

## 테이퍼 캔틸레버 원형강관 균열보의 모드특성 추정

이 종 원<sup>1\*</sup> · 김 상 렬<sup>2</sup> · 김 봉 기<sup>2</sup>

<sup>1</sup>남서울대학교 건축공학과, <sup>2</sup>한국기계연구원 기계시스템안전연구본부

### Modal Property Estimation of Tapered Cantilever Pipe-type Cracked Beam

Jong Won Lee<sup>1\*</sup>, Sang Ryul Kim<sup>2</sup> and Bong Ki Kim<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Architectural Engineering, Namseoul Univ., Cheonan, 331-707, Korea

<sup>2</sup>Mechanical Systems Safety Research Division, Korea Institute of Machinery and Materials, Daejeon 305-343, Korea

#### Abstract

Modal properties for tapered cantilever pipe-type beam is identified by applying the boundary conditions to a general solution for tapered beam. A bending stiffness for cracked beam is constructed based on an energy method for tapered cantilever thin-walled pipe, which has a through-the-thickness crack, subjected to bending. Then the natural frequencies and mode shapes of a tapered cantilever thin-walled cracked pipe are identified. It can be found that the phenomenon of the bending stiffness distribution along the beam length of the cracked beam is quite reasonable, the natural frequencies are decreased as the crack sizes are increased, and the mode shapes are changed due to the crack. This results may be used to the vibration-based crack identification for the tapered cantilever pipe-type tower structures.

**Keywords** : modal property, tapered cantilever beam, bending stiffness, cracked beam

#### 1. 서 론

원형강관 타워 형식 구조물은 풍력발전기, 플랜트, 건축구조물 등 주요 시설물에 널리 이용되고 있으며, 길이 방향으로 구조특성이 분포되어 있는 테이퍼 캔틸레버 보의 형태가 많다. 이러한 타워 구조물이 대형화될수록 구조적 안전성 확보를 위한 건전성 모니터링 및 결함탐지 기술개발이 요구되고 있다. 한편, 균열은 원형강관 타워 구조물에서 가장 대표적인 손상형태 중 하나이며, 본 연구에서 대상으로 하는 원주방향 균열은 원형강관 구조물이 휨을 받거나 외부하중의 간섭을 받을 때 흔히 발생한다. 예를 들어 열교환기의 스테인리스 강관에서 잔류응력과 염화물에 의하여 원주방향 균열이 발생하였고(Franco, 1986), 오스테나이트 강으로 제작된 파이프의 내부 표면에서 반복 열응력에 의한 원주방향 균열이 관찰되었으며(Kemppainen *et al.*, 2003), 송유관의

취성파괴가 발생하여 디젤유가 방출된 사례가 있는데, 원인은 송유관 파이프 재료의 낮은 인성으로 인한 원주방향 균열로 추정되었다(National Transportation Safety Board, 2001).

진동기반 균열탐지기법을 이용하면 구조물이 속한 시스템의 운용 중단없이 사용 중 계속되는 진동 데이터를 이용하여 균열을 판정할 수 있다. 진동기반 균열탐지기법은 일반적으로 균열로 인한 구조물의 모드특성 변화를 활용하며, 균열위치와 크기를 추정하기 위하여 모델기반 기법을 적용하기 위해서는 구조물의 고유주파수, 모드형상 등 모드특성을 수치적으로 구해야 한다. 즉, 건전상태의 테이퍼 타워 구조물에 대한 모드특성을 구한 후, 균열이 고려된 구조물에 대한 휨강성 등을 적용하여 손상 후 모드특성을 수치적으로 구할 필요가 있다.

단면 변화가 선형인 테이퍼 보의 진동에 대한 미분방정식

\* Corresponding author:

Tel: +82-41-580-2761; E-mail: jwlee@nsu.ac.kr

Received April 14 2014; Revised June 19 2014

Accepted August 22 2014

©2014 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

의 정확해는 Gorman(1975)에서 제시하고 있으며, 이후 여러 가지 조건을 달리하는 테이퍼 보의 진동에 대한 연구가 진행되었다. 즉, 다수의 강성-질량 시스템을 가지는 테이퍼 캔틸레버 보의 고유주파수와 모드형상에 대한 정확해가 제안되었는데(Chen *et al.*, 2002), 인접한 보 간의 힘의 평형 및 변형의 적합조건을 고려하고 운동방정식을 결합하였다. 2개의 테이퍼 보가 결합되고 자유단에 질량이 부가되는 보의 고유주파수에 대한 정확해와 근사해 추정기법이 연구되었는데(Auciello *et al.*, 1998), 정확해는 베셀함수를 이용하여 유도하였고, 근사해는 레일리-리츠 방법을 적용하여 구한 후 두 결과를 비교하였다. 또한, 단면 폭의 변화가 지수함수 형태인 보의 진동에 대한 연구가 진행되었는데(Ece *et al.*, 2007), 보의 지배 방정식을 공간 좌표에서의 상미분방정식으로 변환하고 오일러-베르누이 보 이론을 적용하여 세 경계조건에 대한 고유주파수와 모드형상을 구하였다. 테이퍼 보의 자유단에 질량이 부가되고 타단이 탄성구속이 되며 임의 위치에 대시포트를 가지는 오일러-베르누이 보의 고유주파수를 추정하였는데(Rosa *et al.*, 2010), 탄성구속 부분을 횡방향 변위와 회전을 고려한 요소로 모델링하였다. 한편, 진동기반 균열탐지를 위하여 원형강관 구조물에 대한 균열을 모델링하기 위한 연구가 진행되었다. 즉, 유체를 포함하는 파이프의 균열을 등가 회전스프링 강성으로 모델링하여 균열 파이프의 고유주파수를 추정하였는데(Murigendrappa *et al.*, 2004), 균열진전에 의하여 방출되는 변형에너지가 등가 회전스프링에 저장되는 것으로 가정하여 균열보의 고유주파수를 구하였다. 균열을 회전 스프링으로 모델링한 후, 균열의 크기와 방향에 따른 회전 스프링 강성의 변화를 연구하였는데(Naniwadekar *et al.*, 2008), 일정한 횡방향 하중을 받는 파이프에서 균열발생에 의한 변형에너지의 변화는 균열에 의하여 방출되는 에너지와 같다고 가정한 후 선형탄성 파괴역학이론을 이용하여 회전 스프링 강성을 유도하고 고유주파수를 구하였다. 또한, 유체를 포함하는 파이프의 단일 균열을 탐지하기 위하여, 등가 탄성스프링으로 균열을 모델링하여 고유주파수를 산정하였는데(Dilena *et al.*, 2011), 단순지지된 균열단면 파이프의 경우 균열위치는 균열에 의한 한 쌍의 고유진동수 변화량 비율로 결정할 수 있다고 보고되었다. 레일리 보 요소를 수립하고 균열 위치와 크기에 영향을 주는 3차까지의 고유주파수를 근사화한 후, 계측된 고유주파수와 유전자 알고리즘을 이용하여 파이프 균열의 위치와 크기를 판정하였는데(Wang *et al.*, 2011), 다우비치 레일리-오일러 보 요소와 다우비치 레일리-티모셴코 보 요소를 이용하여 다우비치 웨이블릿의 레일리 보 요소를 유도한 후 이를 이용하여 균열보의 고유주파수를 추정하였다.

본 연구에서는 힘을 받는 테이퍼 원형강관 캔틸레버 보에 발생하는 관통균열을 모델링하여 균열보에 대한 고유주파수를 추정한다. 이를 위하여 Gorman(1975)에 제시되어 있는 테이퍼 보에 대한 미분방정식의 일반해에 캔틸레버 보의 경계조건을 적용하여 모드특성을 구한다. 또한 에너지 방법을 이용하여 테이퍼 원형강관 균열보에 대한 보 길이방향 휨강성을 유도한 후 수치적분을 수행하여 균열보에 대한 고유주파수와 모드형상을 산정한다.

## 2. 테이퍼 캔틸레버 균열보의 모드특성

테이퍼 보의 횡방향 변위를  $w(x,t)$ 라고 정의하면 운동방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있고, 이를 변수 분리하여 식 (2)와 같이 특성방정식을 구할 수 있다. 여기서  $r(x)$ 는  $w(x,t)$ 에서 변수 분리된 공간좌표에서의 횡방향 변위,  $E$ 는 영계수,  $I$ 는 단면이차모멘트,  $A$ 는 단면적,  $\rho$ 는 단위체적 당 질량이다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 r(x)}{dx^2} \right] - \rho A(x) \omega^2 r(x) = 0 \quad (2)$$

Fig. 1에 보이는 바와 같이  $\xi$ 를 원점으로부터 테이퍼 보의 임의 위치까지의 거리로써 테이퍼 삼각형 전체길이( $L_1$ )로 나누는 값으로 설정하면,  $\xi_0$ 는 원점에서 테이퍼 보까지의 거리 비율이 된다. 단면 변화가 선형일 경우, 임의 위치에서의 단면적  $A(\xi)$ 와 단면이차모멘트  $I(\xi)$ 를 식 (3) 및 (4)와 같이 구할 수 있으며 이들을 식 (2)에 대입하면 식 (5)를 구할 수 있다(Gorman, 1975).

$$A(\xi) = A_1 \xi^2 \quad (3)$$

$$I(\xi) = I_1 \xi^4 \quad (4)$$

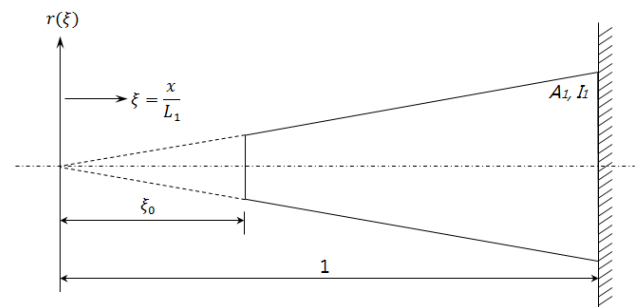


Fig. 1 Non-dimensional tapered beam

$$\frac{1}{\xi^2} \left[ \frac{d^2}{d\xi^2} \xi^4 \frac{d^2 r(\xi)}{d\xi^2} \right] - \beta^4(\xi) = 0 \quad (5)$$

여기서

$$\beta^4 = \frac{\rho A_1 L_1^4 \omega^2}{EI_1} \quad (6)$$

이며,  $r(\xi)$ 는 보의 횡방향 변위이고  $A_1$ 과  $I_1$ 은 각각 고정단 측 단면적 및 단면이차모멘트이다. 식 (5)의 미분방정식 일 반해는 다음 식으로 구할 수 있다(Gorman, 1975).

$$r(\xi) = \xi^{-1} [C_1 J_2(Z) + C_2 Y_2(Z) + C_3 I_2(Z) + C_4 K_2(Z)] \quad (7)$$

여기서  $J_2$  및  $Y_2$ 는 각각 2차 제1종 및 제2종 베셀함수이 며,  $I_2$  및  $K_2$ 는 각각 2차 제1종 및 제2종 변형 베셀함수이다. 한편,  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 는 임의 상수이며  $Z = 2\beta\sqrt{\xi}$ 이다.

타워 구조물은 테이퍼 캔틸레버 보의 형태가 많으며, 이 경우 자유단( $\xi = \xi_0$ )과 고정단( $\xi = 1$ )에서의 경계조건은 각각 식 (8) 및 (9)와 같다.

$$\frac{d^2 r(\xi)}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \xi^4 \frac{d^2 r(\xi)}{d\xi^2} \right) = 0 \quad (8)$$

$$r(\xi) = \frac{dr(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (9)$$

위 경계조건을 식 (7)에 적용하면 상수  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 에 대한 연립방정식이 유도되고, 자명하지 않은 해를 가지기 위해서는 다음과 같이 행렬식은 영이 되어야 한다.

$$\begin{vmatrix} J_4(Z_0) & Y_4(Z_0) & I_4(Z_0) & K_4(Z_0) \\ J_3(Z_0) & Y_3(Z_0) & I_3(Z_0) & -K_3(Z_0) \\ J_2(2\beta) & Y_2(2\beta) & I_2(2\beta) & K_2(2\beta) \\ J_3(2\beta) & Y_3(2\beta) & -I_3(2\beta) & K_3(2\beta) \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

여기서  $Z_0 = 2\beta\sqrt{\xi_0}$ 이고 식 (10)을 만족하는  $\beta$ 를 구할 수 있다.  $J_3$  및  $Y_3$ 는 각각 3차 제1종 및 제2종 베셀함수이 며,  $I_3$  및  $K_3$ 는 각각 3차 제1종 및 제2종 변형 베셀함수이 다. 또한,  $J_4$  및  $Y_4$ 는 각각 4차 제1종 및 제2종 베셀함수이 며,  $I_4$  및  $K_4$ 는 각각 4차 제1종 및 제2종 변형 베셀함수이 다. 편의상  $\beta^* = \beta(1 - \xi_0)$ 라 하면 다음 식으로 테이퍼 캔틸 레버 보의 고유주파수를 구할 수 있다.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\beta^{*2}}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI_1}{\rho A_1}} \quad (11)$$

여기서  $L$ 은 테이퍼 보의 실제 길이이다.

한편, 테이퍼 캔틸레버 보의 모드형상을 구하기 위하여, 식 (10)에 대한 연립방정식에 위에서 구한  $\beta$ 를 대입하여 상 수  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 를 구하면 다음 식과 같이 모드형상을 구할 수 있다.

$$r(\xi) = \xi^{-1} [J_2(Z) + p_9 Y_2(Z) + p_{10} I_2(Z) + p_{11} K_2(Z)] \quad (12)$$

여기서,

$$p_1 = J_4(Z_0) + \frac{K_4(Z_0)}{K_3(Z_0)} J_3(Z_0)$$

$$p_2 = Y_4(Z_0) + \frac{K_4(Z_0)}{K_3(Z_0)} Y_3(Z_0)$$

$$p_3 = I_4(Z_0) + \frac{K_4(Z_0)}{K_3(Z_0)} I_3(Z_0)$$

$$p_4 = J_2(2\beta) - \frac{K_2(2\beta)}{K_3(2\beta)} J_3(2\beta)$$

$$p_5 = Y_2(2\beta) - \frac{K_2(2\beta)}{K_3(2\beta)} Y_3(2\beta)$$

$$p_6 = I_2(2\beta) + \frac{K_2(2\beta)}{K_3(2\beta)} I_3(2\beta)$$

$$p_7 = p_1 - \frac{p_3}{p_6} p_4$$

$$p_8 = p_2 - \frac{p_3}{p_6} p_5$$

$$p_9 = -\frac{p_7}{p_8}$$

$$p_{10} = -\frac{1}{p_3} (p_1 + p_2 p_9)$$

$$p_{11} = -\frac{1}{K_4(Z_0)} [J_4(Z_0) + p_9 Y_4(Z_0) + p_{10} I_4(Z_0)]$$

Fig. 2에 보인 바와 같이 고정단 외측반경 및 두께가 각각 0.15m 및 6mm이고, 자유단 외측반경 및 두께가 각각 0.09m 및 3.6mm이며, 높이가 4m인 원형강관 테이퍼 캔틸

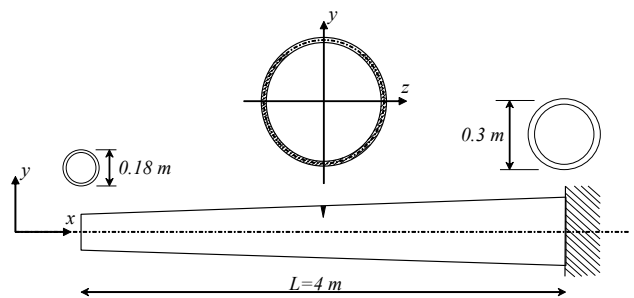
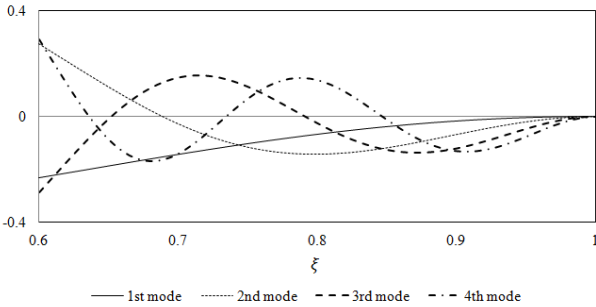


Fig. 2 Example tapered beam

**Table 1** Natural frequencies of the example tapered beam

Mode no.	$\beta$	Natural frequency(Hz)
1	5.1954	22.819
2	11.1942	105.930
3	17.9119	283.032
4	24.7494	518.733



**Fig. 3** Mode shape of the example tapered beam

레버 보의 고유주파수와 모드형상을 식 (11)과 (12)를 이용하여 구하였다. 이 테이퍼 보는 식 (3)과 (4)을 만족하며 Fig. 1에서의  $\xi_0=0.6$ 이고  $L_1=10\text{m}$ ,  $A_1=5.542\text{E-}3\text{m}^2$ ,  $I_1=5.988\text{E-}5\text{m}^4$ 이다. 계산된 고유주파수를  $\beta$ 와 함께 Table 1에 정리하였으며, 모드형상을 Fig. 3에 나타내었는데, norm(노름)으로 노멀라이징하였다. 한편, Fig. 2에는 균열이 발생할 경우의 좌표와 대략적 형상을 함께 나타내었다.

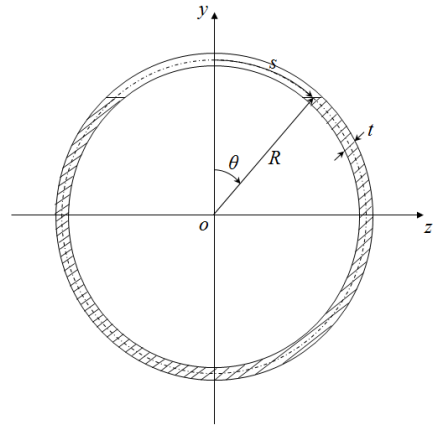
한편, 보에서 일정한 휨모멘트를 받을 때 균열이 진전하면 휨모멘트는 균열의 진전과 구조물의 변형에너지 증가에 기여하며 따라서 최종 변형에너지는 식 (13)과 같다(Yang *et al.*, 2001). 한편, Yang 등(2001)에서는 중실 직사각형 단면에 대하여 에너지 방법을 이용하여 균열보에 대한 휨강성을 유도한 후 단순보 및 양단 고정보에 대한 고유주파수를 추정하였는데, 본 연구에서는 위 참고문헌에서 유도한 과정을 따라 테이퍼 원형강관 균열보에 대한 휨강성을 유도한 후 캔틸레버 보에 대한 모드특성을 추정하였다.

$$U_c = U + E_c \tag{13}$$

여기서  $E_c$ 는 균열진전에 대한 에너지이고  $U$ 는 균열 발생 전 변형에너지이다. 휨모멘트  $M$ 을 받는 비균열보의 변형에너지는 다음 식과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \tag{14}$$

여기서  $I$ 는 비균열보의 단면이차모멘트이며, 균열보의 최



**Fig. 4** Cross section of the cracked pipe

종 변형에너지는 다음 식으로도 나타낼 수 있다.

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{E_c} dx \tag{15}$$

여기서  $E_c$ 는 균열보의 단면이차모멘트이다.

파이프 단면에서 균열이 일정한 휨모멘트를 받으며 Fig. 4에서와 같이 영에서  $\theta$ 까지 진전하였을 때 균열진전에 대한 에너지는 다음과 같다.

$$E_c = \int_0^s J dA = Rt \int_0^\theta J d\theta \tag{16}$$

여기서  $t$ 는 파이프의 두께,  $R$ 은 파이프 외측 반경과 내측 반경의 평균이며  $J$ 는 변형에너지방출율(strain energy release rate)로서 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$J = \frac{(1-\nu)^2}{E} K_I^2 \tag{17}$$

여기서  $\nu$ 는 포아손비이고,  $K_I$ 은 1차 모드 균열에 대한 응력확대계수이다.

이 연구에서는 축방향응력 및 전단응력 등을 무시하고 휨 변형만을 고려하며, 파이프 단면에 대한 응력확대계수는 다음 식으로 나타낼 수 있다(Tada *et al.*, 2000).

$$K_I = \sigma \sqrt{R} \left( \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} G(\theta) \tag{18}$$

여기서,

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2 t}$$

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{t}{R}\right) / \sqrt{12(1-\nu^2)}$$

$$G(\theta) = \sin\theta \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\theta - \cot(1-\theta\cot\theta)}{2\cot\theta + \sqrt{2} \cot\left(\frac{\pi-\theta}{\sqrt{2}}\right)} \right]$$

이고  $G(\theta)$ 는 열린 균열 면적에 대한 형상함수(configuration function)이다.

균열진전에 대한 에너지는 식 (16)과 (17)로부터 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$E_c = D(\theta)M^2 \tag{19}$$

여기서,

$$D(\theta) = \frac{\sqrt{2}(1-\nu^2)iG(\theta)}{\pi^2 ER^2 t \varepsilon}$$

$$iG(\theta) = \int_0^\theta G(\theta)^2 d\theta$$

균열이 발생하면 균열 단면 근방의 응력 및 변형률 분포가 변화하며, 균열 선단 근방에서 응력과 변형률이 집중되고 균열과 멀리 떨어진 위치에서는 공칭값이 되는 것으로 알려져 있다(Christides *et al.*, 1984; Shina *et al.*, 2002). 그러므로 균열로 인한 변형에너지의 증가는 균열 근방에서 집중되는 것으로 가정할 수 있고, 다음 식과 같이 균열보 길이에 따른  $E_c$ 의 분포를 설정할 수 있다(Yang *et al.*, 2001).

$$E_c = \int_0^L \frac{Q(\theta, c)}{1 + \left(\frac{x-c}{k(\theta)\theta}\right)^2} dx \tag{20}$$

여기서  $c$ 는 보의 한 쪽 단에서 균열위치까지의 거리이며, 위에서 설명된 변형에너지의 분포를 식 (20)으로 나타낼 수 있다. 식 (19)와 (20)으로부터  $Q(\theta, c)$ 를 다음 식으로 정의할 수 있다.

$$Q(\theta, c) = \frac{D(\theta)M^2}{k(\theta)\theta j(\theta, c)} \tag{21}$$

여기서,

$$j(\theta, c) = \arctan\left(\frac{L-c}{k(\theta)\theta}\right) + \arctan\left(\frac{c}{k(\theta)\theta}\right)$$

식 (14), (15) 및 (20)을 식 (13)에 대입하면 다음 식이 유도될 수 있다.

$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI_c} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{Q(\theta, c)}{1 + \left(\frac{x-c}{k(\theta)\theta}\right)^2} dx \tag{22}$$

따라서 균열보에 대한 휨강성은 식 (22)로부터 다음 식으로 구할 수 있다. 즉, 휨강성은 보 길이방향 좌표  $x$ , 균열위치  $c$  및 균열크기  $\theta$  등의 함수이다.

$$EI_c(x) = \frac{EI(x)}{1 + \frac{EI(x)R(\theta, c)}{\left\{1 + \left(\frac{x-c}{k(\theta)\theta}\right)^2\right\}}} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \tag{23}$$

여기서,

$$R(\theta, c) = \frac{2D(\theta)}{k(\theta)\theta j(\theta, c)}$$

한편, 균열 단면 위치 ( $x=c$ )에서 단면이차모멘트는 다음과 같다.

$$I_c = Rt[\zeta(R^2 + 2|\bar{z}|^2) + \eta(R^2 + 2|\bar{z}|^2) + R(-4|\bar{z}| + R\cos\zeta)\sin\zeta - R(4|\bar{z}| + R\cos\theta)\sin\theta + R(4|\bar{z}| + R\cos(\eta+\theta))\sin(\eta+\theta)] \tag{24}$$

여기서  $\bar{z}$ 는 도심이며

$$\bar{z} = \frac{-R\sin\theta}{(\pi-\theta)}$$

$$\zeta = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{z}}{R}\right)$$

$$\eta = \pi - \theta - \cos^{-1}\left(\frac{\bar{z}}{R}\right)$$

한편, 비균열 단면과 균열 단면의 휨강성비는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{EI}{EI_c} \approx \frac{\pi R^3 t}{I_c} \tag{25}$$

식 (23)과 (25)로부터  $k(\theta)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$k(\theta) = \frac{2\sqrt{2}R(1-\nu^2)iG(\theta)}{\pi^2 \varepsilon \theta} \left(\frac{I_c}{I-I_c}\right) \tag{26}$$

Fig. 2에 나타난 테이퍼 원형강관 캔틸레버 보에서 균열 위치( $\xi$ )가 0.8일 때( $c/L=0.5$ ) 식 (23)을 이용하여 구한

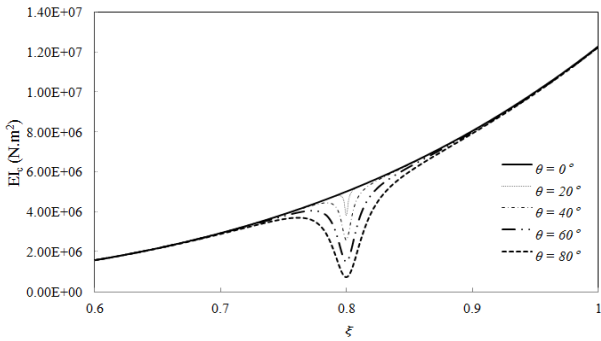


Fig. 5 Variation of the bending stiffness of the example cracked beam

균열보의 휨강성을 Fig. 5에 나타내었다. 즉, 보 길이에 따른 휨강성의 변화를 나타내었는데, 균열이 발생한 단면에서 휨강성이 급격히 감소하고 균열위치에서 멀어질수록 공칭휨강도에 가까워지는 현상을 보인다. 또한 균열크기가 커질수록 휨강성 감소 정도가 커지는 것을 알 수 있다. Fig. 5에 보인 휨강성의 분포는 균열보의 모드특성을 구하기 위한 중요한 결과이고, 중실 직사각형 단면에 대한 기존의 연구결과 (Yang *et al.*, 2001)와 유사한 양상을 보인다.

한편, 식 (2)의 특성방정식을 균열보에 대하여 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI_c(x) \frac{d^2 r(x)}{dx^2} \right] - \rho A(x) \omega_c^2 r(x) = 0 \quad (27)$$

여기서  $\omega_c$ 는 균열보의 고유주파수이다. 캔틸레버 보에 대한 식 (27)의 해를 구하기 위해 갈레르킨법을 사용하였다. 캔틸레버 보에 대한 시도함수(trial function)로 4차항까지만 고려한 다음 식을 이용하였다.

$$r^m = \sum_{i=1}^4 G_1^m r_i \quad (28)$$

여기서  $m$ 은 모드차수이고,  $G_1^m$ 은 고유치해석을 통하여 구할 수 있는 계수이며,  $r_i$ 는 식 (12)를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$r_i(\xi) = \xi^{-1} [J_2(Z_i) + p_9 Y_2(Z_i) + p_{10} I_2(Z_i) + p_{11} K_2(Z_i)] \quad (29)$$

여기서  $Z = 2\beta_i \sqrt{\xi}$ 이다. 식 (27)의 고유치해석을 수행하기 위하여 적분형태의 특성방정식을 구하고(Huh *et al.*,

Table 2 Variation of natural frequency to crack size(Hz)

Mode no.	Crack size, $\theta$ (degree)				
	Uncracked	20	40	60	80
1	22.819	22.797	22.660	22.340	21.818
2	105.930	105.682	104.271	101.341	97.241
3	283.032	282.867	282.266	280.352	276.692
4	518.733	516.335	510.637	500.962	488.642

Table 3 Variation of natural frequency to crack location(Hz)

Mode no.	Crack location, $\xi$			
	Uncracked	0.7	0.8	0.9
1	22.819	22.508	22.340	21.353
2	105.930	103.144	101.341	102.331
3	283.032	269.861	280.352	277.588
4	518.733	505.101	500.962	504.901

2006) 수치적분을 통하여 고유진동수 및 고유벡터를 구하며, 식 (6)을 이용하여 각 모드에 대하여 균열을 고려한  $\beta_i$ 를 적용한다.

Fig. 2에 나타낸 테이퍼 원형강관 캔틸레버 보에서 균열 위치( $\xi$ )가 0.8일 때( $c/L=0.5$ ) 균열크기를 변화시키며 4차까지의 고유주파수를 구하여 Table 2에 정리하였는데, 균열크기가 증가할수록 고유주파수가 감소함을 알 수 있다. 한편, 균열크기가 60°일 때 균열위치( $\xi$ )를 0.7, 0.8 및 0.9로 변화시키며( $c/L=0.25, 0.5$ , 및  $0.75$ ) 구한 고유주파수를 Table 3에 정리하였다. 1차 고유주파수는 균열위치가 고정단에 가까울수록 감소량이 증가하였으나, 2차 이상 고유주파수의 감소량은 균열위치에서의 모달 변위에 영향을 받는 것으로 판단된다.

한편, Fig. 2에 나타낸 테이퍼 원형강관 캔틸레버 보에서 균열위치( $\xi$ )가 0.9( $c/L=0.75$ )이고 균열크기가 60°일 때 모드형상을 균열이 없는 경우와 비교하여 높으로 노멀라이징하여 Fig. 6에 나타내었다. 균열에 의하여 모드형상이 변화하며 특히, 균열위치를 중심으로 모달 변위가 크게 발생함을 알 수 있다.

본 연구에서 제시한 방법을 이용하면 테이퍼 캔틸레버 보에 대한 효과적인 진동기반 균열탐지가 가능할 것으로 판단된다. 즉, 구조물을 몇 개의 부재로 분할한 후, 균열이 포함되는 부재의 강성감소를 이용하여 균열의 대략적인 위치만을 탐지할 수 있는 기법과 달리, 균열발생에 따른 보 길이 방향 휨강성의 변화를 보다 실질적으로 고려하여 균열의 위치와 크기에 따른 구조물의 고유주파수와 모드형상의 변화를 수치적으로 구할 수 있기 때문에, 균열위치와 크기의 구체적 추정이 가능할 것으로 판단된다.

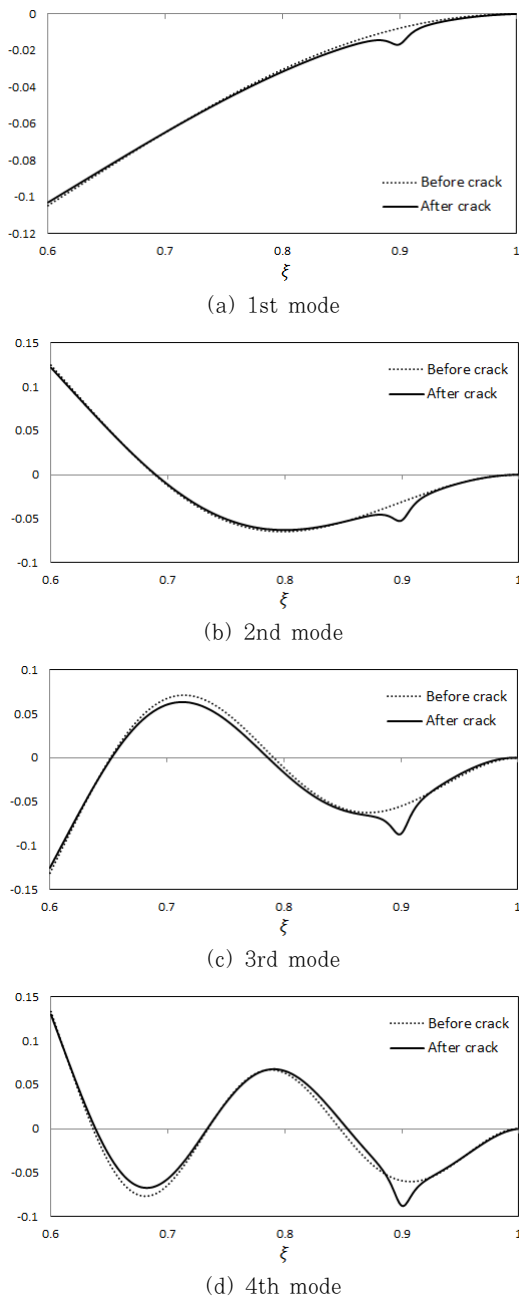


Fig. 6 Mode shapes before and after the crack

### 3. 결 론

본 연구에서는 휨을 받는 테이퍼 원형강관 캔틸레버 보에 발생하는 관통균열을 모델링하여 균열보에 대한 고유주파수와 모드형상을 추정하였다. 이를 위하여 기존 문헌에 제시되어 있는 테이퍼 보에 대한 미분방정식의 일반해에 캔틸레버 보의 경계조건을 적용하여 모드특성을 구하였다. 또한 에너지 방법을 이용하여 테이퍼 원형강관 균열보에 대한 보 길이 방향 휨강성을 유도하였으며, 이를 이용하여 균열보에 대한 모드특성을 산정하였다.

보 길이에 따른 균열보의 휨강성 변화는 균열이 발생한 단면에서 급격히 감소하고 균열위치에서 멀어질수록 공칭 휨강도에 가까워지는 현상을 보였으며, 균열크기가 커질수록 휨강성의 감소 정도가 커지는 등 기존 연구에서 밝혀진 현상과 유사하게 합리적인 양상을 보였다. 또한, 유도한 휨강성을 적용하여 산정한 균열보의 고유주파수는 균열크기가 증가할수록 감소함을 확인하였고, 모드형상은 균열발생에 의해 변화함을 알 수 있었다.

향후 본 연구의 결과를 실험연구를 통하여 검증할 필요가 있을 것으로 판단되며, 테이퍼 원형강관 캔틸레버 보 형태의 타워 구조물에 대한 역해석 기법 등을 적용한 진동기반 균열 탐지에 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

### 감사의 글

본 연구는 산업통상자원부 신재생에너지기술개발사업(융합 원천)인 “서남해 2.5GW 해상풍력을 위한 실증단계 연구”과제의 세부연구 일부 내용임을 밝히는 바이며, 연구수행에 지원해 주신 관계자 여러분께 감사드립니다.

### References

Auciello, N.M., Nole, G. (1998) Vibrations of a Cantilever Tapered Beam with Varying Section Properties and Carrying a Mass at the Free End, *J. Sound & Vibration*, 214, pp.105~119.

Chen, D.W., Wu, J.S. (2002) The Exact Solutions for the Natural Frequencies and Mode Shapes of Non-Uniform Beams with Multiple Spring-Mass Systems, *J. Sound & Vibration*, 255, pp.299~322.

Christides, S., Barr, A.D.S. (1984) One-dimensional Theory of Cracked Bernoulli-Euler Beams, *Int. J. Mech. Sci.*, 26, pp.639~648.

Dilena, M., Dell’Oste, M.F., Morassi A. (2011) Detecting Cracks in Pipes Filled with Fluid from Changes in Natural Frequencies, *Mech. Syst. & Signal Process.*, 25, pp.3186~3197.

Ece, M.C., Aydogdu, M., Taskin, V. (2007) Vibration of a Variable Cross-Section Beam, *Mech. Res. Commun.*, 34, pp.78~84.

Franco, R.J. (1986) *Failure Analysis and Prevention, Vol. 11, ASM Handbook*, ASM International, Ohio, pp.628~642.

Gorman, D.J. (1975) *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*, John Wiley & Sons, New York,

- pp.365~368.
- Huh, Y.C., Kim, J.K., Kim, B.H.** (2006) Crack Identification of Euler-Bernoulli Beam Using the Strain Energy Method, *Proceedings of the KSNVE Annual Fall Conference*, The Korean Society for Noise and Vibration Engineering, pp.396~400.
- Kemppainen, M., Virkkunen, I., Pitkanen, J., Paussu, R., Hanninen, H.** (2003) Realistic Cracks for In-Service Inspection Qualification Mock-Ups, *NDT.net*, 8, pp.1~8.
- Murigendrappa, S.M., Maiti, S.K., Srirangarajan, H.R.** (2004) Frequency-Based Experimental and Theoretical Identification of Multiple Cracks in Straight Pipes Filled with Fluid, *NDT&E International*, 37, pp.431~438.
- Naniwadekar, M.R., Naik, S.S., Maiti, S.K.** (2008) On Prediction of Crack in Different Orientations in Pipe using Frequency Based Approach, *Mech. Syst. & Signal Process.*, 22, pp.693~708.
- National Transportation Safety Board** (2001) *Pipeline Accident Brief (DCA99-MP005)*, NTSB/PAB -01/01, Washington, D.C..
- Rosa, M.A.D., Lippiello, M., Maurizi, M.J., Martin, H.D.** (2010) Free Vibration of Elastically Restrained Cantilever Tapered Beams with Concentrated Viscous Damping and Mass, *Mech. Res. Commun.*, 37, pp.261~264.
- Sinha, J.K., Friswell, M.I., Edwards, S.** (2002) Simplified Models for the Location of Cracks in Beam Structures using Measured Vibration Data, *J. Sound & Vibration*, 251, pp.13~38.
- Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G.R.** (2000) *The Stress Analysis of Cracks Handbook, 3rd ed.*, ASME, NewYork, p.476.
- Yang, X.F., Swamidas, A.S.J., Seshadri, R.** (2001) Crack Identification in Vibrating Beams using the Energy Method, *J. Sound & Vibration*, 244, pp.339~357.
- Wang, Y.M., Chen, X.F., Heb, Z.J.** (2011) Daubechies Wavelet Finite Element Method and Genetic Algorithm for Detection of Pipe Crack, *Nondestruct. Test. & Eval.*, 26, pp.87~99.

## 요 지

본 연구에서는 테이퍼 보에 대한 미분방정식의 일반해에 캔틸레버 보의 경계조건을 적용하여 모드특성을 추정한다. 또한, 휨을 받는 테이퍼 원형강관 캔틸레버 보에 발생하는 관통균열을 모델링하기 위하여 에너지 방법을 이용하여 균열보에 대한 보 길이방향 휨강성을 구한 후 이를 이용하여 테이퍼 원형강관 캔틸레버 균열보에 대한 고유주파수와 모드형상을 추정한다. 보 길이에 따른 균열보의 휨강성 변화는 기존 연구에서 밝혀진 현상과 유사하게 합리적인 양상을 보였으며, 유도한 휨강성을 적용하여 산정한 균열보의 고유주파수는 균열 크기가 증가할수록 감소함을 확인하였고, 모드형상은 균열발생에 의해 변화함을 알 수 있었다. 연구결과는 향후 테이퍼 원형강관 캔틸레버 보 형태의 타워 구조물에 대한 진동기반 균열탐지에 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

**핵심용어** : 모드특성, 테이퍼 캔틸레버 보, 휨강성, 균열보