

## 무요소법을 이용한 균열진전 문제의 형상 최적설계

김재현<sup>1</sup> · 하승현<sup>2</sup> · 조선희<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>서울대학교 아이소-지오메트릭 최적설계 창의연구단, <sup>2</sup>한국해양대학교 해양공학과

### Shape Design Optimization of Crack Propagation Problems Using Meshfree Methods

Jae-Hyun Kim<sup>1</sup>, Seung-Hyun Ha<sup>2</sup> and Seonho Cho<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>National Creative Research Initiatives(NCRI) Center for Isogeometric Optimal Design, Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-744, Korea

<sup>2</sup>Department of Ocean Engineering, Korea Maritime and Ocean University, Busan, 606-791, Korea

#### Abstract

This paper presents a continuum-based shape design sensitivity analysis(DSA) method for crack propagation problems using a reproducing kernel method(RKM), which facilitates the remeshing problem required for finite element analysis(FEA) and provides the higher order shape functions by increasing the continuity of the kernel functions. A linear elasticity is considered to obtain the required stress field around the crack tip for the evaluation of J-integral. The sensitivity of displacement field and stress intensity factor(SIF) with respect to shape design variables are derived using a material derivative approach. For efficient computation of design sensitivity, an adjoint variable method is employed rather than the direct differentiation method. Through numerical examples, The mesh-free and the DSA methods show excellent agreement with finite difference results. The DSA results are further extended to a shape optimization of crack propagation problems to control the propagation path.

**Keywords** : reproducing kernel method, crack propagation analysis, J-integral, adjoint shape sensitivity analysis, stress intensity factor

#### 1. 서 론

균열의 발생 및 진전은 선박 및 해양구조물의 안전에 중요한 영향을 미친다. 따라서 선형 파괴역학 이론에 기초하여 많은 연구자들이 균열의 진전을 예측하려는 노력을 하여 왔다. 현재 많은 분야에서 사용하고 있는 유한요소법은 균열 진전 시 요소망을 새로 재구성해야 하는 등의 특별한 방법이 추가로 요구된다. 따라서 요소망을 재구성할 필요가 없는 무요소법을 도입하게 되었고, 본 연구에서는 재생 커널 기법을 사용하였다. 재생 커널 기법을 사용함에 따라, 균열진전에 의해 움직이는 경계를 쉽게 표현할 수 있으며 균열 진전각 역시 재생 커널 기법에 의해 얻을 수 있는 응력장을 이용한 응

력 확대 계수를 통하여 구할 수 있다.

설계민감도 해석기법은 선형 및 비선형 문제, 열, 유체, 지능재료 등 다양한 문제에 대하여 개발되어 왔다(Ha *et al.*, 2008; 2006). 설계민감도는 설계변수에 대한 성능함수의 변분값이다(Haug *et al.*, 1986). 연속체 기반 형상 설계민감도 해석기법은 물질도함수(Material Derivative) 개념을 이용하여 유도할 수 있으며(Kim *et al.*, 2012) 본 연구에서는 구조물의 형상 및 초기 균열크기에 따른 응력 확대 계수 등 성능함수의 구배를 얻는다. 몇몇 예제를 통해 균열 진전 문제에서 무요소법을 이용한 해석 결과의 정확성을 확인하였으며 설계민감도 해석 결과는 유한차분법과 비교했을 때, 매우 정확하고 효율적임을 확인하였다.

\* Corresponding author:

Tel: +82-2-880-7322; E-mail: secho@snu.ac.kr

Received March 4 2014; Revised July 22 2014

Accepted September 24 2014

©2014 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

### 2. 재생 커널 기법

다음과 같이 함수  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 를 커널함수를 이용하여 근사화한 함수를 생각해 보자.

$$\mathbf{z}^r(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Phi_r(\mathbf{x}-\mathbf{s})\mathbf{z}(\mathbf{s})d\mathbf{s} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 은 재생된 함수,  $\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{s})$ 는 커널함수,  $\mathbf{r}$ 은 지지영역의 크기를 의미한다. 커널함수가 디랙 델타함수라면  $\mathbf{z}^r(\mathbf{x})$ 와  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 는 동일하다. 그러나 다른 커널함수에 대해서는 재생조건을 만족하지 않기 때문에, 수정함수인  $\mathbf{C}(\mathbf{x};\mathbf{x}-\mathbf{s})$ 를 도입하여 재생의 완전성을 보장한다. 따라서 이를 이용하여 식 (1)을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^r(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \overline{\Phi}_r(\mathbf{x}-\mathbf{s})\mathbf{z}(\mathbf{s})d\mathbf{s} \\ &= \int_{\Omega} \Phi_r(\mathbf{x}-\mathbf{s})\mathbf{C}(\mathbf{x};\mathbf{x}-\mathbf{s})\mathbf{z}(\mathbf{s})d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{C}(\mathbf{x};\mathbf{x}-\mathbf{s})$ 는 완전성 조건을 만족하도록 구성되었다 (Chen *et al.*, 1997). 이산화된 커널 함수는 식 (2)를 수치 적분함으로써 얻을 수 있다. 사다리꼴 규칙(Trapezoidal Rule)을 적용하면 다음과 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^r(\mathbf{x}) &\cong \sum_{I=1}^{NP} \Phi_r(\mathbf{x}-\mathbf{s}_I) \mathbf{H}^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{0}) \mathbf{z}_I(\mathbf{x}_I) \Delta A_I \\ &\cong \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) z_{II} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $NP$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\Delta A_I$ 는 각각 전체 절점의 수, 단항식 기저벡터(Monomial Basis Vector), 모멘트 벡터, 적분 가중치를 의미한다.  $\Psi_I$ 와  $z_{II}$ 는 각각 절점의 형상함수 및 함

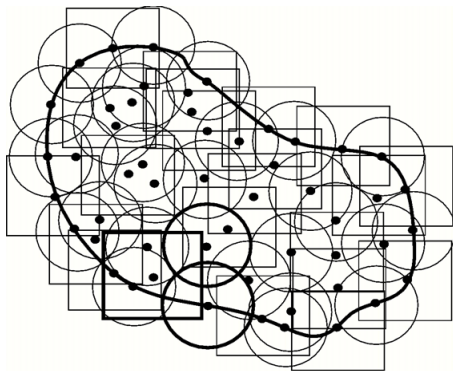


Fig. 1 Mesh-free discretization

수 매개변수이다. 무요소법은 유한요소법과는 달리 점들의 연결성을 지정할 필요가 없다는 것이 큰 장점이다. Fig. 1은 전체 영역에서 절점만을 사용하여 무요소로 이산화한 것을 보여주고 있다. 원과 사각형은 커널함수의 지지영역을 나타낸다.

### 3. 혼합 모드에서의 균열진전 문제

Fig. 2와 같은 균열이 있는 선형 탄성체를 생각하자.

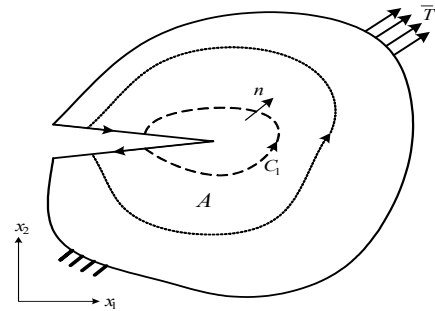


Fig. 2 Linear elastic body with a crack

균열선단을 둘러싸는 임의의 경로  $C_1$ 을 따라가는 경로에 독립적인  $J$ -적분을 정의할 수 있다.

$$J = \int_{\Gamma} \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (4)$$

여기서  $W$ 는 변형에너지,  $n_i$ 는  $C_1$ 의 바깥방향의 법선 벡터이다. 변형된 탄성체의 두 개의 상태를 생각해 보자. 각각 실제 하중과 경계조건에 대한 평형상태와 단위 응력확대 계수에 대한 보조(Auxiliary) 상태이다. 두 개의 상태는 윗첨자 (1)과 (2)를 사용해서 나타낼 수 있으며, 이를 중첩시켜 다음과 같이 (0)이라는 평형상태를 만들 수 있다.

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (5)$$

여기서  $M$ -적분은 다음과 같다.

$$M^{(1,2)} = \int_A \left( \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial z_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (6)$$

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)} \right] = \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)} \quad (7)$$

$q$ 는 균열선단에서는 1,  $M$ -적분 영역 경계에서는 0인 임의의 가중함수이다. 응력 확대 계수는 식 (6)으로부터  $M$ -적

분을 계산하여 얻을 수 있으며 다음과 같다(Haber *et al.*, 1981).

$$K_I = \frac{E'}{2} M^{(1,I)}, \quad K_{II} = \frac{E'}{2} M^{(1,II)} \quad (8)$$

여기서,

$$E' = \begin{cases} E & \text{plane stress} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{plane strain} \end{cases} \quad (9)$$

#### 4. 연속체 기반의 형상 설계민감도 해석

Fig. 3과 같은 영역을 생각해 보자. 시간의 역할을 하는 파라미터인  $\tau$ 를 이용하여 다음과 같은 변환  $T$ 를 정의할 수 있다. 변환  $T: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_\tau$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ 은  $\mathbf{x} = T(\mathbf{x}, \tau)$ 로 주어진다.  $T$ 는 테일러 급수를 이용해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(\mathbf{x}, \tau) = T(\mathbf{x}, 0) + \tau \frac{\partial T(\mathbf{x}, 0)}{\partial \tau} + O(\tau^2) \cong \mathbf{x} + \tau V(\mathbf{x}, 0) \quad (10)$$

여기서, 속도장  $V$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$V(\mathbf{x}, \tau) = \frac{d\mathbf{x}_\tau}{d\tau} = \frac{dV(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad (11)$$

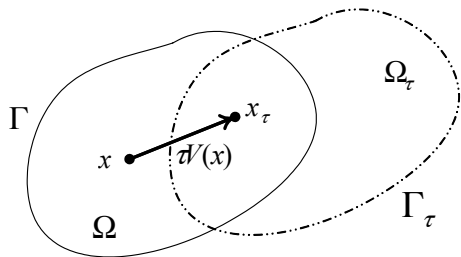


Fig. 3 Variation of domain using a parameter  $\tau$

다음으로  $\Omega_\tau$ 에서 정의되는 범함수를 생각하자.

$$\Psi = \int_{\Omega_\tau} g(\mathbf{z}_\tau, \nabla \mathbf{z}_\tau) d\Omega_\tau \quad (12)$$

식 (12)을 물질도함수를 취하게 되면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Psi' = \int_{\Omega_\tau} [g_{\mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} - g_{\nabla \mathbf{z}} (\nabla \mathbf{z}^T \mathbf{V}) + g_{\nabla \mathbf{z}} \nabla \dot{\mathbf{z}} - g_{\nabla \mathbf{z}} \nabla (\nabla \mathbf{z}^T \mathbf{V}) + \text{div}(gV)] d\Omega_\tau \quad (13)$$

한 점에서 변위의 물질도함수와 편미분식은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{z}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x} + \tau V(\mathbf{x})) - \mathbf{z}(\mathbf{x})}{\tau} \right] \quad (14)$$

$$\mathbf{z}' = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x}) - \mathbf{z}(\mathbf{x})}{\tau} \right] \quad (15)$$

영역  $\Omega$ 에서 평형방정식의 변분 지배방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_\Omega \sigma_{ij}(\mathbf{z}) \epsilon_{ij}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega, \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (16)$$

$$= \int_\Omega b_i \bar{\mathbf{z}}_i d\Omega + \int_\Gamma T_i \bar{\mathbf{z}}_i d\Gamma = l_\Omega(\bar{\mathbf{z}})$$

$\bar{\mathbf{Z}}$ 는 제차 경계조건을 만족하는 가상의 변위를 나타내는 공간이다.  $a_\Omega(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ 와  $l_\Omega(\bar{\mathbf{z}})$ 는 각각 쌍선형 변형 에너지식과 선형 하중식이다.  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $b_i$ 는 각각 응력, 변형률, 체적력을 의미한다. 식 (16)에 물질도함수를 취하면 다음을 얻을 수 있다.

$$a_\Omega(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) = l'_\Omega(\bar{\mathbf{z}}) - a'_V(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (17)$$

여기서,  $\Omega$ 와  $V$ 는 형식들이 각각 영역과 속도장에 종속적임을 의미한다.  $l'_V(\bar{\mathbf{z}})$ 와  $a'_V(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ 는 다음과 같다.

$$l'_V(\bar{\mathbf{z}}) = \int_\Gamma [-T_i(\mathbf{z}_{i,j} V_j) + (T_i \bar{\mathbf{z}}_i)_{,j} n_j + \kappa(T_i \bar{\mathbf{z}}_i)(V_i n_i)] d\Gamma$$

$$+ \int_\Omega -b_i(\bar{\mathbf{z}}_{i,j} V_j) + (b_i \bar{\mathbf{z}}_i)_{,j} V_j d\Omega$$

$$l'_V(\bar{\mathbf{z}}) = \int_\Gamma [-T_i(\mathbf{z}_{i,j} V_j) + (T_i \bar{\mathbf{z}}_i)_{,j} n_j + \kappa(T_i \bar{\mathbf{z}}_i)(V_i n_i)] d\Gamma$$

$$+ \int_\Omega -b_i(\bar{\mathbf{z}}_{i,j} V_j) + (b_i \bar{\mathbf{z}}_i)_{,j} V_j d\Omega \quad (18)$$

$$a'_V(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = - \int_{\Omega_\tau} [\sigma_{ij}(\mathbf{z})(\bar{\mathbf{z}}_{i,k} V_{k,j}) + \sigma_{ij}(\bar{\mathbf{z}})(\mathbf{z}_{i,k} V_{k,j}) - \sigma_{ij}(\mathbf{z}) \epsilon_{ij}(\bar{\mathbf{z}}) \text{div} V] d\Omega \quad (19)$$

여기서,  $V_i$ 와  $n_i$ 는 각각 속도벡터  $\mathbf{V}$ 와 단위 법선벡터  $\mathbf{n}$ 의  $i$ 번째 성분이고,  $\kappa$ 는 경계의 곡률을 의미한다.

#### 5. 균열진전 문제의 형상 설계민감도 해석

다음과 같이 변형률을 변수로 갖는 성능함수를 생각하자.

$$\Psi = \int_{\Omega_\tau} g(\mathbf{z}_{i,j}) d\Omega \quad (20)$$

식 (20)에 물질도함수를 취하게 되면, 식 (13)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Psi' = \int_{\Omega} g_{,z_{i,j}} (\dot{\mathbf{z}}_{i,j} - (\mathbf{z}_{i,k} V_k)_{,j}) d\Omega + \int_{\Omega} (g V_i)_{,i} d\Omega \quad (21)$$

$g(\mathbf{z}_{i,j})$  함수를 다음과 같이 M-적분으로 생각한다면, 식 (21)에서 얻어지는 설계민감도 값은 영역의 변화에 따라서 M-적분값이 얼마나 민감하게 변할 것인가를 나타낸다(Park, 2004).

$$g(\mathbf{z}_{i,j}) \equiv \int_A \left( \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial z_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (22)$$

식 (22)에서  $g(\mathbf{z}_{i,j})$  값을 구하고, 식 (17)에서  $\dot{\mathbf{z}}$ 를 구하게 되면 M-적분의 형상 설계민감도 값을 얻을 수 있다. 그러나 전체 영역의  $\dot{\mathbf{z}}$  값을 구해야 되기 때문에 효율적이지 못하다. 따라서 보다 효율적인 애조인 변수법(Adjoint Variable Method)을 제안하게 되었다. 식 (21)에서 설계변수에 대하여 내재적 의존성을 갖는 부분을 외재적 의존성만을 갖도록 하기 위해서 내재적 의존성을 갖는 부분을 이용하여 다음과 같은 애조인 방정식을 구성한다.

$$a_{\Omega}(\lambda, \bar{\lambda}) = \int_{\Omega} g_{, \nabla z} : \nabla \bar{\lambda} d\Omega, \quad \forall \bar{\lambda} \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (23)$$

$\dot{\mathbf{z}} \in \bar{\mathbf{Z}}$  이므로, 식 (23)에서  $\bar{\lambda} = \dot{\mathbf{z}}$ 으로 둘 수 있다.

$$a_{\Omega}(\lambda, \dot{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} g_{, \nabla z} : \nabla \dot{\mathbf{z}} d\Omega \quad (24)$$

$a_{\Omega}(\cdot, \cdot)$ 는 대칭성을 가지므로 식 (24)에서  $\lambda$ 와  $\dot{\mathbf{z}}$ 는 위치를 바꿀 수 있고, 따라서 식 (21)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\Psi' = l'_{,V}(\lambda) - a'_{,V}(\mathbf{z}, \lambda) - \int_{\Omega} [g_{,z_{i,j}} : (\mathbf{z}_{i,k} V_k)_{,j} - (g V_i)_{,i}] d\Omega \quad (25)$$

식 (21)과 비교하였을 때  $\lambda$ 만 구한다면 형상 설계민감도 값을 얻을 수 있기 때문에, 상당히 효율적임을 알 수 있다. 또한 응력 확대 계수는 M-적분의 값에서 구할 수 있기 때문에, 그것의 형상 설계민감도 값 역시 M-적분에 물질도함수를 취해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{K}_{I'} = \frac{E'}{2} M^{(1,I)}, \quad \dot{K}_{II'} = \frac{E'}{2} M^{(1,II)} \quad (26)$$

### 6. 형상 최적 설계

본 연구에서는, 균열이 진행되고 있는 구조물에 대해서 균열진전의 방향을 제어할 수 있는 형상을 찾는 것을 목적으로 한다. 균열진전 해석을 위해서는 앞서 언급했듯이, 초기 균열이 있는 모델에 대해서 J-적분과 M-적분이 수행되어야 한다. 만약 외부의 형상이나 내부 균열이 진전되고 있는 곳의 형상이 바뀐다면, 응력장의 분포 역시 바뀌게 되고, 따라서 M-적분 값 역시 변한다. 따라서 균열 진전각 또한 바뀌게 되며 이것이 균열을 제어하는 기본 원리이다. 균열이 이미 진전되고 있는 구조물에 대해서 균열을 막는 것은 쉽지 않다. 따라서 균열이 불가피하다면 구조적으로나 다른 이유로 절대로 균열이 일어나서는 안되는 영역을 피해서 균열이 진행되도록 해야 한다. 따라서 다음과 같이 목적함수를 정의할 수 있다.

$$\text{Maximize } \Psi(\theta) = \|\mathbf{x}_{cr} - \mathbf{x}_{np}\| \quad (27)$$

$$\text{Subject to } Volume \geq Volume_{allowable} \quad (28)$$

$$\text{Design variable } b_{lower} \leq b_i \leq b_{upper} \quad (29)$$

여기서  $x_{cr}$ 은 균열선단을,  $x_{np}$ 은 균열이 절대로 발생해서는 안되는 부분을 의미한다. 제약조건으로는 판의 넓이가 일정 조건 이상을 충족해야 하는 것으로 결정했다. 형상 최적 설계는 형상 및 설계변수의 매개화(Parameterization)가 필요하다. 본 연구에서는 3차 베지어 커브를 이용해서 형상을 표현했다.  $(n+1)$ 개의 점이 있을 때, 베지어 방정식은 다음과 같이 표현한다.

$$\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} h^i (1-h)^{n-i} q_i \quad (30)$$

여기서  $q_i$ 는 매개화된 점의 개수이고,  $h$ 는 0과 1사이의 값이다.

여기서  $x_{old}$ 는 균열이 진전하기 전의 균열선단 위치이다.

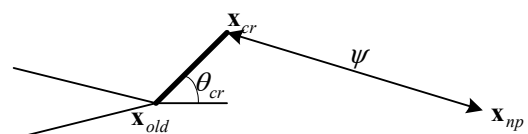


Fig. 4 Objective function  $\Psi(\theta)$

균열선단과  $x_{np}$  사이의 거리는 다음과 같이 '코사인 제 2법칙'을 이용해서 나타낼 수 있다.

$$\psi(\theta)^2 = \overline{x_{cr}x_{old}}^2 + \overline{x_{np}x_{old}}^2 - 2\overline{x_{cr}x_{old}x_{np}x_{old}} \cos \theta_{cr} \quad (31)$$

설계민감도 해석을 위해서는 1차 변분을 취하게 된다.  $\psi(\theta)$ 는  $\theta$ 의 함수이므로, 그것에 대한 설계민감도 값이 필요하다.

$$\theta_{cr} = \left( 2 \tan^{-1} \left( \frac{K_I}{4K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right) \quad (32)$$

$\theta$ 는 응력 확대 계수의 함수이므로, 위 식에 변분을 취하게 되면 다음과 같이 균열 진전각의 설계민감도 값을 얻을 수 있다.

$$\theta'_{cr} = \cos^2 \theta_{cr} \cdot \frac{1}{8} \left( \begin{array}{l} \frac{K'_I}{K_{II}} \pm \frac{K_I K_{II}^{-1} K'_I}{\sqrt{(K_I/K_{II})^2 + 8}} \\ - \frac{K_I K'_{II}}{K_{II}^2} \mp \frac{K_I K_{II}^{-3} K'_{II}}{\sqrt{(K_I/K_{II})^2 + 8}} \end{array} \right) \quad (33)$$

$K'_I$ 와  $K'_{II}$ 는 각 모드의 응력 확대 계수의 설계민감도 값이며, M-적분의 설계민감도 값으로부터 얻을 수 있다.

### 7. 수치 예제

Fig. 5와 같이 아래가 고정되어 있고 윗면에  $\tau=1$ 의 전단력이 작용하는 균열이 있는 평판을 생각해 보자.

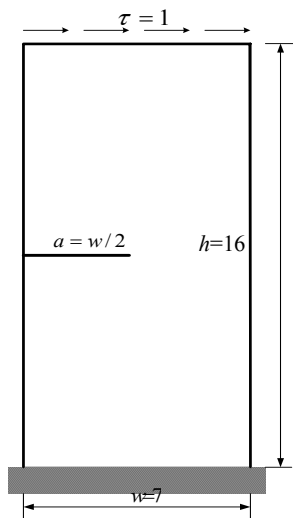


Fig. 5 Plate with a crack

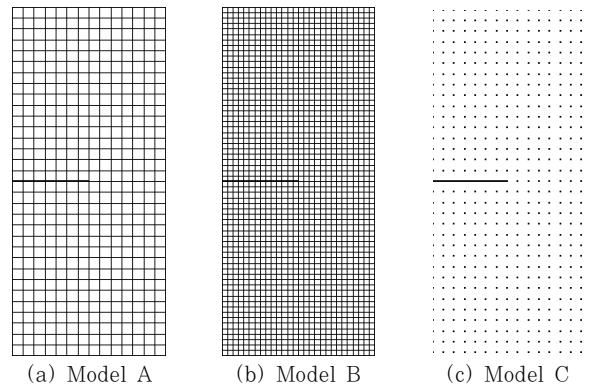


Fig. 6 Numerical Models

평판의 높이는 16in, 너비는 7in이며, 초기 균열의 길이는 3.5in이다. 탄성계수와 포아송 비는 각각  $30 \times 10^6 \psi$ , 0.25이다. 수치해석을 위한 모델은 Fig. 6과 같이 세 가지로 구성하였다. 모델 A와 B는 각각 495개와 1,885개의 절점을 갖는 유한요소 모델이며 모델 C는 495개의 절점을 갖는 무요소 모델이다.

Table 1과 2에서는 응력 확대 계수 값을 Fig. 7과 같은 Mode I과 Mode II에 대하여 해석적 해와 비교하였다.

또한 무요소법의 정확도를 확인하기 위해서 기존의 유한요소법과도 비교하였다. Model C는 다른 모델보다 매우 정확한 결과를 제공함을 알 수 있다. 또한 Model A와 Model C를 비교하였을 때, RKM을 사용하는 Model C는 동일한 절

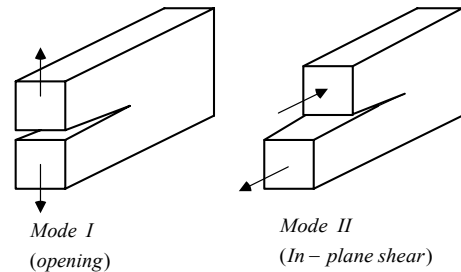


Fig. 7 Fracture Modes

Table 1 Comparison of SIF(Mode I)

	$K_I$	Error
Analytical solution	34.00	-
Model A : FEM(15×33)	31.57	7.15%
Model B : FEM(29×65)	32.67	3.91%
Model C : RKM(495points)	33.62	1.12%

Table 2 Comparison of SIF(Mode II)

	$K_{II}$	Error
Analytical solution	4.55	-
Model A : FEM(15×33)	4.47	1.76 %
Model B : FEM(29×65)	4.49	1.32 %
Model C : RKM(495points)	4.58	-0.66 %

점 수를 사용하였을 때 좀 더 정확한 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

Fig. 8에서는 균열진전의 형상과 응력분포를 보여준다. Fig. 5와 같이 하중조건이 비대칭이므로 균열선은 Fig. 8과 같이 얻을 수 있었다.

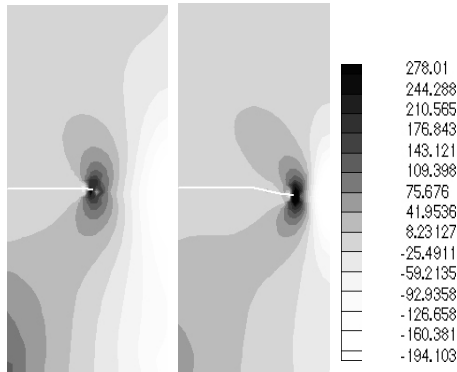


Fig. 8 Crack propagation with stress contoured

다음은 형상 설계민감도에 관한 예제이다. Fig. 5와 같은 평판에서 재료 물성치 및 크기는 동일하며 하중은 왼쪽 모서리 부분의 절점에서 수직 방향으로  $F=10^2$ 이 가해지고 있다. 형상 변화를 위해서 오른쪽 위 모서리 부분의 절점의 좌표를 위치 벡터의 1%만큼 변화시켰다. 변경 전 모델에 대하여 균열 진전각과 Mode I와 Mode II의 응력 확대 계수 값을 Table 3에 나타냈다.

Table 3 Results of crack propagation analysis

	$\theta_{cr}$ (Radian)	Stress Intensity Factor(SIF)
Mode I	1.3700E-02	2.8527E+02
Mode II		-1.9544E+00

Table 4는 변위에 대한 형상 설계민감도 해석의 결과이고, Table 5는 응력 확대 계수의 형상 설계민감도 해석결과이다. 정확도를 확인하기 위해서 유한차분법과 비교하였으며 해석적 형상 설계민감도 해석결과는 유한차분법과 비교하였을 때 매우 정확함을 알 수 있다.

Table 4 Comparison of shape sensitivity of displacement

Shape Design Sensitivity of Displacement			
Node	Analytical	FDM	Accuracy
23-x	5.03E-08	5.02E-08	99.94%
248-y	-1.08E-06	-1.07E-06	99.58%
481-x	-6.32E-05	-6.26E-05	99.18%

Table 5 Comparison of shape sensitivity of SIFs

Shape Design Sensitivity of Stress Intensity Factor			
	Analytical	FDM	Accuracy
Mode I	2.84E+00	2.80E+00	98.73%
Mode II	-1.05E+00	-1.05E+00	99.77%

최적설계를 수행하기 위해서 Fig. 9와 같은 인장응력을 받는 모델을 생각하자. 판의 크기는 너비  $W=14m$ , 길이  $L=32m$ 이다. 또한 모델에 작용하는 인장응력은  $\sigma=10^4N/m^2$ 이다. 판의 물성치는 탄성계수  $30 \times 10^6 N/m^2$ 이고 포아송 비  $\nu=0.3$ 이다. 그림에서 np는 구조물에서 매우 중요한 위치여서 균열이 지나가서는 안되는 점을 의미한다. 현재의 형상에서 균열은 np점을 향해서 진전하게 된다. 형상 최적설계를 통해서 np로부터 균열이 최대한 떨어져서 진전하는 최적의 형상을 제시할 것이다.

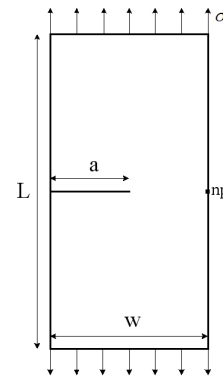
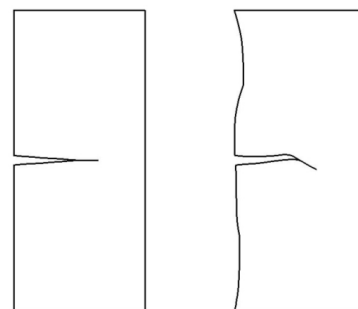


Fig. 9 Crack propagation model subjected to tensile stresses

Fig. 10은 최적화 전후의 균열 진전각을 비교한 결과이다. 간단한 형상변화로써 균열이 구조적으로 중요한 부분으로부터 멀어져 간다는 것을 알 수 있다. 다음 표는 최적화 전후의 균열 진전각을 나타낸 것이다.

Table 6 Crack angle after optimization

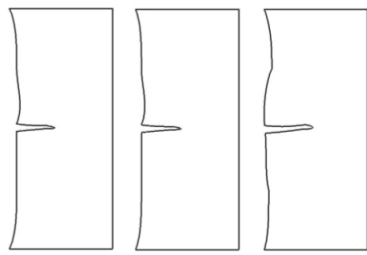
Design	Initial	Optimal
Crack Angle	0.0	5.2320E-01



(a) Initial (b) Optimal

Fig. 10 Crack propagation after optimization

Fig. 11은 각 부피 제약조건에 따른 최적의 형상을 나타낸 것이다. 바깥의 형상은 3차 베지어 커브를 이용해서 나타냈으며, 모델의 왼쪽 면과 균열선 부분을 매개변수화 하였다. 이 최적화 결과를 이용해서, 간단한 형상변화를 통해서 균열 진전을 제어할 수 있다.



(a) 80% (b) 90% (c) 100%

Fig. 11 Optimal shapes for volume constraints

## 8. 결 론

본 논문에서는 재생 커널 기법을 이용하여 혼합모드 균열진전 문제에 대한 연속체 기반의 형상 설계민감도 해석을 수행하였다. 재생 커널 기법은 유한요소법과 달리 요소망을 재 구성할 필요가 없기 때문에 매우 편리하며 커널 함수의 연속성을 증가시켰을 때 높은 정밀도의 형상함수를 얻을 수 있다. 변위장과 응력 확대 계수의 설계변수에 대한 민감도해석을 위하여 물질도함수를 도입하였으며 직접 미분법보다 효율적인 애조인 방법을 사용하였다. 수치 예제들을 통해서 재생 커널 기법을 이용한 균열진전 해석 결과의 타당성과 적용성을 확인하였다. 또한 애조인 방법을 이용한 형상 설계민감도 해석 결과를 유한차분법과 비교하여 매우 정확하고 효율적인 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 또한 이를 바탕으로 간단한 모델에 대하여 형상 최적설계를 수행하여 균열이 발생될 수 있는 구조물에 대해서 균열에 의한 피해를 최소화할 수 있도록 균열을 제어할 수 있는 최적의 형상을 도출할 수 있었다.

## 감사의 글

이 논문은 2013 년도 미래창조과학부의 재원으로 한국연구

재단의 지원을 받아 수행된 연구입니다(No. 2010-0018282). 저자들은 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

## References

- Chen, J.S., Pan, C., Wu, C.T.** (1997) Large Deformation Analysis of Rubber Based on a Reproducing Kernel Particle Method, *Comput. Mech.*, 19, pp.211~217.
- Ha, S.H., Cho, S.** (2008) Level Set Based Topological Shape Optimization of Geometrically Nonlinear Structures using Unstructured Mesh, *Comput. & Struct.*, 86, pp.1447~1455.
- Ha, Y., Cho, S.** (2006) Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Eigenvalue Problems for Piezoelectric Resonators, *Smart Mater. & Struct.*, 15, pp.1513~1524.
- Haber, R.B., Koh, H.M.** (1985) Explicit Expressions for Energy Release Rates Using Virtual Crack Extensions, *International, J. Numer. Method in Eng.*, 21, pp.301~315.
- Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V.** (1986) *Design Sensitivity Analysis of Structural System*, Academic Press, New York, NY.
- Kim, M.-G., Ha, S.H., Cho, S.** (2012) Level Set Based Topological Shape Optimization of Hyper-Elastic Nonlinear Structures using Topological Derivatives, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 25(6), pp.559~567.
- Park, S.M.** (2004) Crack Propagation Analysis using Reproducing Kernel Method, Master Thesis, Seoul National University.

## 요 지

본 논문에서는 재생 커널 기법을 사용하여 혼합모드 균열진전 문제에 대한 연속체 기반의 형상 설계민감도 해석을 수행하였다. 재생 커널 기법은 기존의 유한요소법과 달리 요소망을 재구성할 필요가 없어, 커널 함수의 연속성을 증가시켰을 때 높은 정밀도의 형상함수를 얻을 수 있다는 장점을 가지고 있다. 균열전단 주변에서 J-적분을 수행하기 위해 선형탄성 조건이 고려되었다. 변위장과 응력 확대 계수의 설계변수에 대한 민감도해석을 위하여 물질도함수를 도입하였으며 직접 미분법보다 효율적인 애조인 방법을 사용하여 설계민감도를 유도하였다. 수치 예제들을 통해서 재생 커널 기법을 이용한 균열진전 해석 결과의 타당성을 확인하였으며 애조인 방법을 이용한 형상 설계민감도 해석 결과를 유한차분법과 비교하여 매우 정확하고 효율적인 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 이를 바탕으로 간단한 모델에 대하여 형상 최적설계를 수행하여 균열이 발생될 수 있는 구조물에 대해서 균열에 의한 피해를 최소화할 수 있도록 균열을 제어할 수 있는 최적의 형상을 도출하였다.

**핵심용어** : 재생 커널 방법, 균열진전 해석, J-적분, 애조인 형상 민감도 해석, 응력 확대 계수