

감마과정 모델을 적용한 피로균열 진전거동의 예측[§]

박 성 호* · 김 재 훈**†

* 국방과학연구소 종합시험본부, ** 충남대학교 공과대학 기계설계학과

Estimation of Fatigue Crack Growth using Gamma Process Model

Sung Ho Park* and Jae Hoon Kim**†

* Defense Systems Test Center, Agency for Defense Development

** Dept. of Mechanical Design Engineering, Choongnam Nat'l Univ.

(Received June 2, 2014 ; Revised August 15, 2014 ; Accepted August 19, 2014)

Key Words: Fatigue Crack Growth(피로 균열 진전), Gamma Process(감마 과정), Fatigue Life(피로 수명), Optimal Replacement Period(최적 교체 주기), Percentile Life(백분위 수명)

초록: 피로균열 진전거동은 내재적, 외재적 요인에 의하여 시간 경과에 따라 많은 변동을 보인다. 감마 과정 모델을 포함하여 연속적, 점진적 그리고 단조롭게 진전하는 피로균열 진전거동의 불확실성을 모사하기 위한 열화모델을 고찰하였다. Lu와 Meeker의 피로시험 자료에 감마과정 모델을 적용하여 시간에 따라 확률적으로 변동하는 피로균열 진전거동을 예측하였다. 피로균열 진전에 관한 상태저하와 수명을 시간에 따라 형상이 변화하는 확률분포 곡선으로 표현하였으며 비대칭도와와의 관계로부터 기대수명으로 증위수의 적용이 적절함을 확인하였다. 최적 교체주기와 백분위 수명에 관한 고찰로 감마과정 모델이 예방정비를 위한 정책판단 기준으로 활용할 수 있음을 제시하였다.

Abstract: The physical nature of fatigue shows the considerable amount of scatter from intrinsic and extrinsic factors. In this study, some degradation models, such as the gamma process model, were reviewed in terms of uncertainties associated with the continuous, gradual, and monotonic nature of fatigue crack growth. Statistically varying fatigue crack growth data obtained from Lu and Meeker were used as an example to demonstrate the use of the gamma process model. This model can describe the condition and lifetime as statistical distribution curves whose shapes vary with cycles. From the skewness of the statistical distribution curves, it was confirmed that the median is suitable for being considered as the expected life. The use of the gamma process model enables the optimum replacement period and percentile life to be employed as criteria for preventive maintenance policy.

- 기호설명 -

$X(t)$: 시간 t 에서의 누적 열화량
 β : 척도모수
 $\lambda(t) = ct^b$: 시간 t 에서 형상모수
 $Ga(x|\lambda(t), \beta)$: 확률밀도함수
 $GA(\rho|\lambda(t), \beta)$: 누적분포함수
 $\Gamma(\lambda(t))$: $\lambda(t) > 0$ 에 관한 감마함수값

$\delta_i = x_i - x_{i-1}$: 누적 열화량의 증분

$\omega_i = t_i^b - t_{i-1}^b$: 검사시간 간격

1. 서론

재료의 피로특성은 안전이 요구되는 부품 또는 구조물의 최적설계 및 수명평가에 중요한 요소이다. 기계 부품 및 구조물은 재료, 구조, 기능, 사용 환경 등 다양한 원인과 형태로 파괴되지만 피로파괴의 빈도가 가장 높다.⁽¹⁾ 반복하중의 누적에 따른 피로균열 진전량이 임계값에 이를 때 피로 파괴로 이어지므로 균열진전에 따른 잔여수명의

§ 이 논문은 2014년도 대한기계학회 춘청대회 춘계 학술대회(2014. 5. 9., 충남대) 발표논문임.

† Corresponding Author, kimjhoon@cnu.ac.kr

© 2014 The Korean Society of Mechanical Engineers

예측이 중요하다.

피로균열 진전특성은 본질적으로 불확실성(uncertainty) 요인에 의한 변동(variability)을 가지고 있는 확률론적 현상으로 인식되어 왔으며 안전성과 신뢰성의 확보를 위하여 많은 양의 실험 자료가 필요하다. 하지만 시간적, 경제적 제약으로 적은 실험 자료로 피로특성을 예측하는 모델이 필요하다.

피로균열 진전속도는 내재적 요인과 외재적 요인의 영향을 받아 변동한다. 재료의 비균질성(inhomogeneity)과 초기 손상상태,⁽²⁾ 두께와 같은 기하학적 형상⁽³⁾ 그리고 용접에 의한 잔류강도⁽⁴⁾ 등이 내재적 요인이다. 외재적 요인은 고온 환경⁽⁵⁾과 부식 환경으로 구분되며 부식 환경은 수소, 산소 그리고 수증기와 같은 가스 환경⁽⁶⁾과 염수 환경⁽⁷⁾ 등이다. 실험 자료의 변동성은 샘플링(sampling) 불확실성과 시간(temporal) 불확실성에 기인한다. 샘플링 불확실성은 재료에 내재하고 있는 요인으로 열화경로가 다양한 원인이다. 시간 불확실성은 재료에 작용하는 환경적 요인으로 시간경과에 따라 불확정적으로 변화하면서 재료의 열화속도에 영향을 주며 열화경로의 비선형성을 증가시킨다.

Fig. 1은 Lu와 Meeker⁽⁸⁾가 Bogdanoff와 Kozin⁽⁹⁾의 저서로부터 얻은 반복하중에 대한 피로균열의 진전거동 자료이며 Lu와 Meeker는 균열길이 1.60 in.를 피로파괴 여부를 판단하는 임계수준으로 정하였다. 임계수준에서의 수명과 임의의 누적 반복하중에서 피로균열 진전량이 특정한 확률분포를 이루며 시간에 따라 확률분포의 형상이 변화하고 피로균열 진전속도가 내재적 요인과 외재적 요인의 복합적인 작용으로 영향을 받고 있음을 볼 수 있다.

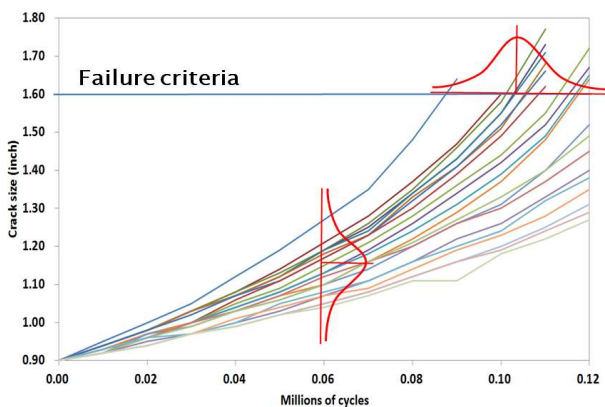


Fig. 1 Fatigue crack growth data from Bogdanoff and Kozin

피로균열 진전에 대한 파손 저항성은 반복 하중의 누적에 따라 저하되어 특정한 열화경로를 따라 고장상태에 이르게 되며 이를 표현하기 위한 모델의 설정이 필요하다. 피로균열 진전경로를 표현하기 위하여 연구된 모델은 열화경로가 선형 또는 비선형의 확정적 수식으로 표현되는 결정론적(deterministic) 모델, 열화율을 랜덤변수로 보는 확률론적(statistical) 모델 그리고 관측 시점에 따라 확률분포의 모수가 변화하는 확률과정론적(stochastic process) 모델로 구분된다.

마르코프 체인(Markov chain) 모델은 확률과정론적 모델로 피로손상의 누적과정에 대한 총체적인 정보를 얻을 수 있으며 계산과정이 확률론적 모델보다 간단하여 피로균열 진전특성을 표현하기 위한 모델로 많이 적용되어 왔다.⁽¹⁰⁾ 하지만 피로균열은 시간경과에 대하여 연속적으로 진전되므로 이산시간 확률과정 모델인 마르코프 체인 모델이 피로균열 진전현상의 물리적 의미를 표현하는데 한계가 있다고 판단된다. 확률과정론적 모델의 일종인 감마과정(gamma process) 모델은 점진적이며 연속적으로 증가하는 피로균열 진전현상을 모델링하기에 가장 적합하다고 판단되나 지구과학 분야, 토목 및 인프라 분야에 주로 적용되어 왔으며 피로균열 진전특성을 모사하고 응용하기 위한 연구는 활발하지 않다.

본 논문에서 시간 경과에 따른 피로균열 진전 과정에 대한 수명예측 모델들을 고찰하였으며, 감마과정 모델을 피로균열 진전실험 결과에 적용하여 경과시간에 따른 확률분포의 변화와 수명분포를 예측하는 방법을 제시하였다. 또한 경과시간에 따른 비대칭도의 변화와 대푯값의 선정, 최적 교체주기의 설정 그리고 백분위 수명의 선정 방법에 관하여 논하였다.

2. 열화모델의 고찰

2.1 결정론적 모델

피로균열 진전거동은 응력확대계수에 대한 균열진전 속도의 관계로부터 얻어진다. Paris와 Erdogan⁽¹¹⁾은 균열전과 구간인 제 2영역에서 응력확대계수와 균열진전 속도의 관계를 선형식으로 표현하였으며, Forman⁽¹²⁾은 정적 파손구간인 제 3영역까지 적용하도록 Paris-Erdogan식을 수정하였다. 결정론적 모델은 경과 시간에 대한 상태(피로 파손에 대한 저항성) 저하량을 선형 또는 멱함수,

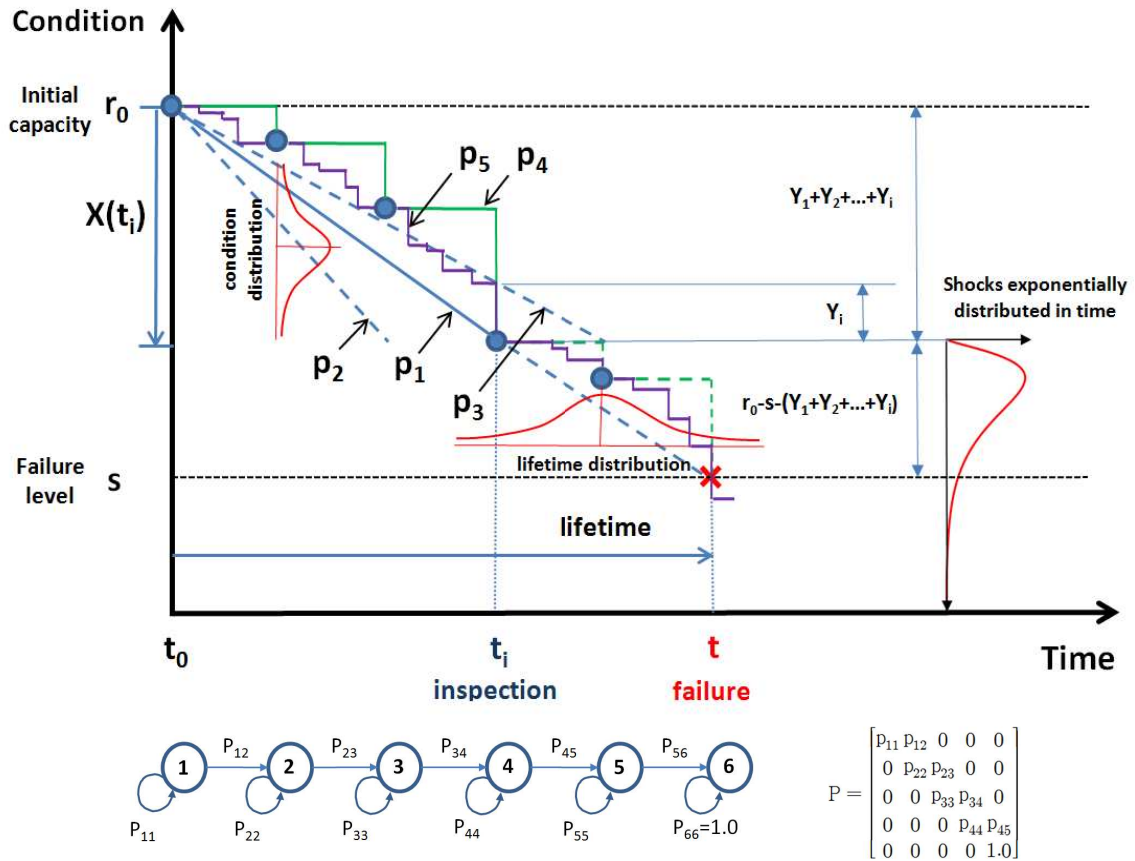


Fig. 2 Degradation paths and various degradation models

지수함수와 같은 비선형의 확정적 수식으로 표현한다. 시간 경과에 따른 열화과정을 직관적으로 파악할 수 있으나 상태저하와 관련한 확률적 속성을 반영하지 못한다.

Fig. 2는 각 열화모델에 대하여 시간경과에 따른 상태저하 경로를 보이고 있으며 r_0 는 초기 저항성이고 s 는 파손한계이다. 누적 열화량 $X(t)$ 가 설계여유 $\rho=r_0-s$ 를 초과하는 시간 t 에서 고장이 발생한다. 결정론적 모델은 열화경로 p_1 과 같이 표현되며 시간경과에 따른 상태 열화가 기울기 A 인 선형 경로를 따른다고 할 때 수명은 $t=(r_0-s)/A$ 로 구할 수 있다. A 는 확정적이므로 임의의 관측점 t_i 에서 누적 열화량 $X(t_i)$ 의 측정으로 잔여수명을 확정적으로 예측할 수 있다. 하지만 재료의 비균질성 등 내재적 요인으로 각 시편이 가지고 있는 고유의 열화율에 따라 p_2 또는 p_3 와 같이 다양한 열화경로를 가질 것이다. 하지만 결정론적 모델은 열화경로의 다양함을 고려하지 않는다.

2.2 확률론적 모델

선형 탄성 파괴역학에 근거한 확률론적 방법은 랜덤변수(random variable) 모델과 랜덤과정(random process) 모델로 구분된다. Yang 등⁽¹³⁻¹⁵⁾의 랜덤변수 모델은 Paris-Erdogan식에서 재료상수를 랜덤변수로 갖는 확률분포로부터 피로균열 진전의 변동성을 나타내고 확률적 성질을 이용하여 피로수명을 예측하였다. 랜덤변수 모델은 재료상수의 변동으로 수식의 차원이 변동하는 문제가 있고 재료상수의 확률적 거동을 명확하게 표현하기 위하여 많은 실험이 요구된다. Yang 등⁽¹⁶⁾의 랜덤과정 모델은 피로균열 진전의 변동성을 연속적인 시간의 함수로 표현하고 이의 상관성을 이용하여 피로균열 진전과정을 모사하였다. 랜덤과정 모델은 수식의 물리적 의미면에서는 적합하나 균열길이에 따라 자기상관함수가 달라지고 균열이 긴 경우 자기상관함수를 정의하기 어렵다.⁽²⁾

Fig. 2에서 확률론적 모델은 각 시편에 내재하고 있는 서로 다른 열화율에 의한 $p_1 \sim p_3$ 의 열화경로를 와이블 분포 또는 로그-정규분포와 같은

특정한 확률분포에 적합시킨다. 확률론적 모델은 내재적 요인에 의한 샘플링 불확실성으로 기인하는 변동성을 잘 표현할 수 있다. 하지만 특정 독립변수에 대한 종속변수의 확률분포 특성 해석에 국한하고 있으며 확률분포의 모수가 시간에 대해 고정되므로 외재적 요인에 의한 시간 불확실성에 따른 변동성을 표현하기가 어렵다.^(10,17)

2.3 확률과정론적 모델

확률과정론적 모델은 관측시점에 따라 확률분포가 변하는 확률현상을 모형화하기 위하여 관측시점을 매개변수로 하는 확률변수들의 모임으로 마르코프 체인, 복합 푸아송과정, 감마과정 등이 있다. 피로균열은 피로하중이 작용하는 미소시간에 대응하여 진전한다고 여겨지나 누적 열화량의 거시적 관측은 충분한 시간간격을 가지고 이산적으로 이루어진다. 또한 재료에 수시로 작용하는 외재적 요인의 변동으로 각 시편이 내재적으로 가지고 있는 열화율이 변동하여 열화경로는 Fig. 2에서 p_4 또는 p_5 와 같을 것이다.

2.3.1 마르코프 체인 모델

적은 수의 실험 자료로 피로균열 진전거동을 설명하기 위하여 Bogdanoff와 Kozin,⁽⁹⁾ Kim 등⁽¹⁸⁾ 그리고 Lee 등⁽¹⁹⁾은 Paris-Erdogan 식에 근거한 이산시간 확률과정론적 모델인 마르코프 체인 모델을 적용하여 피로수명을 평가하였다.

마르코프 체인 모델은 계단함수로 상태전이되며 열화경로와 상관없이 현재의 상태전이 확률에 의해서만 다음 단계로의 상태전이 여부가 결정되는 마르코프 성질을 만족하는 모델로 Fig. 2의 열화경로 p_4 에 대하여 상태전이 다이어그램과 전이 확률 행렬로 표현된다. 피로손상 누적과정의 예측을 위하여 손상이 현 상태에서 다음 상태로 전이할 수 있는 최소 하중 반복수를 D.C. (duty cycle)로 정의하고 다음과 같이 가정한다.⁽¹⁰⁾

- 피로손상은 현 손상상태에서 바로 이웃한 상태로 불연속적으로 증가한다.
- 피로손상이 증가될 확률은 D.C.가 시작할 때의 상황과 D.C. 그 자체에만 의존한다.

상태전이 다이어그램에서 현 상태 i 에서 바로 이웃한 상태 j 로 진전하거나 머무를 수 있는데 P_{ij} 는 D.C.가 가해지는 동안 손상이 i 상태에 정체

되어 있을 확률이며 P_{ij} 는 j 상태로 전이될 확률로 $P_{ii} + P_{ij} = 1$, $0 < P_{ij} < 1$ ($j=1,2,3,\dots,b$)이다. b 는 파손단계를 의미하며 반복 하중에 따른 피로손상의 누적은 한 단계씩 차례로 진행된다고 가정한다. 전이확률 행렬의 각 요소는 기하분포의 실패확률과 성공확률 값으로 결정된다.

마르코프 체인 모델은 열화과정을 단일 계단함수로 여기므로 주어진 시간계단 동안 한 가지 이상의 상태로 전이하지 않는다고 본다. 또한 전이 확률이 시간에 대하여 불변으로 현 상태에서 다른 상태로 전이할 때 각 상태에 머무는 시간을 고려하지 않기 때문에 시간 변동성을 고려할 수 없다.⁽¹⁷⁾ 피로균열 진전거동이 점진적이며 연속적으로 한 방향으로만 증가한다는 점에서 마르코프 체인 모델은 물리적인 현상을 표현하기에 제약이 있다고 판단된다.

2.3.2 복합 푸아송과정

시간 t 까지 발생한 사건의 횟수는 계수과정(counting process) $N(t)$ 로 표현되는데 $N(t)$ 가 $N(0)=0$ 이고 독립증분과 정상증분을 가지며 임의의 $s, t \geq 0$ 에 대하여 모수가 λt 인 푸아송분포를 따를 때 $N(t)$ 는 도착률(또는 발생률) λ 를 가지는 푸아송과정(Poisson process)이다.⁽²⁰⁾ 푸아송과정 $\{N(t), t \geq 0\}$ 에 독립이며 독립, 균등분포하는 Y_i 에 대하여 복합 푸아송과정(compound Poisson process) $\{X(t), t \geq 0\}$ 은 식 (1)로 표현된다.

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0 \quad (1)$$

Fig. 2에서 단일 열화경로 p_4 의 검사 간격을 작게 한다면 열화경로 p_5 로 표현될 수 있을 것이다. 재료에 일련의 랜덤 쇼크가 독립적으로 가해질 때 i 번째 쇼크에 의한 손상이 Y_i 이고 시간구간 $(0, t]$ 에서 재료에 가해진 쇼크의 개수가 발생률 λ 인 푸아송과정을 따르는 $N(t)$ 라고 할 때 시간 t 까지 재료에 누적된 손상은 식 (1)과 같이 복합 푸아송과정 $X(t)$ 이다. 복합 푸아송과정은 임의의 시간 간격내에서 유한개의 도약(jump)을 가지며 산발적으로 작용하는 쇼크에 의한 손상의 모델링에 적합하다.^(21,22)

2.3.3 감마과정 모델

감마과정 모델은 연속시간 확률과정 모델로 식

(2)와 같이 임의의 두 시점($\tau > t \geq 0$)에서 누적 열화량의 증분이 시간에 따라 증가하는 형상모수와 고정된 값의 척도모수를 가지는 감마분포를 따른다.

$$X(\tau) - X(t) \sim Ga(\lambda(\tau) - \lambda(t), \beta), \quad \tau > t \geq 0 \quad (2)$$

감마과정 모델의 확률밀도함수(PDF), 평균, 분산, 변동계수(COV), 누적분포함수(CDF) 그리고 신뢰도 계산식은 Table 1과 같다. 여기서 $X(t)$ 는 시간 t 에서의 누적 열화량으로 $X(0) = 0$ 이며 독립 증분을 가진다. β 는 척도모수로 고정된 값이며 시간의 변수인 형상모수 $\lambda(t)$ 는 양의 값으로 일반적으로 $\lambda(t) = ct^b$ 로 표현된다.

분산을 평균으로 나눈 값은 $1/\beta$ 로 시간 경과에 상관없이 항상 동일하다. 시간경과에 따른 열화량의 증분 $X(t+h) - X(t)$ 이 모든 시간 t 에 대하여 오직 시간증분 $h \geq 0$ 에만 의존할 때 정상(stationary) 감마과정 모델이며 형상모수는 $\lambda(t) = ct$ 로 시간에 따라 선형으로 증가하고 $t = c^{-1}$ 일 때 확률밀도함수는 지수분포와 동일하다. 따라서 Fig. 2에서 단위시간 길이가 c^{-1} 일 때 열화량의 증분은 평균 β^{-1} 인 지수분포를 따르며 단위시간 i 에서의 고장 확률은 평균이 $1 + \beta(r_0 - s)$ 인 푸아송분포를 따른다.⁽²³⁾

Table 1 Equations for gamma process model

Statistics	Equations
PDF	$f_{X(t)}(x) = \frac{\beta^{\lambda(t)}}{\Gamma(\lambda(t))} x^{\lambda(t)-1} e^{-\beta x}$ $= Ga(x \lambda(t), \beta)$
Mean	$\mu_{X(t)} = \frac{\lambda(t)}{\beta}$
Variance	$\sigma_{X(t)}^2 = \frac{\lambda(t)}{\beta^2}$
COV	$\nu_{X(t)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}}$
CDF	$F_T(t) = P[X(t) > \rho] = 1 - P[X(t) < \rho]$ $= 1 - GA(\rho \lambda(t), \beta)$
Reliability	$R(t) = 1 - F_T(t)$

정상 감마과정 $X(t)$ 를 라플라스-스틸체스(Laplace-Stieltjes) 변환하면 식 (3)과 같으며 $s > 0$, $\delta > 0$ 이고 $Q(\delta) = a \int_{z=\delta}^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{z} dz$ 는 δ 보다 큰 값을 가지는 도약의 강도(intensity)이다.

$$E(e^{-sX(t)}) = \exp\left\{at \int_{\delta=0}^{\infty} (e^{-s\delta} - 1) \frac{e^{-\beta\delta}}{\delta} d\delta\right\} \quad (3)$$

$$= \exp\left\{t \int_{\delta=0}^{\infty} (e^{-s\delta} - 1) [-dQ(\delta)]\right\}$$

정상 감마과정 모델의 Lévy 값은 $q(\delta) = a\delta^{-1}e^{-\beta\delta}$ 이며 $\int_{\delta=0}^{\infty} q(\delta) = \infty$ 이므로 무한대의 값으로 단위 시간당 임의의 크기를 갖는 도약의 개수에 대한 기댓값인 도약 강도는 무한대의 값이다.

식 (4)는 도약의 크기가 형상모수 $v > 0$ 와 척도모수 $\beta > 0$ 의 감마분포를 따르며 도약의 강도가 $\mu = a\Gamma(v)/\beta^v$ 인 복합 푸아송과정 모델의 라플라스-스틸체스 변환 결과이다. 식 (4)에서 v 가 0으로 근접할수록 형상함수 at 와 척도모수 β 를 가지는 정상 감마과정 모델의 라플라스-스틸체스 변환인 식 (3)에 근접한다.

$$E(e^{-sX(t)}) \quad (4)$$

$$= \exp\left\{at \frac{\Gamma(v)}{\beta^v} \int_{\delta=0}^{\infty} (e^{-s\delta} - 1) \frac{\beta^v \delta^{v-1}}{\Gamma(v)} e^{-\beta\delta} d\delta\right\}$$

감마과정 모델은 복합 푸아송과정 모델의 극한에 해당하며 유한시간 간격내에서 무한개의 도약을 가진다. 따라서 피로균열 진전거동과 같이 점진적이며 연속적인 손상을 입는 열화현상의 모델링에 적합하다. 감마과정 모델은 Fig. 2에서 열화 경로 p_5 가 임의의 유한시간 내에서 무한히 작은 시간간격으로 무한개의 도약이 있는 열화과정 모델이라고 이해할 수 있다. 이산 시간구간에서 관측된 열화량은 이산적으로 발생하는 쇼크에 의한 손상의 강도와 크기로 표현하는 것 보다 연속적인 열화 증분의 누적으로 보는 것이 합당하다. 피로균열이 실제로는 점진적, 연속적으로 진전되므로 복합 푸아송과정 모델보다는 감마과정 모델이 재료의 피로균열 진전거동이 가지고 있는 물리적 의미를 적절하게 표현한다고 판단된다.

감마과정 모델을 적용하기 위해서는 형상모수

와 척도모수를 예측하여야 한다. 일반적으로 최대우도추정법(maximum likelihood estimation, MLE)을 적용하여 확률모수를 예측하지만 van Noortwijk과 Pandey⁽²⁴⁾은 식 (5)와 식 (6)으로 형상모수의 c 와 척도모수 β 를 추정하는 모멘트법(moment method)을 제시하였으며 최대우도추정법보다 계산이 쉽고 추정값도 정확하다. 형상모수의 지수인 b 은 경험적으로 설정한다.

$$\frac{\hat{c}}{\hat{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{x_n}{t_n^b} = \bar{\delta} \quad (5)$$

$$\frac{x_n}{\hat{\beta}} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2}{\left[\sum_{i=1}^n w_i \right]^2} \right) = \sum_{i=1}^n (\delta_i - \bar{\delta} w_i)^2 \quad (6)$$

여기서 $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ 이며 $w_i = t_i^b - t_{i-1}^b$ 이다. n 은 전체 자료의 수, x_i 는 i 번째 누적 열화량, x_n 은 측정된 최종 누적 열화량이다. δ_i 는 $i-1$ 번째와 i 번째 시간에서 열화량의 증분이며 t_i 는 i 번째 검사시점이다.

3. 감마과정 모델에 의한 피로수명 예측

3.1 피로균열 진전 실험자료

감마과정 모델은 피로균열 진전과정이 점진적, 연속적 그리고 지속적으로 증가하는 물리적 특성을 가지며 재료의 내재적 요인에 의한 샘플링 불확실성과 외재적 요인에 의한 시간 불확실성을 모사할 수 있다. 본 논문은 시간경과에 따른 반복하중의 누적에 대한 피로균열 진전량에 감마과정 모델을 적용하여 피로균열 진전과정을 확률분포의 변화로 설명하였다.

본 논문에서 감마과정 모델의 적용 예를 보이기 위하여 Fig. 1과 같이 Lu와 Meeker가 Bogdanoff와 Kozin의 저서에서 얻은 피로균열 진전거동 실험 자료를 활용하였다. 선행된 연구에 따르면 시험편의 두께와 형상에 따라 피로균열 전파수명의 확률분포에 차이가 있으며^(13,14) 감마과정 모델이 적용되는 시험편의 두께와 형상에 따라 다른 예측결과가 나타날 것이나 본 논문에서 시험편의 두께와 형상은 고려하지 않았다.

Lu와 Meeker는 논문에서 임계 균열크기(critical crack size)로서 1.6 in.를 초과할 때 고장으로 정의하였다. 초기 균열은 0.9 in.로 0.12×10^6 사이클까지 실험하였으며 균열 진전량은 21개의 시료에 대하여 10^4 사이클마다 측정하였다.⁽⁸⁾ 일반적으로 고장(failure)은 구조적 고장과 상태 고장으로 구분할 수 있는데 구조적 고장은 요구된 기능을 발휘하지 못하는 경우를 의미하며 상태고장은 고유물성이나 특성이 특정수준 이하로 저하되는 경우이다.⁽²⁵⁾ 감마과정 모델은 열화량의 시간에 따른 증가량을 누적 상태변화량으로 보고 고장 판단 임계수준을 초과할 때 상태고장으로 판단하며 확률분포의 시간에 따른 모수변화로 상태 및 수명 분포를 예측한다. 본 논문에서도 Lu와 Meeker가 정의한 1.6 in.를 상태고장으로 판단할 수 있는 임계 균열크기로 정의하여 감마과정 모델을 적용하였다.

3.2 감마과정 모델에 의한 예측 결과

Fig. 1의 실험 자료에서 0.09×10^6 사이클까지의 데이터에 대하여 Fig. 3과 같이 각 반복 하중수별 균열 진전량의 평균을 취하였다. 2차 회귀식이 임계 균열크기 1.60 in.와 만나는 점의 수평축 값은 평균 피로수명으로 0.13×10^6 사이클이다. 정상 감마과정이라고 가정하였을 때 식 (5)와 식 (6)의 모멘트법을 적용하여 척도모수 β 는 17.3920, 형상모수의 c 값은 81.6227로 추정하였다. Table 1의 평균 식에서 $t = \mu_{X(t)}(\beta/c)$ 이며 초기 균열크기 0.90 in.에서 임계 균열크기 1.60 in.까지의 누적 피로균열 진전량 $\mu_{X(t)}$ 가 0.70 in.일 때 평균 피로수명은 0.15×10^6 사이클이다.

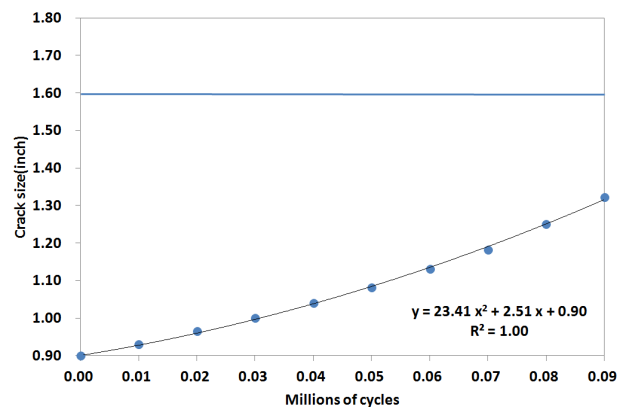


Fig. 3 Crack growth with cumulative cyclic loads

자료를 대표하는 값으로 최빈수, 중위수 그리고 평균이 주로 사용된다. 최빈수(mode)는 가장 큰 빈도를 보이는 값으로 연속확률분포 곡선의 정점에 해당한다. 중위수(median)는 최저값에서 최고값까지 순위를 정렬했을 때 가운데 값으로 누적분포함수 곡선의 50%에 해당한다. 평균(mean)은 확률분포를 절반으로 나누는 값으로 확률밀도함수를 적분하여 1/2이 되는 값이다.

Fig. 4는 피로균열 진전자료에 감마과정 모델을 적용하여 얻은 반복 하중수에 대한 확률밀도함수 곡선, 백분위수 곡선, 피로수명 곡선, 누적분포함수 곡선과 신뢰도 곡선 그리고 각 확률분포 곡선간의 관계를 보여주고 있다.

(a)는 확률밀도함수(PDF) 곡선으로 임계 피로균열 진전량은 0.70 in.이다. 반복 하중이 누적될수록 확률밀도함수 곡선의 폭이 커지며 이는 미래의 불확실성이 커짐을 의미한다. Fig. 1에서 반복 하중이 누적될수록 각 시편 간 열화경로의 변동이 커짐을 확인할 수 있다. 확률밀도함수 곡선의 정점은 최빈수에 해당하며 (b)에서 50% 백분위수에 해당하는 점은 (a)에서 중위수이다. 각 확률밀도함수 곡선은 최빈수<중위수<평균의 관계를 보인다.

(b)는 손상상태와 균열진전에 관한 5%, 50%, 95% 백분위수 곡선이며 Fig. 3의 누적 반복하중에 따른 균열 진전량이 함께 표현되어 있다. 0~100%의 손상상태(damage state)는 각각 Fig. 2에서의 설계여유(ρ) $0.70 \times 10^6 \sim 0$ 사이클에 해당한다. 설계여유를 0사이클에서 0.01×10^6 사이클씩 증가시키면서 각 설계여유에 대하여 반복 하중수(t)를 0사이클에서 0.30×10^6 사이클까지 0.001×10^6 사이클 단위로 증가시켜가며 수명에 관한 누적분포함수($F_T(t)$)를 계산하였다. 각 손상상태에서 $F_T(t)$ 값이 각각 0.05, 0.5, 0.95에 해당하는 t 값이 5%, 50%, 95% 백분위수 값이다. 균열 진전량이 0.70 in.일 때인 손상상태 100%는 (a)에서 피로수명인 $t = 0.153 \times 10^6$ 사이클에서의 확률밀도함수(상태분포) 곡선과 (c)에서 수명분포 곡선에 해당한다. 손상상태 100%에서 50% 백분위수는 (c)의 수명분포 곡선에서 중위수에 해당한다. Fig. 3의 피로 실험으로 얻어진 반복 하중수에 대한 균열 진전량의 평균값과 감마과정 모델로 예측한 50% 백분위수 곡선과의 정량적 비교를 위하여 제곱평균제곱근(root mean square)을 계산한 결과 2.33%로

감마과정 모델이 재료의 실제 거동을 잘 예측하고 있다고 판단된다.

(c)는 수명분포 곡선으로 누적분포함수(CDF)를 미분하여 얻어진다. 곡선의 정점은 최빈값으로 0.150×10^6 사이클이다. 각 대푯값은 최빈수<중위수<평균의 관계를 보이거나 (a)의 확률밀도함수 곡선과 달리 값의 차이는 매우 작다. Table 1의 평균 식으로 계산한 수명과 (d)의 신뢰도 곡선에서 중위수로서의 수명은 (c)의 수명분포 곡선에서 최빈값으로서의 수명과 큰 차이가 없다.

(d)는 누적분포함수(CDF) 곡선과 신뢰도 곡선이다. 중위수는 신뢰도 50%에 해당하므로 0.153×10^6 사이클이다. 누적분포함수와 신뢰도가 50%에 해당하는 값은 (a)의 손상상태 100%에서의 50% 백분위수와 (c)의 수명분포 곡선에서의 중위수에 해당한다.

3.3 확률분포의 비대칭도

비대칭도(skewness)는 데이터의 분포 형태가 정규분포에 비하여 치우쳐 있는 경향을 나타내는 척도로 양의 값일 때 분포의 꼬리가 오른쪽으로 길게 늘어지는 형상이다. 이때 확률분포의 우측 부분은 매우 큰 값을 가지므로 최빈수<중위수<평균의 관계이다. 따라서 비대칭도가 큰 분포의 집중경향은 평균 대신 중위수를 사용하는 것이 자료의 대표특성 표현에 있어서 적합하다. 일반적으로 비대칭도가 0.5보다 크면 양의 비대칭분포, -0.5보다 작으면 음의 비대칭분포로 간주한다.⁽²⁶⁾

감마과정 모델의 형상모수는 시간에 따라 증가하며 비대칭도는 $s = 2/\sqrt{\lambda(t)}$ 로 표현된다. 시간 t 가 무한대로 증가할 때 비대칭도는 0으로 근접하므로 Fig. 4의 (c)의 수명분포 곡선에서와 같이 최빈수 \approx 중위수 \approx 평균으로 정규분포와 유사한 형상이 된다. 정상 감마과정 모델의 형상모수는 $\lambda(t) = ct$ 이며 형상모수의 c 값이 81.6227일 때 비대칭도는 Fig. 5와 같다. 비대칭도는 초기에 0.5이상의 큰 값을 가지는 양의 비대칭도를 보이므로 최빈수<중위수<평균의 경향이 강하다. 하지만 고장 수준인 $t = 0.15 \times 10^6$ 사이클에서 0.57로 정규분포로 간주되며 고장수준에 근접할수록 최빈수 \approx 중위수 \approx 평균의 경향이 강해진다. Table 2는 Fig. 4의 (a)에서 각 누적 하중반복수별 각 대푯값의 균열 진전량과 확률밀도함수 값으로 이러한 경향을 확인할 수 있다.

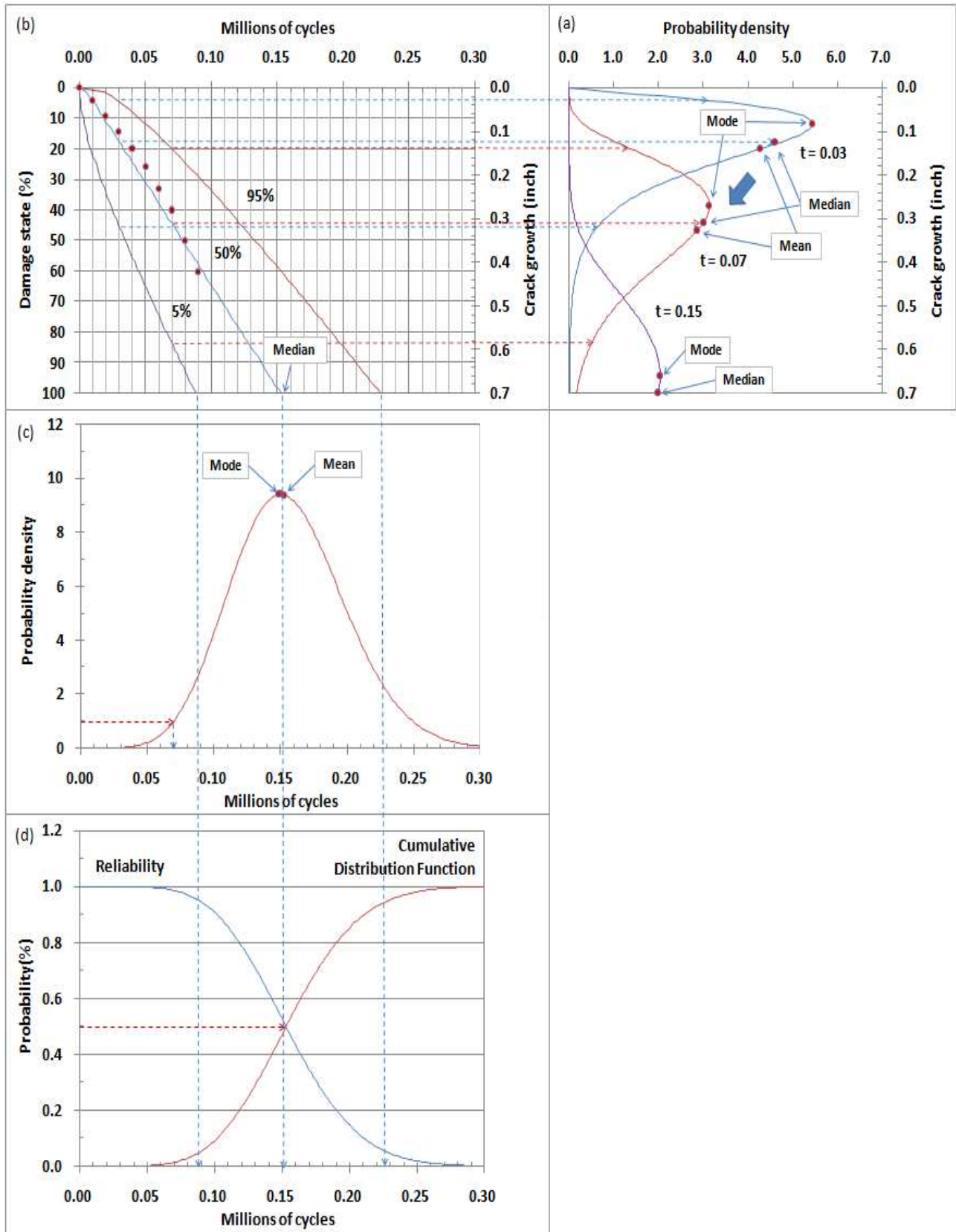


Fig. 4 Comprehensive gamma process model plots (a) PDF curves for crack growth at $t = 0.03 \times 10^6$, $t = 0.07 \times 10^6$ and $t = 0.15 \times 10^6$ cycles; (b) Expected condition including the 5th and 95th percentile; (c) PDF curve at time to failure(Fatigue life curve); (d) CDF and reliability curves

Table 2 Crack growth and PDF of representative values for certain cumulative cyclic loads

Cycles ($\times 10^6$)	Representative value	Crack growth(in.)	PDF
t = 0.030	Mode	0.083	5.444
	Median	0.125	4.607
	Mean	0.141	4.286
t = 0.070	Mode	0.271	3.139
	Median	0.310	3.003
	Mean	0.329	2.860
t = 0.153	Mode	0.661	2.041
	Median	0.700	1.993
	Mean	0.718	1.950

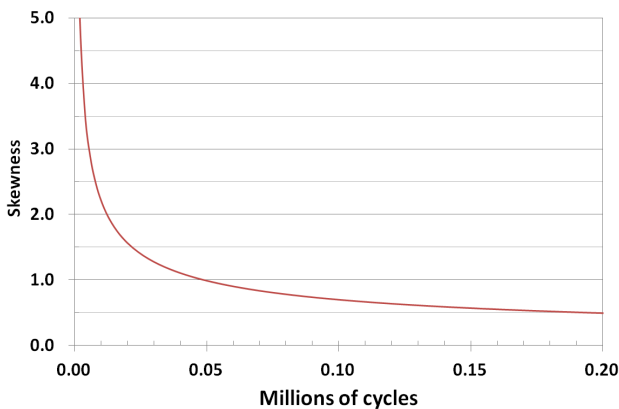


Fig. 5 Skewness with cumulative cyclic loads

비대칭도와 대푯값의 관계로 부터 감마과정 모델을 적용하여 예측한 재료의 피로수명은 Fig. 4의 (d)에서 신뢰도 50%인 0.153×10^6 사이클이라고 판단할 수 있다. 이 값은 Fig. 4의 (b)에서 손상상태 100%에서 50% 백분위수 또는 (c)의 수명곡선에서 중위수에 해당한다.

3.3 최적 교체주기의 설정

정비의 목적은 부품 또는 시스템의 가용성(availability)을 최소의 비용으로 극대화하는데 있다. 부품의 피로파괴에 의하여 발생하는 총 비용이 C_F 이고 예방교체에 소요되는 비용이 C_P 라고

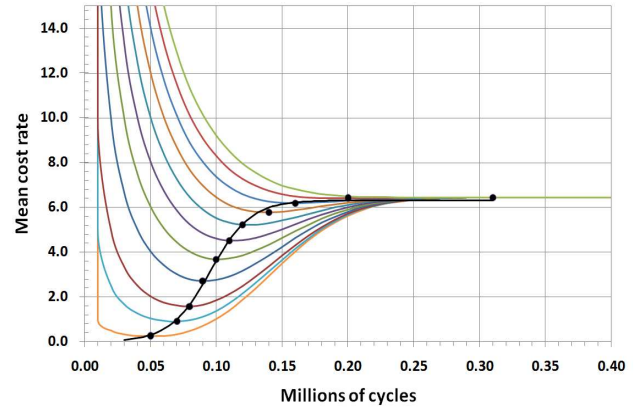


Fig. 6 Expected cost rate per cumulative cyclic loads as a function of replacement age

할 때 최적 교체주기는 다음과 같이 산정한다. 일반적으로 예방교체 비용은 (운영비용 \times 운영시간 + 수리비용 \times 수리시간 + 교체비용)으로 산출하며 정해진 시점에서 상태에 상관없이 또는 그 이전에 고장이 발생한 경우 블록 교체하는 수명기준 보전정책(age-based replacement policy)을 따른다고 할 때 Cox의 재생이론에 따라 식 (7)의 단위시간당 평균 비용률(mean cost rate) $CR(t_0)$ 이 최소가 되는 시점인 t_0 가 최적 교체주기이다.⁽²⁷⁾

$$CR(t_0) = \frac{F_T(t_0)C_F + (1 - F_T(t_0))C_P}{\int_0^{t_0} (1 - F_T(t))dt} \quad (7)$$

누적분포함수 $F_T(t)$ 에 대하여 C_F 가 1.0이고 C_P 가 각각 0.01, 0.03 그리고 0.10~0.90까지 0.10단위로 증가시키면서 평균 비용률 $CR(t_0)$ 을 계산하면 Fig. 6과 같다. 평균 비용률이 최소가 되는 시점(또는 작동 사이클)이 최적 교체시점이며 C_P / C_F 가 증가할수록 최적 교체시점과 그에 따른 최소 평균 비용률도 증가한다. 하지만 C_P / C_F 가 1.0에 가까울수록 최소 평균 비용률의 증가량이 감소한다.

Fig. 7은 C_P / C_F 의 비율과 최적 교체주기의 관계로 회귀분석 결과 3차 다항식으로 표현할 수 있다. 피로수명 $t = 0.153 \times 10^6$ 에서 C_P / C_F 가 약 0.65로 이후로 갈수록 최적 교체주기가 급격히 커진다. 이와 같은 방법으로 감마과정 모델은 재료의 최적 교체주기를 선정하기 위한 정책판단의 기준으로 활용이 가능하다.

Table 3 Percentile lives and percentile life-to-B₅₀ life ratio

Percentile life (cycles)		Ratio of percentile life to B ₅₀ life	
B ₁	0.038 × 10 ⁶	B ₁ / B ₅₀	0.25
B ₅	0.089 × 10 ⁶	B ₅ / B ₅₀	0.58
B ₁₀	0.102 × 10 ⁶	B ₁₀ / B ₅₀	0.67
B ₅₀	0.153 × 10 ⁶	B ₅₀ / B ₅₀	1.00

4. 결 론

본 논문에서 재료의 피로균열 진전거동을 분석하여 수명을 예측하기 위한 모델들의 장단점을 비교하고 감마과정 모델의 적용예를 제시하였다.

피로균열 진전거동은 점진적, 연속적, 지속적으로 증가하는 물리적 특성을 가지고 있으므로 감마과정 모델을 적용하여 재료의 내재적, 외재적 요인에 의한 샘플링 변동성과 시간 변동성을 운용시간 경과에 따라 변화하는 확률모수를 가지는 확률분포로 표현하였다.

감마과정 모델을 Lu와 Meeker가 얻은 피로실험 자료에 적용하여 예측한 각종 확률분포 곡선과 대푯값 그리고 비대칭도가 양의 비대칭도를 보인다 고장수준으로 갈수록 정규분포에 가까워지므로 중위수를 기대수명(평균)으로 간주할 수 있으므로 신뢰도 50%, 손상상태 100%에서 50% 백분위수 또는 수명분포 곡선의 중위수인 0.153 × 10⁶ 사이클이 기대수명이라고 예측하였다. 감마과정 모델은 50% 백분위수 곡선이 2.33%의 오차로 실험자료를 잘 모사하고 있음을 확인하였다.

최적 교체주기는 교체비용에 따라 달라지며 피로수명인 0.153 × 10⁶ 사이클 이후에서 평균 비용률이 급격하게 증가하며 감마과정 모델이 최적 교체주기 선정에 위한 정책판단의 기준으로 활용이 가능함을 알 수 있었다. 백분위 수명에 대한 검토결과 보증수명으로서 B₅₀ 수명보다는 B₅ 수명 또는 B₁₀ 수명 등의 선택적 선정이 바람직함을 확인하였다.

참고문헌
(References)

- (1) Seo, C.M., 2011, *Fatigue and Fracture Mechanics*, Wonchang, Incheon, pp. 1~16.
- (2) Shim, D.S. and Kim, J.K., 1998, "A stochastic Analysis on Variation of Fatigue Crack Propagation due to Thickness Effect," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 22, No. 8, pp. 1523~1532.
- (3) Tanaka, K., Hoshide, T. and Nakata, M., 1983, "Elastic-Plastic Crack Propagation Under High Cyclic Stresses," *ASTM STP 803*, p.707.
- (4) Lados, D.A. and Apelian, D., 2006, "The Effect of Residual Stress on the Fatigue Crack Growth

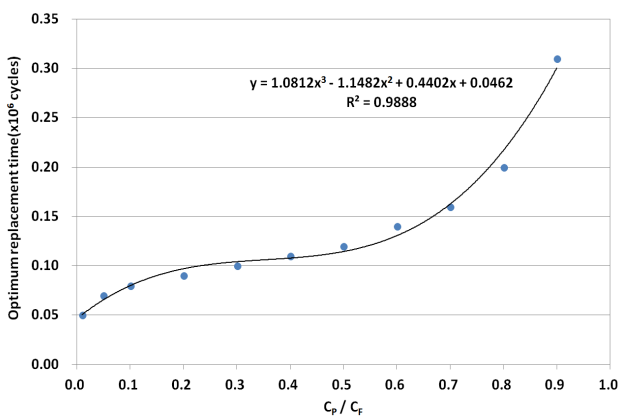


Fig. 7 Optimum replacement time with C_p/C_f

3.4 백분위 수명

전체의 100p%가 고장나는 시점인 백분위 수명 B_{100p}(0 ≤ p ≤ 1)이 보증수명 선정에 사용된다. 일반적으로 항공부품은 B_{0.1} 또는 B₁ 수명, 기계부품은 B₅ 또는 B₁₀ 수명을 보증수명으로 선정한다. Fig. 4의 (c)에서 수명분포 곡선의 중위수는 평균과 유사하므로 B₅₀ 수명이 중위수임에도 불구하고 기대수명(평균)으로 볼 수 있다. Table 3은 각 백분위 수명의 B₅₀ 수명에 대한 비율이다.

백분위 수명의 선정에 Fig. 6의 최적 교체주기가 고려될 수 있다. 만일 C_F가 1.0이고 C_P가 0.2 일 때 최적 교체주기는 0.089 × 10⁹ 사이클로 B₅ 수명에 해당하며, C_F가 1.0이고 C_P가 0.70일 때 최적 교체주기는 0.157 × 10⁹ 사이클로 B₅₀ 수명인 0.153 × 10⁹ 사이클에 근접한 값이다. Fig. 6에서 C_P/C_F가 0.65 이상일 때 예방교체로 인한 비용측면에서의 이득이 거의 없으므로 적어도 0.15 × 10⁶ 사이클 이전에 예방교체 하여야 한다. 따라서 보증수명으로 B₅₀ 수명 보다는 B₅ 또는 B₁₀ 수명 등을 선택적으로 선정하는 것이 바람직하다.

- Behavior of Al-Si-Mg Cast Alloys-Mechanisms and Corrective Mathematical Models,” *Metallurgical and Materials Transactions A*, Vol. 37A, pp.133~145.
- (5) Makhlof, K. and Jones, J.W., 1993, “Effects of Temperature and Frequency on Fatigue Crack Growth in 18% Cr Ferritic Stainless Steel,” *Int. J. Fatigue*, Vol. 15, No. 3, pp.163~171.
- (6) Bradshaw, F.J. and Wheeler, C., 1969, “The Influence of Gaseous Environment and Fatigue Frequency on the Growth of Fatigue Cracks in some Aluminum Alloys,” *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 5, No. 4, 255~268.
- (7) Brotzu, A., Cavallini, A., Felli, F. and Marchetti, M., 1998, “Influence of Corrosion on Fatigue Crack Growth Propagation of Aluminium Lithium Alloys,” *Fatigue in the Presence of Corrosion Workshop*, pp.8-1~8-12.
- (8) Lu, C.J. and Meeker, W.Q., 1993, “Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-Failure Distribution,” *Technometrics*, Vol. 35, No. 2, pp. 161~174.
- (9) Bogdanoff, J.L. and Kozin, F., 1985, *Probabilistic Models of Cumulative Damage*, Wiley-Interscience, New York.
- (10) Kim, J.K. and Kim, D.S., 1995, “A Probabilistic Analysis for Fatigue Cumulative Damage and Fatigue Life in CFRP Composites Containing a Circular Hole,” *Tran. of KSME*, Vol. 19, No. 7, pp. 1915~1926.
- (11) Paris, P.C. and Erdogan, F., 1960, “A critical Analysis of Crack Propagation Laws,” *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, pp. 528~534.
- (12) Forman, R.G., Keary, V.E. and Engle, R.M., 1967, “Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic Loaded Structures,” *Journal of Basic Engineering*, Vol. 89, pp. 459~464.
- (13) Kim, S.J., Yoon, S.H., Jeon, C.H. and Kim, I.S., 2000, “A Study on Estimation of the Probability Distribution of Fatigue Crack Growth Life for Steel,” *Journal of Ocean Engineering and Technology*, Vol. 14, No. 4, pp. 73~78.
- (14) Kim, S.J., 2003, “Characteristics of Parameters for the Distribution of Fatigue Crack Growth Lives Under Constant Stress Intensity Factor Control,” *Journal of Ocean Engineering and Technology*, Vol. 17, No. 2, pp. 54~59.
- (15) Yang, J.N., Salivar, G.C. and Annis, Jr., C.G., 1983, “Statistical Modeling of Fatigue Crack Growth in a Nickel-Based Superalloy,” *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 18, No. 2, pp. 257~270.
- (16) Yang, J.N. and Manning, S.D., 1996, “A Simple Second Order Approximation for Stochastic Crack Growth Analysis,” *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 53, No. 5, pp. 677~686.
- (17) Edirisinghe, R., Setunge, S. and Zhang, G., 2011, “Application of Gamma Process for Deterioration Prediction of Buildings from Discrete Condition Data,” *SRI LANKAN Journal of Applied Statistics*, Vo. 12, pp. 13~25.
- (18) Kim, J.K. and Shim, D.S., 1996, “A Stochastic Analysis of Variation in Fatigue Crack Growth of 7075-T6 Al Alloy,” *Tran. of the KSME(A)*, Vol. 20, No. 7, pp. 2159~2166.
- (19) Lee, O.S., 1998, “Fatigue Life Prediction by Statistical Approach Under Constant Amplitude Loading,” *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 1, pp. 67~72.
- (20) Lee, O.S., 2008, *Introduction to Stochastic Process*, 3rd Ed., Kyungmoonsa, Seoul, pp. 41~91.
- (21) van Noortwijk, J.M. and Pandey, M.D., 2005, “Gamma Processes for Time-Dependent Reliability of Structures,” *Proceedings of European Safety and Reliability Conference*, pp. 1457~1464.
- (22) van Noortwijk, J.M., 2009, “A Survey of the Application of Gamma Processes in Maintenance,” *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 94, pp. 2~21.
- (23) van Noortwijk, J.M., Cooke, R.M. and Kok, M., 1995, “A Bayesian Failure Model Based on Isotropic Deterioration,” *European Journal of Operational Research*, Vol. 82, No. 2, pp. 270~282.
- (24) van Noortwijk, J.M. and Pandey, M.D., 2003, “A Stochastic Deterioration Process for Time-Dependent Reliability Analysis,” *Proceedings of the Eleventh IFIP WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural*

- Systems*, pp. 259~265.
- (25) Park, S.H. and Kim, J.H., 2013, "The Stockpile Reliability of Propelling Charge for Performance and Storage Safety Using Stochastic Process," *J. Korean Soc. Qual. Manag.*, Vol. 4, No. 1, pp. 135~148.
- (26) Antonisamy, B., Christopher, S. and Samuel, P.P., 2010, *Biostatistics: Principles and Practice*, Tata McGraw Hill, New Delhi.
- (27) Pandey, M.D., Yuan, X.-X. and van Noortwijk J.M., 2009, "The Influence of Temporal Uncertainty of Deterioration on Life-Cycle Management of Structures," *Structure and Infrastructure Engineering*, Vol. 5, No. 2, pp. 145~156.