

<학술논문>

DOI <http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2014.38.11.1207>

ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)

원주방향 부분 관통 균열이 존재하는 직관에 인장하중과 열하중의 복합하중이 가해지는 경우의 균열 선단 응력장[§]

제진호* · 김동준* · 김윤재*[†]

* 고려대학교 기계공학부

Crack-tip Stress Field of Fully Circumferential Surface Cracked Pipe Under Combined Tension and Thermal Loads

Jin Ho Je*, Dong Jun Kim* and Yun Jae Kim*[†]

* Dept. of Mechanical Engineering, Korea Univ.

(Received February 21, 2014 ; Revised July 29, 2014 ; Accepted August 14, 2014)

Key Words: Crack-Tip(균열 선단), Constraint Effect(구속효과), Q-Stress(Q-응력), FE Analysis(유한 요소 해석), Pipe(배관), Combined Loads(복합하중)

초록: 균열이 존재하는 구조물의 균열 선단에서 과도한 소성 상태에 도달하게 되면 파괴역학 매개변수에 의하여 예측되는 균열 선단의 응력장이 실제와는 매우 다르게 나타난다. 구조물의 크기와 형상 그리고 하중의 형태에 따라 균열 선단의 응력장이 유일하지 않다. 이는 균열 선단의 구속 효과가 단일 매개변수 파괴역학으로 표현될 수 없기 때문이다. 따라서 전통적으로 사용되었던 K, J를 이용한 단일 매개변수 파괴역학을 보완하기 위하여 다양한 시도가 있었고, 대표적으로 Q-응력이 있다. 본 논문에서는 Q-응력을 이용하여 원주방향으로 완전히 발달한 표면 균열이 있을 경우의 균열 선단의 구속 효과를 확인하였다. 고려된 하중은 일차하중으로 축 방향 인장하중과 반경방향 열구배에 의한 이차하중의 복합하중이다. 이차하중이 일차하중보다 구속효과가 더 심하며 기계하중보다 열하중이 뒤에 가해지는 열충격조건에서 구속효과가 더 심하게 나타남을 확인하였다.

Abstract: Under excessive plasticity, the fracture toughness of a material depends on its size and geometry. Under fully yielded conditions, the stresses in a material near its crack tip are not unique but rather depend on the geometry. Therefore, the single-parameter J-approach is limited to a high-constraint crack geometry. The JQ theory has been proposed for establishing the crack geometry constraints. This approach assumes that the crack-tip fields have two degrees of freedom. In this study, the crack-tip stress field of a fully circumferential surface-cracked pipe under combined loads is investigated on the basis of the JQ theory by using finite element analysis. The combined loads are a tensile axial force and the thermal gradient in the radial direction. Q-stresses of the crack geometry and its loading state are used to determine the constraint effects. The constraint effects of secondary loading are found to be greater than those of primary loading. Therefore, thermal shock is believed to be the most severe loading condition of constraint effects.

- 기호설명 -

J : J-적분
 Q : Q-응력
 a : 균열길이

r : 직관의 반지름
 t : 직관의 두께
 E : 탄성계수
 ϵ_e : 탄성 변형률
 ϵ_p : 소성 변형률
 σ : 응력
 σ_0 : 항복 응력
 α : Ramberg-Osgood 상수

§ 이 논문은 대한기계학회 2013년도 학술대회(2013. 12. 18.-20., 강원랜드) 발표논문임.

† Corresponding Author, kimy0308@korea.ac.kr

© 2014 The Korean Society of Mechanical Engineers

σ_{HRR}	: HRR 응력장
n	: 소성 경화 지수
L_r	: 일차하중의 상대적 크기
β	: 이차하중의 상대적 크기
K^s	: 이차하중에 의한 선형파괴역학 매개변수
K^{pr}	: 일차하중에 의한 선형파괴역학 매개변수

1. 서론

균열(Crack)이 발생한 구조물의 구조건전성 평가를 위하여 다양한 방법들이 제안되었고, 제안된 대부분의 방법들은 균열 선단(Crack-tip)을 특징짓게 되는 파괴역학 매개변수(Fracture mechanics parameter, K , J)를 주요한 인자로 사용하였다. 이는 특정 매개변수가 균열 선단을 잘 특징지을 수 있다는 가정을 전제로 하였다. 선형 탄성 파괴역학(Linear elastic fracture mechanics)에서 균열 선단의 소성역(Plastic zone)이 매우 작다고 가정하여 선형 파괴역학 매개변수, K 가 제안되었다. 이에 Irwin,⁽¹⁾ Dugdale,⁽²⁾ Barenblatt⁽³⁾와 Wells⁽⁴⁾에 의하여 균열 선단에서의 항복에 대하여 보정하는 이론이 개발되었으며, 대표적으로 Irwin의 소성영역보정(Effective crack size)과 Dugdale, Barenblatt의 스트립항복 모델(Strip yield model) 등이 있다. 그러나 이러한 방법은 선형 탄성 파괴역학의 단순한 확장에 불과하였으며, 파괴 인성(Fracture toughness)이 매우 커서 소성 변형(Plastic deformation)과 균열면(Crack interfaces)이 벌어지는 경우 균열 선단 부근에서 소성역이 광범위하고 크게 발생하여 K 의 적용은 여전히 불가능 하였다.

Rice⁽⁵⁾는 소성 변형을 비선형 탄성(Nonlinear elastic)으로 가정하여 에너지해방률(Energy release rate)을 도입할 수 있음을 확인하였고 인성이 매우 큰 재료의 균열 선단에서 거동을 특성화하는 변수, J 를 제안하였다. Rice에 의하여 제안된 비선형 에너지 해방률은 선적분(Line integral)으로 표현되었으며, 이를 J -적분이라 정의하였다. Hutchinson,⁽⁶⁾ Rice, Rosengren⁽⁷⁾은 J -적분을 이용하여 균열선단의 응력장(Stress field)을 규명하였으며 이를 HRR 응력장이라 명명하였다. HRR 응력장에 따른 균열선단에서의 응력은 다음의 식 (1)에 따라 나타내어진다.

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = \left(\frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (1)$$

여기서 r 과 θ 는 극좌표계(Polar coordinate)로 표현되는 균열 선단으로부터의 거리, E 는 탄성 계수(Elastic modulus), σ_0 는 항복강도(Yield strength), n 는 소성경화지수(Plasticity hardening exponent), α 는 Ramberg-Osgood 상수이다. 이러한 J 를 이용하여 높은 J 는 벽개파괴(Cleavage fracture)를 유도하며, 낮은 J 는 소성붕괴(Plastic collapse)를 유도한다고 알려져 있다.

그러나 여전히 J 등의 단일 매개 변수를 사용하여서는 과도한 소성에서는 적용에 어려움이 있었으며, 구조물의 크기와 기하학적인 형상에 오는 차이를 해결할 수 없었다. McClintock⁽⁸⁾은 비경화성 재료(Non-hardening material)에 한하여 슬립 라인(Slip line) 이론을 적용하여 여러 형상에 대하여 응력을 산출하였다. 결과적으로 완전 항복조건(Fully yielding condition)하에 균열선단에서의 응력은 J 등에 의하여 규정지어지는 데로 일정하지 않으며, 기하학적인 형상에 의존하여 파괴역학 매개변수가 균열 선단을 특징짓기 어려운 경우가 있음을 확인하였다.

2. 2-매개변수 파괴역학

정확하고 균일한 파괴역학 매개변수의 산출은 소형 시편에서 실제 거대 구조물의 파괴 거동을 예측하기 위해 매우 중요한 일이다. 그러나 실제로는 시편과 구조물의 크기와 기하학적인 형상 차이에서 발생하는 균열선단에서의 응력장 차이 때문에 앞서 기술된 J 로는 균열 선단 부근의 삼축응력(Triaxial stress)을 제대로 고려할 수가 없다.

균열 선단에서의 삼축응력을 제대로 고려하기 위하여 더 정확한 접근법이 제기되었다. Williams⁽⁹⁾는 수정 경계층 이론을 적용하여 선형 탄성 파괴역학에서 T -응력을 제시하였으며, 음의 T -응력은 상대적으로 소성영역이 더 커져서 구속의 소실을 의미하며, 양의 T -응력은 상대적으로 더 큰 구속 상태를 의미한다. 그러나 수정 경계층 이론은 선형 탄성 파괴역학 매개변수를 기반으로 유도되었기 때문에 선형 탄성 파괴역학의 한계점인 소성역이 증가했을 때, 적용에 어려움이 있다.

탄소성 파괴역학(Elastic-plastic fracture mechanics)에서는 O'dowd와 Shih^(10,11)가 제시한 Q -응력을 이용하여 구속 효과를 정의할 수 있다. Q -응력은 다음 식 (2)처럼 정의되며, HRR 응력장과 실제

균열 선단에서의 응력장과의 차이로 나타내어진다.

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{ij})_{HRR} + (\sigma_{ij})_{Diff} \quad (2a)$$

$$(\sigma_{yy})_{Diff} \approx (\sigma_{xx})_{Diff} \gg (\sigma_{xy})_{Diff} \quad \text{for } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \quad (2b)$$

$$\sigma_{ij} \approx (\sigma_{ij})_{HRR} + Q\sigma_0\delta_{ij} \quad \left(|\theta| \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (2c)$$

$$Q \equiv \frac{\sigma_{yy} - (\sigma_{yy})_{HRR}}{\sigma_0} \quad \text{at } \theta = 0 \quad \text{and} \quad \frac{r\sigma_0}{J} = 2 \quad (2d)$$

실제 균열 선단의 응력장을 구하기 위하여 주로 유한 요소 해석(Finite element analysis)이 이용된다. 소규모 항복(Small-scale yielding)에서 Q -응력은 0에 근접하며 변형에 따라 음으로 작아진다. 음의 Q -응력은 정수압 응력(Hydrostatic stress)이 HRR 응력장보다 작고, 따라서 균열 선단에서의 삼축응력이 작다는 것을 의미한다. Q -응력이 0보다 크거나 같은 경우, 균열 선단의 높은 삼축응력이 HRR 응력장과 잘 맞는 것을 알려준다.

시편 형상에 따른 Q -응력의 변화는 Fig. 1에서 확인할 수 있다. SENB(Single Edge Notched Bending)의 경우 CCT(Center Cracked Tension)와 비교하였을 때, SENB의 경우 매우 큰 변형에까지 Q -응력이 0에 근접하지만, CCT의 경우 비교적 작은 변형에서도 Q -응력이 음의 방향으로 감소함을 확인할 수 있다. 음의 방향으로 작은 Q -응력은 높은 차수(High-order term)의 응력들이 HRR 응력장과는 달리 무시될 수 없음을 의미한다.

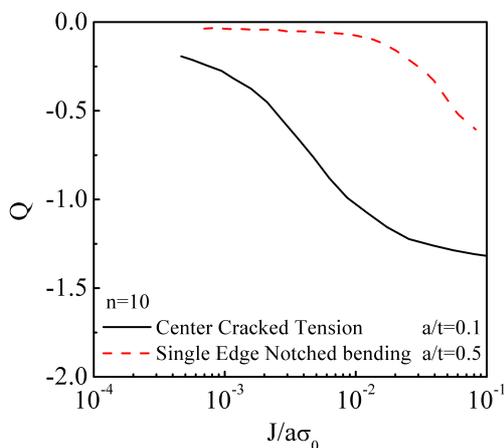
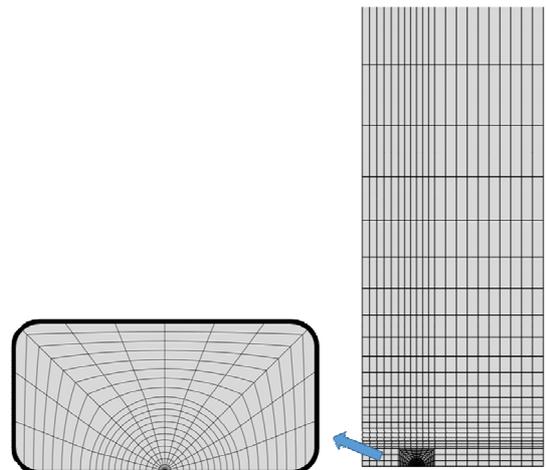
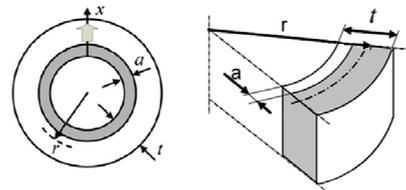


Fig. 1 Q-stress depending on specimen and loading

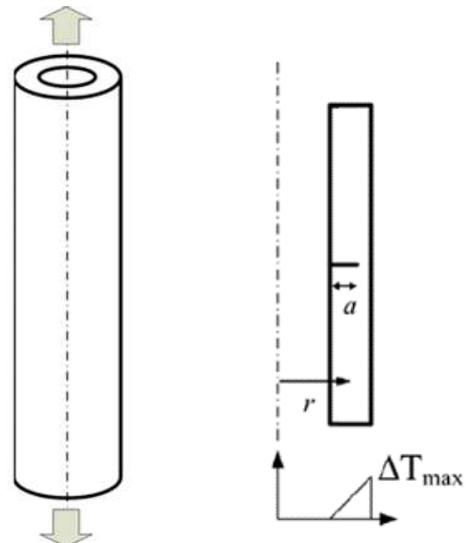
위와 같은 기존의 연구들에서 일차하중이 가해질 때 기하학적인 형상 차이에 의한 균열 선단 응력장에 대하여 Q -응력을 이용하여 정량적인 분석이 이루어졌다. 국내외 주요 플랜트 설비에서 사용되는 배관의 경우 일차하중만큼 열하중에 의한 이차하중도 동시에 가해지고 있다. 일차하중과 이차하중에 대하여 구조물의 거동이 다르기



(a) A typical finite element mesh



(b) Geometry of cracked pipe



(c) Considering loading type

Fig. 2 Mesh, geometry and loading of cracked pipe

때문에 이차하중이 가해질 때 균열 선단의 응력장 및 구속 상태에 대하여 연구가 많이 필요하며, 복합하중의 특성상 하중이 가해지는 순서에 따라서도 균열선단의 응력장이 어떻게 변하는지 확인해 보아야 할 필요성이 있다.

본 논문에서는 2차원 유한요소 해석을 통하여 인장하중과 온도구배가 가해질 경우의 Q -응력을 구하였다. 해석 대상은 원주방향으로 완전히 발달한 표면 균열이 존재하는 직관이다. 인장하중과 온도 구배에 따른 Q -응력의 차이와 하중 순서에 따른 Q -응력의 변화를 정량적으로 분석하여 다양한 일, 이차 복합하중(Combined loads)이 가해질 때의 균열 선단에서의 구속 상태를 확인하여 보았다.

3. 유한 요소 해석 모델

3.1 형상

상용소프트웨어인 ABAQUS v6.13⁽¹²⁾을 사용하여 유한요소해석을 수행하였다. Fig. 2(a)는 원주방향 균열(Circumferential direction axisymmetric internal crack)이 발생한 직관의 유한요소 모델이다. 기하학적 대칭 조건을 이용하여 1/2모델을 사용하였으며 축 방향 대칭 요소인 CAX8 요소를 사용하였다. 직관의 직경과 두께의 비(r/t)는 5의 비교적 두꺼운 경우를 가정하였다. 직관의 두께는 25mm를 가정하였으며, 직관의 길이와 반경의 비는 16으로 충분히 길도록 하였다. 직관에 존재하는 균열의 길이는 a 이고, a/t 은 0.1, 0.3에 대하여 유한요소 해석을 수행하였다. 균열선단은 쉐기 요소(Wedge element)를 사용하여 묘사하였으며, 자세한 요소망(Mesh) 형상은 Fig. 2(a)에 나타나 있다. 균열선단 부근의 조밀함이나 요소의 크기가 응력장에 영향을 미칠 수 있으므로 충분히 조밀한 요소망을 사용하였다. 평균적으로 200,000개의 요소가 사용되었으며, 균열 선단 부근에 요소망을 더 촘촘하게 배치하였다. 소변형(Small deformation) 조건을 사용하여 해석을 수행하였다. 본 연구에 사용된 요소망의 품질을 확인하기 위하여 기존에 수행되었던 다른 연구의 응력장 해석 결과와 비교하여 보았다. Fig. 3은 Double-edge cracked tension (DE(T)) plates에 대한 균열선단 부근의 평면 응력(Plane stress), 평면 변형률(Plane strain)조건에 따른 응력장 해석 결과이다.⁽¹³⁾ 참고 문헌의 결과와 본 연구에 사용된 요소망의 결과

가 매우 잘 일치함을 확인할 수 있다.

3.2 하중 및 재료물성

본 연구에 고려된 하중은 기계 하중으로 직관의 양 끝단에 가해지는 인장하중을 고려하였으며, 이차하중으로 반경 방향 구배(Radial direction gradient)를 가지는 열하중을 고려하였다. Fig. 2(c)에 본 연구에서 고려된 하중의 대략적인 개요가 나타나 있다. 여기서, 본 연구에서 가해지는 하중의 크기를 정량화하기 위하여 일차하중의 상대적인 크기인 L_r 을 도입하였다. L_r 은 다음과 같이 정의 된다.

$$L_r = \frac{N}{N_L} \tag{3}$$

여기서, N 은 구조물에 가해지는 일차하중이고, N_L 은 그 구조물의 한계 하중(Limit load)이다. 따라서, L_r 은 한계 하중을 기준으로 가해지는 일차하중의 상대적인 크기를 나타낸다.

β 는 이차하중의 상대적인 크기로 가상의 일차하중이 구조물에 가해진다고 가정하여 일차하중과의 크기의 비로 나타내었다. 이 때 일차하중과 이차하중의 크기의 비를 산출하기 위해서 선형 파괴역학 매개변수를 이용하였다. β 는 다음 식과 같이 일차하중에 의한 파괴역학 매개변수(K^s)와 이차 응력에 의한 파괴역학 매개변수(K^{pr})의 비와 L_r 로 정의하였다.

$$\beta = \frac{K^s}{L_r K^{pr}} \tag{4}$$

위의 정의에 따르면 해석에 가해준 각각의 하중은 L_r , β 가 각각 0.2, 0.5, 1.0이다.

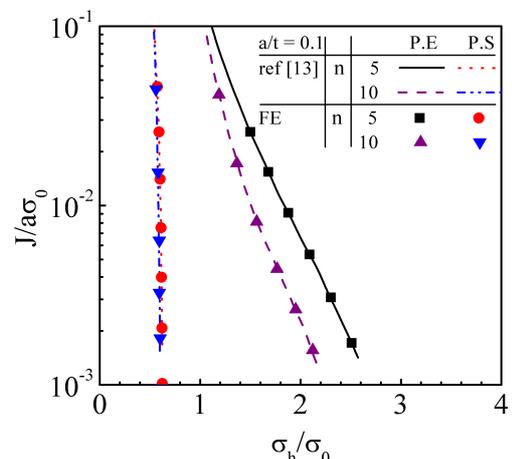


Fig. 3 Verification of finite element method

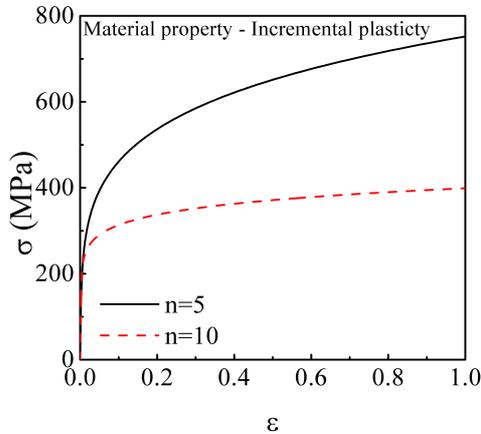
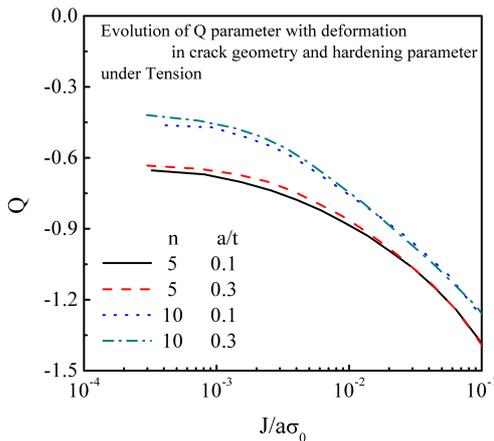
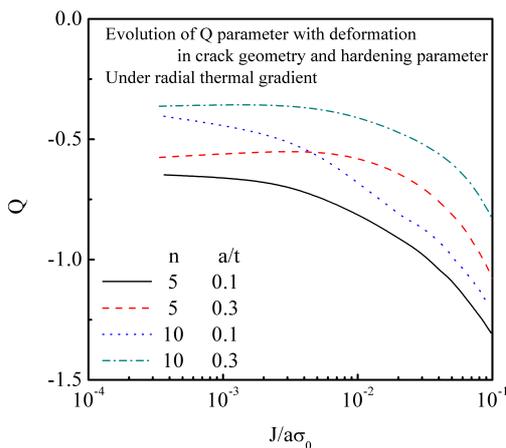


Fig. 4 Material property using Ramberg-Osgood equation



(a) Q-stress with subjected primary load



(b) Q-stress with subjected secondary load

Fig. 5 Q-stress depending on crack geometry and strain-hardening exponent

해석에 사용된 물성치는 탄소성 물성이 멱함수 (Power-law function) 형태인 Ramberg-Osgood 식을

따른다고 가정하였다. Fig. 4에 본 연구에서 사용된 물성이 나타나 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_p \\ &= \frac{\sigma}{E} + \alpha \left(\frac{\sigma_o}{E} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, ε_e 와 ε_p 는 각각 탄성 변형률(Elastic strain)과 소성 변형률(Plastic strain)이다. n 과 α 는 재료상수이다. 탄성계수와 항복응력으로 각각 75GPa과 220MPa을 사용하였다. 소성경화지수, n 은 5, 10을 가정하였다. α 는 $0.002E/\sigma_0$ 를 사용하였다. 이 값들은 알루미늄 합금을 가정하여 임의로 정하였다.

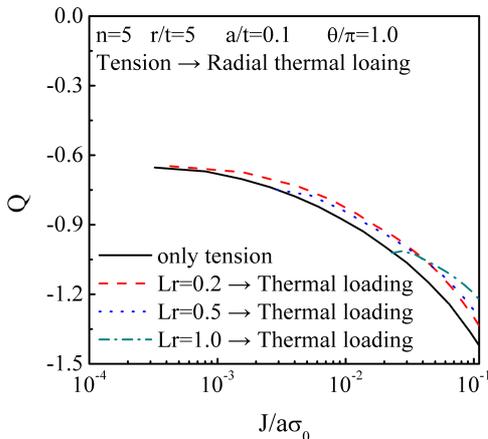
4. Q-응력 분석

본 논문은 균열이 발생한 직관의 구속 효과를 확인하기 위하여 Q-응력을 사용하였다. 복합하중에 따른 구속 효과의 변화를 확인하기에 앞서 해석 형상에 대하여 각각 인장하중과 열하중을 가하여 나타나는 Q-응력을 확인하였다. Fig. 5(a)을 보면 일차하중으로 인장만 가해지는 경우 균열의 길이보다 소성 경화 지수에 대하여 Q-응력이 가장 민감하다. 소성 경화 지수가 클수록 더 큰 구속효과를 보여준다. Fig. 5(b)의 이차하중으로 열하중만이 가해지는 경우는 기계 하중과는 달리 균열 길이에 민감하며, 소성 경화 지수에도 민감하다. 기계 하중은 균열 길이에 따라 Q-응력의 변화가 없는 반면, 열하중이 가해지면 균열길이에 따라 비슷한 경향으로 감소하지만 Q-응력은 소성 경화 지수에 따라서도 큰 차이를 보이게 된다. 전반적으로 일차하중을 받는 경우보다 이차하중을 받는 경우가 더 양으로 큰 Q-응력을 보인다. 이는 이차하중에 의한 균열 선단 응력장의 삼축응력이 일차하중에 의한 삼축응력보다 더 크다는 것을 의미하며, 이차하중이 일차하중에 비해 더 큰 구속조건을 야기하기 때문이다.

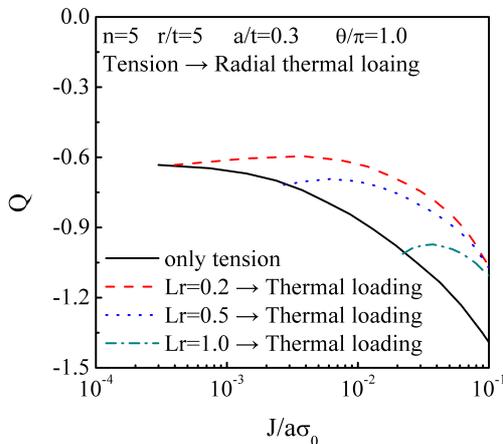
인장하중과 열하중이 동시에 가해지는 경우, Q-응력으로 정량화되는 구속 효과가 어떻게 변하는지 확인하여 보기 위하여 하중 순서에 따른 3가지의 경우를 고려하였다. 일차하중이 가해지고 있을 때 열하중이 가해지는 열 충격(Thermal shock) 조건, 열하중이 가해지고 있을 때 기계하중이 가해지는 지진조건(Seismic condition) 그리고 열하중과 기계하중이 동시에 가해지는 운전개시

(Operation starting)조건을 고려하였다. 소성경화 지수는 5를 고려하였다.

Fig. 6은 첫번째 조건인 열 충격 조건으로 기계 하중이 $L_r=0.2, 0.5, 1.0$ 으로 가해지다가 열하중이 가해지는 조건에 대한 결과를 보여준다. 열하중이 가해지면 기계 하중만 가해지는 경우보다 동일한 J 에서 양으로 더 큰 Q -응력을 보이며, 이는 기계 하중이 가해지는 경우보다 삼축응력 성분이 증가됨을 알려준다. 단일 하중이 가해지는 경우로 미루어 보았을 때 일차하중 뒤에 가해지는 이차하중의 영향으로 구속이 더 심하게 되어 삼축응력이 이차하중에 의하여 더 증가하였다. 열 충격에 의한 하중은 구속 상태가 더 심화된다는 측면에서 보았을 때 구조물의 건전성에 악영향을 끼칠 여지가 높으므로 다른 하중 경우보다 더 주의를 요한다. 균열 길이와 두께 비, a/t 가 클수록 열하중에 의하여 Q -응력의 변화되는 비율이 더 커진다.



(a) $a/t=0.1$

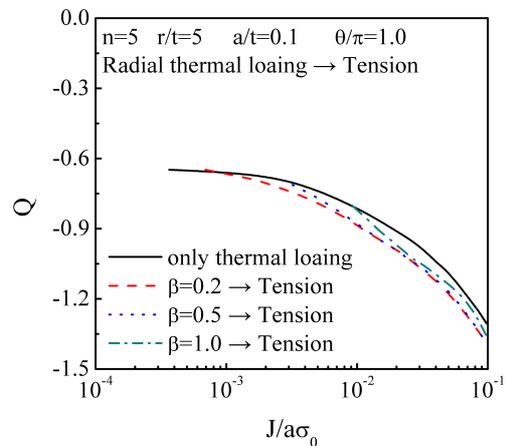


(b) $a/t=0.3$

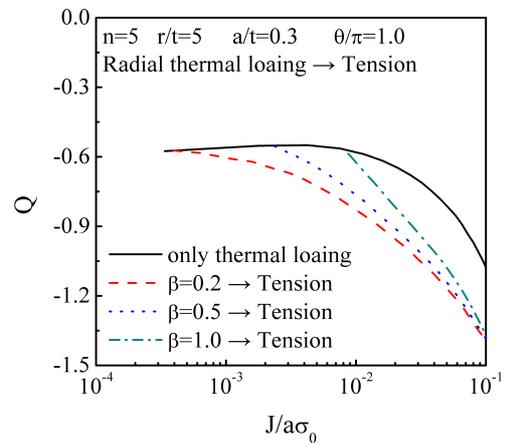
Fig. 6 Variation of Q -stress for thermal shock condition

Fig. 7은 두번째 조건인 지진 조건으로 열하중이 $\beta=0.2, 0.5, 1.0$ 으로 가해지다가 기계 하중이 가해지는 조건에 대한 결과를 보여준다. 기계 하중이 가해지면 열하중만 가해지는 경우보다 동일한 J 에서 음으로 더 작은 Q -응력을 보인다. 이는 첫번째 조건과는 반대로 열하중이 가해지는 경우보다 중간에 기계 하중이 가해짐으로써 삼축응력 성분이 감소함을 알려준다. 이 역시도 일차하중이 뒤에 가해짐으로서 이차하중만 가해지는 경우보다 구속 상태가 완화되었고 그에 따라 삼축응력이 감소하였음을 알 수 있다. 균열 길이와 반경 비, a/t 가 클수록 열하중에 의하여 Q -응력의 변화되는 비율이 더 커진다.

Fig. 8은 세번째 조건인 운전 개시 조건으로 기계 하중과 열하중이 동시에 가해지는 조건에 대한 결과를 보여준다. 기계 하중과 열하중은 각각 $L_r, \beta=1.0$ 이 되도록 가하였다. 열 충격 조건과 지진 조건과의 비교를 위하여 $L_r=1.0$ 에서 열하중이 가해지는 경우와 $\beta=1.0$ 로 가해지다 기계 하중을 받



(a) $a/t=0.1$



(b) $a/t=0.3$

Fig. 7 Variation of Q -stress for seismic condition

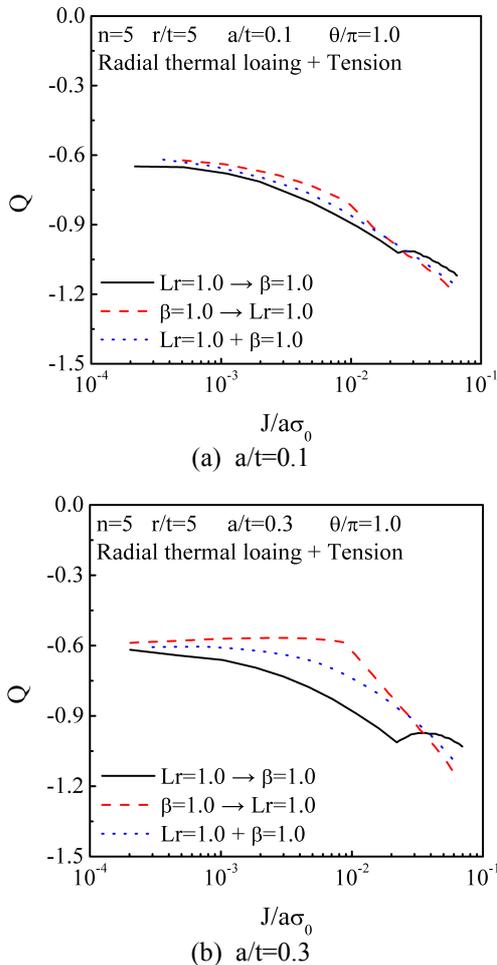


Fig. 8 Variation of Q -stress for operation starting condition

는 경우를 비교하였다. 결과를 보면, 두 하중이 동시에 가해지면 동일한 J 를 가질 때 두 조건의 평균적인 Q -응력을 보여준다. 기계 하중이 먼저 가해지는 경우는 열하중이 먼저 가해지거나 동시에 가해지는 경우에 비하여 더 높은 구속 상태를 보이며 파괴역학 매개변수, J 도 더 큰 값을 보여준다. J 가 열충격 조건에서 더 크게 나타나는 것은 이차하중이 일차하중에 의하여 재분배될 수 있다는 것을 의미한다. 이는 다양한 하중 조건 중에서도 열 충격에 의한 경우가 다른 경우들에 비하여 구조물에 더 위험하게 작용함을 알려준다. Fig. 8 (b)를 보면 균열이 더 클수록 이런 경향은 더욱 더 두드러지게 나타난다.

5. 결론

균열 선단 부근의 응력장은 K , J 로 대변되는 파괴역학 매개변수에 의하여 결정될 수 있다. 그

러나 구조물의 크기나 기하학적인 형상에서 기인하는 차이로 인해 K , J 로 대변되는 전통적인 응력장은 실제 적용에 어려움이 존재한다. 본 연구에서는 고온 구조물에서 발생할 수 있는 여러 가지 조건에서의 균열 선단 응력장을 파악하기 위하여 O'dowd 와 Shih가 제시한 Q -응력을 이용하여 구속 효과를 분석하여 보았다.

기계 하중이 가해지는 경우 소성 경화 지수의 영향이 가장 컸던 반면에 열하중이 가해지는 경우 소성 경화 지수만큼 균열 길이의 영향도 매우 컸다. 또한 복합하중이 가해지는 구조물의 균열 선단에서의 응력장은 하중이 가해지는 조건, 순서에 따라 다른 응력장을 보임도 확인할 수 있었다. 본 연구의 결과를 통하여 동일한 크기의 하중이 가해진다면 기계 하중이 먼저 가해지는 조건이 더 큰 삼축응력을 보이고 파괴역학 매개변수, J 도 더 크게 나타남을 알 수 있었다. 구속 효과는 열하중이 가해질 때 더 크게 나타나므로 열 충격과 같은 열하중이 기계하중 뒤에 가해지는 경우는 기기 건전성에 더 취약함을 확인할 수 있었다.

후기

이 논문은 2014년도 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구입니다. (NRF-2013M2B2A9A03051295, NRF-2007-0056094)

참고문헌 (References)

- (1) Irwin, G. R., 1961, "Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness," *Sagamore Research Conference Proceeding*, Vol.4, pp. 63~78.
- (2) Dugdale, D. S., 1960, "Yielding in Steel Sheets Containing Slits," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, pp.100~104.
- (3) Barenblatt, G. I., 1962, "The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture," *Advance in Applied Mechanics*, Vol. 7, pp. 55~129.
- (4) Wells, A. A., 1961, "Unstable Crack Propagation in Metal: cleavage and Fracture," *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*, Vol. 1, p. 84.
- (5) Rice, J. R., 1968, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration

- by Notches and Cracks,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 379~386.
- (6) Hutchinson, J. W., 1968, “singular Behavior at End of a Tensile Crack Tip in a Hardening Material,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 13~31.
- (7) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., 1968, “Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material,” *Journal of the mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 1~12.
- (8) McClintock, F. A., 1971, “Plasticity Aspects of Fracture,” *Fracture: An Advanced Treatise*, Vol. 3, pp. 47~225.
- (9) Williams, M. L., 1957, “On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 109~114.
- (10) O’Dowd, N. P. and Shih, C. F., 1991, “Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter-I. Structure of Fields,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 39, pp. 898~1015.
- (11) O’Dowd, N. P. and Shih, C. F., 1992, “Family of Crack-Tip Fields Characterized by a Triaxiality Parameter-II. Fracture Applications,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 40, pp.939~963.
- (12) ABAQUS Version 6.13. User’s Manual, 2013, Dassault Systems Simulia Corporation, USA.
- (13) Kim, Y. J., Kim, J. S., Cho, S. M., Kim, Y. J., 2004, “3-D Constraint Effects on J Testing and Crack Tip Constraint in M(T), SE(B), SE(T) and C(T) Specimens: Numerical Study,” *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, pp. 1203~1218.