.4639, \eta_2=0.2423, \eta_3=0.2938, \epsilon = 0.9$ ).

Fig. 1. Simulation result. A state feedback law is adopted for the simulation. The trajectories of the state and the input are plotted. ( $\eta_1=0.4639, \eta_2=0.2423, \eta_3=0.2938, \epsilon=0.9$ ).

변수 관측기 기반의 출력 궤환 제어를 이용하여 모의 실험하였다. 조정 파라미터를 각각  $\epsilon = 0.9, \delta = 0.9$ 으로 두고 계산한 결과 제어기 이득과 관측기 이득을 각각 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$K = ( 30.6846 \quad -5.3262 )$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.0223 \\ 2.3658 \end{pmatrix}$$

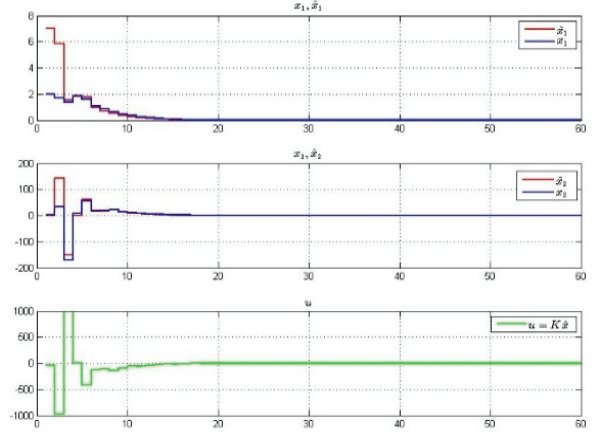


그림 2. 모의 실험 결과. 출력 궤환 제어를 했을 때, 상태 변수와 추정된 상태 변수 그리고 입력의 궤적을 도시화하였다. ( $\eta_1 = 0.4639, \eta_2 = 0.2423, \eta_3 = 0.2938, \epsilon = 0.9, \delta = 0.9, \rho_1 = 0.1444, \rho_2 = 0.3980, \rho_3 = 0.4576$ ).

Fig. 2. Simulation result. The proposed output feedback law is adopted for the simulation. The trajectories of the state, the estimated state and the input are plotted. ( $\eta_1 = 0.4639, \eta_2 = 0.2423, \eta_3 = 0.2938, \epsilon = 0.9, \delta = 0.9, \rho_1 = 0.1444, \rho_2 = 0.3980, \rho_3 = 0.4576$ ).

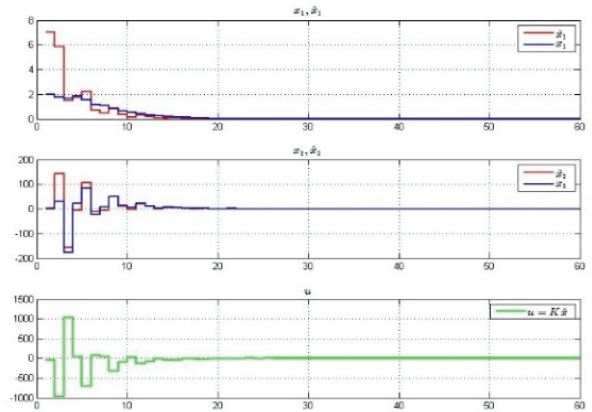


그림 3. 모의 실험 결과. 출력 궤환 제어를 했을 때, 상태 변수와 추정된 상태 변수 그리고 입력의 궤적을 도시화하였다. ( $\eta_1 = 0.2639, \eta_2 = 0.5423, \eta_3 = 0.1938, \epsilon = 0.9, \delta = 0.9, \rho_1 = 0.1444, \rho_2 = 0.3980, \rho_3 = 0.4576$ ).

Fig. 3. Simulation result. The proposed output feedback law is adopted for the simulation. The trajectories of the state, the estimated state and the input are plotted. ( $\eta_1 = 0.2639, \eta_2 = 0.5423, \eta_3 = 0.1938, \epsilon = 0.9, \delta = 0.9, \rho_1 = 0.1444, \rho_2 = 0.3980, \rho_3 = 0.4576$ ).

제어기 이득과 관측기 이득을 이용하여 앞서 소개한 상태 변수 관측기 모델을 선정한 결과 ( $\rho_1 = 0.1444$ ,  $\rho_2 = 0.3980$ ,  $\rho_3 = 0.4576$ )를 얻었다. 선정한 제어기 이득, 관측기 이득, 그리고 관측기 모델을 이용한 출력 궤환 제어 모의 실험 결과는 그림 2와 같다.

상태 변수 궤환 제어에 비해서 출력 변수 궤환 제어가 일시적인 반응(transient response)은 좋지 않지만 점차 상태 변수 궤환 제어를 했을 때처럼 시스템을 성공적으로 안정화한다.

제한한 출력 궤환 제어의 강인성을 확인하기 위해서 임의로 시스템의 불확실성을 나타내는 매개변수 ( $\eta_1 = 0.2639$ ,  $\eta_2 = 0.5423$ ,  $\eta_3 = 0.1938$ )를 바꾸어서 같은 방식으로 모의 실험하였다. 본문에서 제시한 상태 변수 관측기 기반의 출력 궤환 제어는 바뀐 시스템도 안정화함을 모의 실험으로 확인할 수 있었다. 즉, 제시한 관측기 기반의 출력 궤환 제어가 앞서 정의한 불확실성 집합  $\Omega$  안에 포함되는 임의의 시스템을 성공적으로 안정화한다는 것을 모의 실험으로 확인하였다. 실험 결과는 그림 3과 같다.

## VI. 결론

본 논문에서는 볼록 다각형 불확실성을 가지는 선형 시불변 이산시스템에 대한 관측기 기반의 출력 궤환 제어기를 설계하였다. 볼록 다각형 형태의 불확실성을 갖고 있어 시스템 행렬을 정확하게 모르는 경우에도 시스템을 안정화할 수 있는 상태 변수 관측기 설계 방법을 제시하였다.

앞으로 지령치 추종(reference tracking) 문제에 적용 가능한 설계 기법을 제안하는 것이 필요하다. 또한 입력 포화(input saturation)가 있는 시스템에 대한 안정화 기법에 대한 연구도 필요하다.

## REFERENCES

- [1] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet, "Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 4, no. 7, pp. 1041-1046, Jul. 1996.
- [2] W. M. Haddad and V. Kapila, "Robust stabilization for discrete-time systems with slowly time-varying uncertainty," *J. Franklin Inst.*, vol. 333, no. 1, pp. 71-84, 1996.
- [3] F. Garofalo, G. Celentano, and L. Glielmo, "Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 38, no. 2, pp. 281-284, 1993.
- [4] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton, "Stability tests for constrained linear systems," *Perspectives in Robust Control*, Springer London, vol. 268, pp. 241-257, 2001.
- [5] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 32, no. 10, pp. 1361-1379, 1996.
- [6] M. C. de Oliveira, C. Mauricio, J. Bernussou, and J. C. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition," *Systems & Control Letters*, vol. 37, no. 4, pp. 261-265, 1999.
- [7] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, Inc., 1995.
- [8] C. H. Lien, "An efficient method to design robust observer-based control of uncertain linear systems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 158, no. 1, pp. 29-44, 2004.
- [9] D. W. Gu and F. W. Poon, "A robust state observer scheme," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 46, no. 12, pp. 1958-1963, Dec. 2001.
- [10] K. C. Veluvolu, Y. C. Soh, and W. Cao, "Robust observer with sliding mode estimation for nonlinear uncertain systems," *IET Control Theory & Appl.*, vol. 1, no. 5, pp. 1533-1540, Sep. 2007.
- [11] J. Lofberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, IEEE, 2004.
- [12] D. Henrion, J. Lofberg, and M. Kocvara, "Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI," *CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference*, 2005.
- [13] G. Garcia, J. Bernussou, and D. Arzelier, "Stabilization of an uncertain linear dynamic system by state and output feedback: a quadratic stabilizability approach," *International Journal of Control*, vol. 64, no. 5, pp. 839-858, 1996.



## 오상욱

2013년 중앙대학교 전자전기공학부 졸업.  
2013년~현재 서울대학교 대학원 전기정보공학부 석사과정 재학. 관심분야는 비선형제어, 예측제어.

## 김정수

제어·로봇·시스템학회 논문지 제18권 제7호, pp. 622-626  
참고.

## 심형보

제어·로봇·시스템학회 논문지 제18권 제7호, pp. 622-626  
참고.