

## 닫힌 모세관에서 유체 이송에 관한 연구

임호섭\* · 임성진\* · 이진기†

### Investigation for the Fluid Motion in Closed End Capillaries

Hosub Lim, Seong Jin Lim and Jinkee Lee

**Abstract.** Although many studies have been done on an open-end capillary, the invasion into a closed end capillary is still novel in its investigation. In this research we have explored the fluid invasion in closed-end capillaries where the shape of the meniscus and the height of invasion were accompanied by gas compression inside the capillary. Theoretically, the one dimensional momentum balance equation shows the fluid oscillation. In the experiments, we have found the different phenomena, either the fluid oscillation with low frequency or no oscillation. This discrepancy is mostly caused by two factors. First, a continuous decrease of the advancing contact angle due to decreasing invasion velocity as increasing pressure inside the closed-end capillary reduces the invasion velocities. Second, the high shear stress within the entrance length region was generated by the plug like velocity profile.

**Key Words:** 모세관 침투(capillary invasion), 표면장력(surface tension), 접촉각(contact angle), 닫힌 관(closed end capillary)

#### 1. 서 론

모세관 침투 현상은 Bell과 Cameron<sup>1)</sup>에 의해 처음 연구되었고 Lucas<sup>2)</sup>와 Washburn<sup>3)</sup>에 의해 확장되어 증력과 관성력이 무시되는 경우 일정한 단면적을 가진 모세관 침투 현상이 연구되었다. 이 연구에서 Washburn은 곡관 내부에서 유체가 이송하는 현상을 1차원 운동량방정식을 이용하여 수식화 하였으며, 실험을 통해 이의 타당성을 증명하였다. 이 식은 점성력과 모세관력의 균형식으로 모세관 침투현상을 묘사한 것으로 관경이 일정한 수평 모세관의 경우  $l(t) = \sqrt{r_c \sigma \cos \theta / 2 \mu} \sqrt{t}$ 가 된다. (여기서,  $l(t)$ 는 시간  $t$ 에 따른 반월관의 위치,  $\mu$ 는 유체의 점도,  $r_c$ 는 모세관의 내부 반지름,  $\sigma$ 는 유체의 표면장력,  $\theta$ 는 유체와 유리 계면 사이의 접촉각) 이며 이 식은 일반적으로 Lucas-Washburn 식이라 불린다. 이러한 연구를 기초로 하여 열린 모세관에서의 유체 침투 현상이 수치적인 기법과 실험적인 기법으로 다양하게 연구되어 왔다. Hoffmann<sup>4)</sup>은 모세관 침투 현상이 일어날 때 가스와 유

체 계면의 움직임을 연구했고 Jiang<sup>5)</sup>은 Capillary number를 통해 모세관 침투 현상의 동적 원리를 밝혀냈다. 또한 Ichikawa와 Satoda<sup>6)</sup>는 모세관과 유체의 계면에서 접촉각의 앞서는 부분(advancing)과 뒤따르는 부분(receiving)이 다름을 주장하였고 Sibold<sup>7)</sup>와 Chebbi<sup>8)</sup>는 모세관에서 동 접촉각이 변하고 이가 침투 결과에 영향을 주는 것을 실험적, 수치적으로 발견하였다. Xue<sup>9)</sup>는 유체의 초반 높이와 시간과의 관계를 나타내기 위해 정수압의 영향에 대해 기술하였다. Lorenceau<sup>10)</sup>는 열린 모세관 현상의 초반 경계 조건을 일부러 변경시켜 실험에서 진동을 발견하였는데 결과는 진동이 유체 끝 부분에서 길게 나타났다. Fries와 Dreyer<sup>11)</sup>는 모세관 현상 중 초반 짧은 시간인 관성력이 크게 관여하는 물리적 영역을 무차원화하여 분석하였다. Quéré<sup>12)</sup>는 유체의 모세관 침투 속도와 높이를 계산하였다. 이는 침투 중 극초반부가 선형으로 나타나고 낮은 점도를 가진 유체는 실험적으로 진동이 발생함을 보였다. 계속해서, Zumed<sup>13)</sup>는 계면활성제를 포함한 다른 종류의 유체, 즉 다양한 물리적 특성을 가진 유체들을 가지고 모세관 침투를 연구했다. 이 밖에도 많은 연구자들은 일정

† Corresponding Author: School of Mechanical Engineering, Sungkyunkwan University, 2066 Seobu-ro, Jangan-gu, Suwon, Gyeonggi-do, 440-746, Korea, lee.jinkee@skku.edu, Tel: 031-299-4845

\* 성균관대학교 기계공학과

하지 얇은 모세관의 단면 모양이 주는 영향<sup>14)</sup>, 다공성 매질에서의 침투 현상<sup>15)</sup>에 대해 연구하였다. 하지만 단힌 모세관에서의 침투 현상에 대한 연구는 이론적, 실험적으로 최근에 들어 연구가 진행되었다. 단힌 관에서의 유체 침투 현상은 가스압력을 이용하여 유체의 압력을 측정하는 기기로 적용할 수 있다. 예를 들어 세포내부의 압력을 측정하는 기기 등으로 적용될 수 있어 공학적으로 이론적인 연구가 필요하다. 식을 간단히 하기 위해서, Deutsch<sup>16)</sup>는 중력과 관성력, Radiom<sup>17)</sup>은 점성력과 관성력의 영향을 무시하고 단힌 모세관의 침투를 연구하였고, R Fazio와 S. Iacono<sup>18)</sup>의 연구에서는 모멘트 균형식을 통한 수치 해석을 하여 공기 유동을 관찰하였다. 최근 Lim<sup>19)</sup>은 단힌 모세관에서 유동이 있을 경우 실험에 의거한 1차원 수정 운동방정식을 제시하였다. 본 연구에서는 그림 1과 같이 단힌 모세관에서의 유체의 침투 현상이 조건에 따라 진동하거나 진동하지 않는 경우에 대해 연구하여 모세관 표면의 젖음과의 영향을 비교하였다.

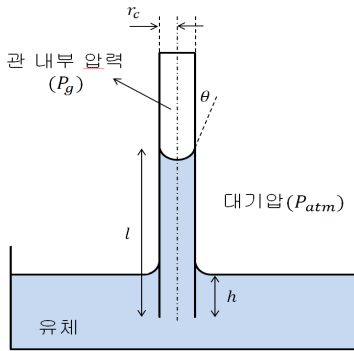


그림 1. 단힌 모세관에서의 침투 현상

## 2. 이론 해석

본 연구에서는 유리 모세관이 유체에 접촉하였을 때 어떠한 유체역학적 성질을 가지고 유동이 흐르는가에 대하여 연구하였다. 모세관의 반지름이 유체 침투 길이에 비해서 충분히 작을 때는 1차원 운동량 방정식을 이용하여 나타낼 수 있다. 단힌 모세관에서의 유체 침투는 관성력, 점성력, 모세관 힘, 정수압, 가스 압력의 균형식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-\rho \frac{d}{dt} \left( \ell \frac{d\ell}{dt} \right) = \frac{8\mu\ell}{r_c^2} \frac{d\ell}{dt} - \frac{2\sigma \cos \theta}{r_c} - \rho g(h - \ell) - (P_{atm} - P_g) \quad (1)$$

여기서,  $h$ 는 유체가 안쪽으로 잠기는 모세관의 깊이,  $\sigma$ 는 표면장력,  $P_g$ 는 모세관 내부의 압력이다. 이렇게 생성된 2차 미분 방정식을 풀었을 때 시간에 따라 유체가 올라가는 거리와 속도를 구할 수 있으며 압력 균형에 의해 단힌 모세관 내부의 가스의 압력( $P_g$ )을 알 수 있다. 단힌 모세관이 유체에 삽입되는 순간 내부 기체 압력은 유체의 압력에 의해서 가압되며 모세관 내부의 가스압력인  $P_g$ 는 유체가 관으로 침투하는 과정에서 가스에 용해되지 않는다고 가정하였을 때,  $P_g(t=0) = P_{atm}$ 에서  $P_g = P_{atm} (\ell_c / (\ell_c - \ell(t)))^\gamma$ 로 나타낼 수 있다. 여기서,  $\ell_c$ 는 모세관의 총 길이,  $\gamma$ 는 기체의 비열비를 나타낸다. (1)식은 수학적인 분석을 위해 무차원화 시켰으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\frac{1}{Oh^2} \frac{d}{dT} \left( L \frac{dL}{dT} \right) + 8L \frac{dL}{dT} - 2\cos\theta - Bo(H - L) - \beta \left( 1 - \left( \frac{\chi_c}{\chi_c - L} \right)^\gamma \right) = 0 \quad (2)$$

여기에서, 각각의 무차원 변수는  $L = \frac{\ell}{r_c}$ ,  $H = \frac{h}{r_c}$ ,  $T = \frac{\sigma t}{\mu r_c}$ ,  $\chi_c = \frac{\ell_c}{r_c}$ 이다. 새로 생성된 무차원 수는 Bond Number ( $Bo = \frac{\rho g r_c^2}{\sigma}$ )와 대기압과 모세관의 압력의 비율을 나타낸 수인  $\beta$  ( $\beta = \frac{P_{atm} r_c}{\sigma}$ )와 Ohnesorge Number ( $Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho r_c \sigma}}$ )이다. (2)식의 왼쪽 항부터 차례로 의미하는 것은 관성력, 점성력, 표면장력, 정수압과 가스 압축력이다. 이렇듯,  $Bo$ ,  $Oh$ ,  $\beta$ ,  $H$ ,  $\chi_c$ 를 뚝뚝씩 식(2)를 무차원 모세관의 유체 높이  $L(T)$ 에 대하여 풀 수 있다. 본 연구에서는 단힌 모세관 시스템을 적용한 식(2)를 Matlab code로 만들었으며 실험과 동일한 물리적 변수를 넣어 해석하였다. 이 결과는 그림 2와 같다. 그림 2의 그래프를 얻기 위해서는 전제조건이 필요하다. 유체와 모세관 사이의 접촉각  $\theta$ 가 시간에 따라 변하지 않아야 하며, 완전 발달 유동이 전제로 깔려 있는 Hagen-Poiseuille 방정식에서 유도된 점성력 항이 유효해야 한다. 본 연구는 다음의 실험을 통하여 이러한 조건들의 타당성을 판별하고자 하였다.

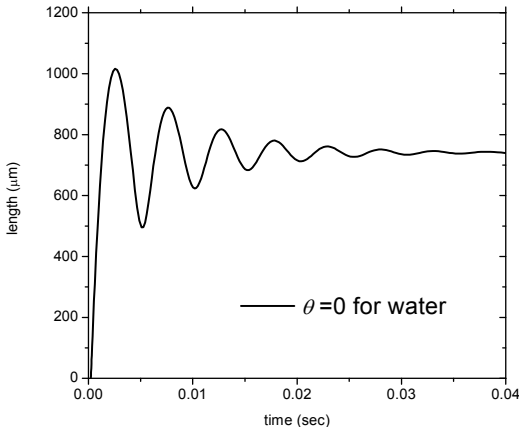


그림 2. Matlab을 이용하여 그린 시간변화에 따른 달린 모세관에서의 물의침투 높이 그래프

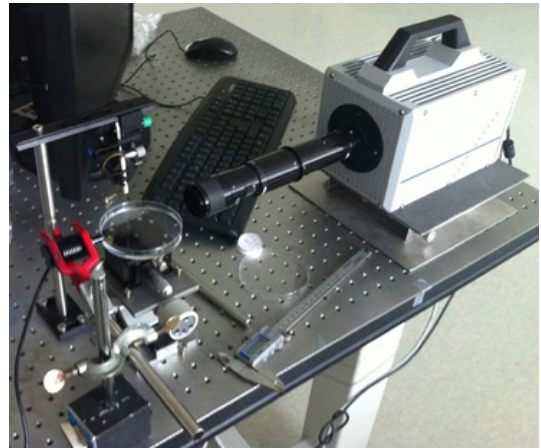


그림 3. 전체적인 실험 시스템

### 3. 실험

#### 3.1 실험 장비 및 방법

실험은 초고속카메라(MotionPro X3, DEL imaging systems, CT)를 이용하여 모세관 내 유체 침투 현상을 촬영하고 시간에 따라 반월판(meniscus)을 추적하는 방법으로 진행되었다. 실험에 사용된 모세관의 재질은 유리이며, 그 크기는 내부 직경 344 $\mu\text{m}$ , 길이 127mm이다. 실험하는 동안 온도는 항상 22  $\pm$  1 $^{\circ}\text{C}$ 로 유지되었다. 유리 모세관은 매 실험 전 94.5%의 에탄올로 세척한 후, 산소 플라즈마 클리너를 이용하여 표면처리를 하였다. 이 작업은 모세관 내 세척뿐만 아니라 내부 표면의 젖음성(wettability)을 높은 상태로 만드는 역할을 하였다. 즉, 모세관 내부의 표면의 젖음성을 극대화 시키기 위함이다. 또한 본 실험 중 처음 모세관이 유체에 닿을 때 모세관 내벽과 외벽에서 모두 상승현상이 일어나기 때문에 초반 모세관 내부의 유체 반월판의 원활한 관측이 어렵기에 모세관 외벽을 따라 올라가는 유체를 억제할 필요가 있다. 이에 유체에 닿는 모세관 끝 외벽을 왁스로 코팅하여 소수성 외벽을 형성하고 따라서 내벽의 유체 상승만 생길 수 있도록 하였다. 모세관의 반대 끝부분은 파라핀 필름을 이용하여 막아 달린 모세관을 만들었다. 이렇게 준비된 모세관은 그림 2와 같이 마이크로 xyz-stage로 고정하였고, 페트리 접시에 물을 가득 받아 초고속카메라와 같은 높이에 올려놓았다. 이후, 고정되어 있는 모세관을 점점 내리면서 2000fps로 촬영하였다. 전체적인 실험 구성은 그림 3과 같다.

#### 3.2 유체 침투현상에서의 접촉각의 영향

##### 3.2.1 진동이 발생하지 않은 유체 침투 현상

그림 4와 5는  $\chi_c=740$ 인 경우 시간에 따라 모세관 침투현상을 보여주는 그림이다. 이 그림에서도 볼 수 있듯이 시간에 따라 유체는 진동 없이 이송하며 유체와 모세관 사이의 접촉각이 변함을 볼 수 있다. 이러한 접촉각의 변화를 실험적으로 측정하여 분석하고 그 각의 변화를 시간에 따라서 그림 5와 같이 근사적으로 구할 수 있었고, 그 식은  $\theta = 0.02 (\ln(t/1))^2$  이다. 여기서 로그함수의 인수값은 단위초로 무차원화 하였다.

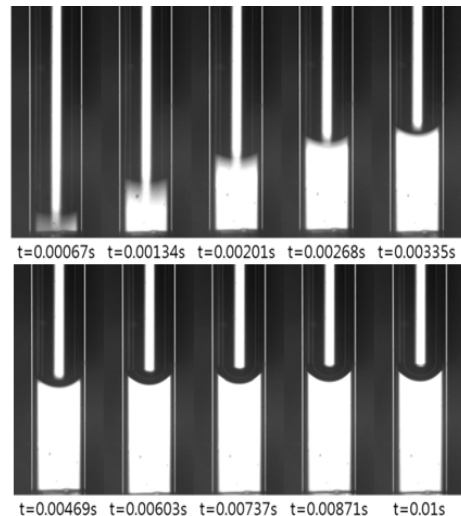


그림 4. 진동 없이 모세관을 침투하는 유체의 연속적인 사진

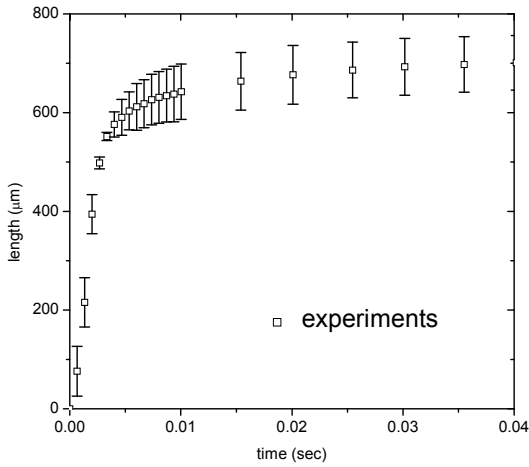


그림 5. 시간에 따른 높이 그래프

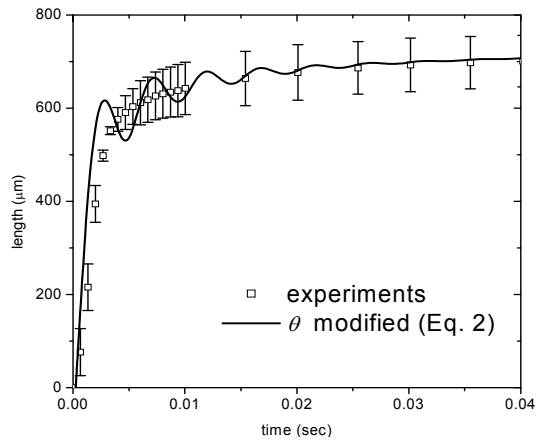


그림 7. 접촉각의 변화를 고려한 이론과 실험값의 비교 그래프

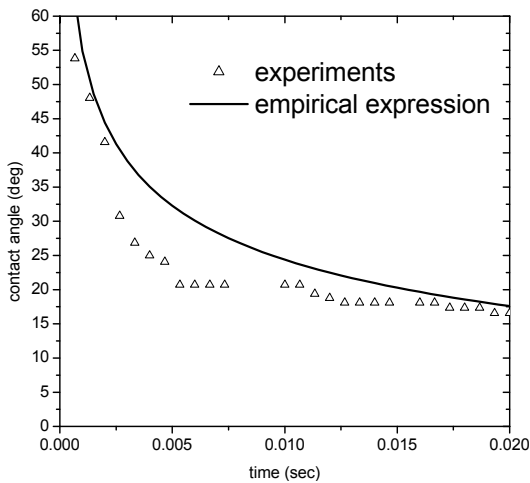


그림 6. 시간에 따른 접촉각의 변화를 보여주는 그래프

위의 식을 무차원화하고 식(2)의  $\theta$ 에 대입하여 최종적인 그래프를 도출하였으며 실험과 비교하여 그 정확성을 판별하였다. 그 결과 그림 6과 같이 이론식을 Matlab을 이용하여 계산한 그래프의 경우 진동의 진폭이 줄어든 것을 확인할 수 있었으며 또한 초기 유체 이동의 속도가 실험과 잘 일치하는 것 확인할 수 있었으나 실험과 같이 진동이 없어지는 않는다는 점에 따라 접촉각의 변화뿐만 아니라 다른 인자가 진동에 영향을 주는 것이라 판단이 되며 이는 전단응력의 영향으로 3.3장에 다룰 예정이다. 진동 이후 안정화된 단계에서는 최종 높이가  $704\mu\text{m}$  정도로 실험과 같은 값이 나왔다.

### 3.2.2 진동이 발생한 유체 침투 현상

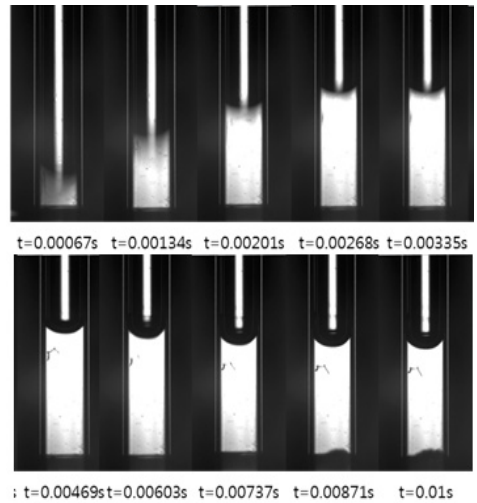


그림 8. 진동하며 모세관을 침투하는 유체의 연속적인 사진

이 실험은 다른 조건은 모두 동일하지만 모세관세척 중 산소 플라즈마 처리 시간을 조절하여 모세관 표면의 젖음성을 증가시킴으로써 진동을 관찰 할 수 있었다. 그 결과, 그림 8에서와 같이 침투 초반에 진동이 생겼다가 평형상태가 된다. 전과 마찬가지로 진동을 하는 조건에서도 시간에 따른 높이를 그림 9에, 접촉각이 어떻게 변화하는지를 그림 10에 그래프로 나타내었다.

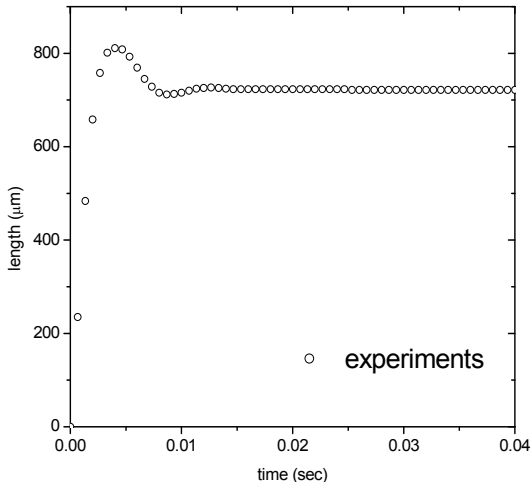


그림 9. 시간에 따른 높이 그래프

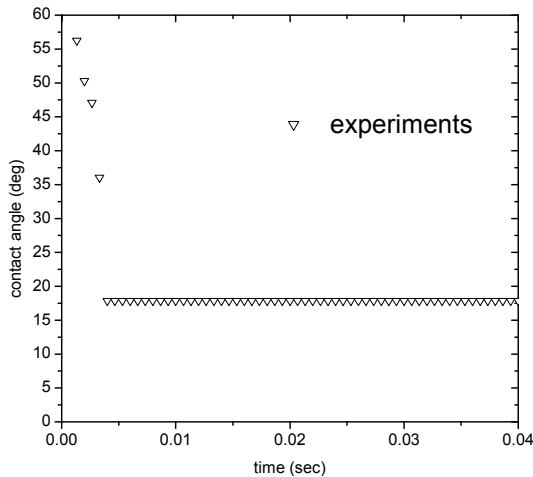


그림 10. 시간에 따른 접촉각의 변화를 보여주는 그래프

이 실험과 그림 6과 그림 11에서 볼 수 있듯이 진동이 없는 실험과 데이터를 비교하면 접촉각이 0초에서 약 0.02초까지 완만하게 감소함을 볼 수 있는데 진동이 있는 실험에서는 약 0.003초까지만 급격히 변한 후 일정해지는 것을 볼 수 있다. 실험에서 보여준 0.003초까지의 변촉각 변화가 유체의 이송에는 영향이 매우 적기 때문에 접촉각이 변화하지 않는다고 가정할 수 있다. 이를 토대로 그림 10과 같이 식(2)의  $\theta$ 값에 17.78°를 대입하여 그래프를 나타내고 실험 데이터와 비교하였다.

그림 11에서 보는 바와 같이 젖음성의 증가로 인하여 접촉각의 변화는 유체의 움직임에 무시할 만한 영향을 미치는 것으로 확인되며, 최종 높이는 실험값과 일치함을

알 수 있다. 따라서 앞선 경우와 마찬가지로 유체가 이송될 때 다른 요인이 진동에 영향을 주었다고 판단할 수 있다.

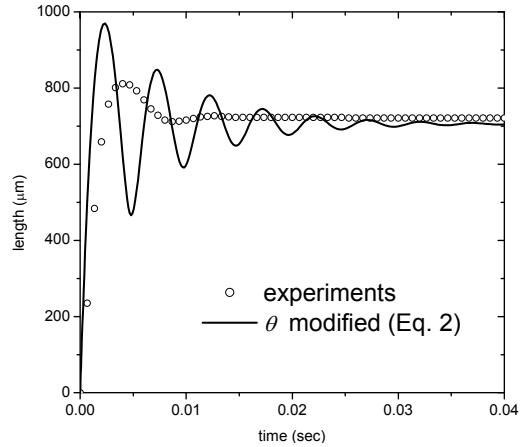


그림 11. 접촉각의 변화를 고려한 이론과 실험값의 비교 그래프

### 3.3 유체 침투현상에서의 전단응력의 영향

식(1)에서 점성력 항은 완전 발달된 층류 유동 모델을 기반으로 하는 Hagen-Poiseuille 방정식이며 달린 모세관 침투 현상의  $Re$ (Reynolds number,  $Re = \frac{\rho v d}{\mu}$ , 여기서  $\rho$ 는 유체 밀도,  $v$ 는 유체 속도,  $d$ 는 모세관 지름)는 112 정도이다. 이러한 층류유동의 경우에 입구길이는 약  $L_e \approx 0.06dRe \sim 2.3mm$ 이다. 따라서 이 값이 본 연구에서의 최종 유체이송거리보다 3배정도 긴 것을 확인할 수 있으며 이는 유체의 발달 속도가 열린 모세관에 비해 빠름을 의미한다. 따라서 달린 모세관에서의 침투 현상은 초기에 속도장이 2차방정식 형상이 아닌 평평한 모양의 유동장이 된다. 이런 경우 벽면에서 반지름 방향의 속도 구배가 크기 때문에 전단응력은 완전 발달된 유동에 비해 커지게 된다. 본 연구에서는 이 큰 전단응력을 고려하기 위해 점성력 항에 보정 계수  $K$ 를 곱해주었다. 상수  $K$ 를 식 (2)에 대입한 결과는 다음과 같다.

$$\frac{1}{Oh^2} \frac{d}{dT} \left( L \frac{dL}{dT} \right) + 8LK \frac{dL}{dT} - 2\cos(\theta(T)) - Bo(H-L) - \beta \left( 1 - \left( \frac{\chi_c}{\chi_c - L} \right)^\gamma \right) = 0 \quad (3)$$

식 (3)을 그래프로 표현한 것과 진동이 발생하지 않은 실험 데이터를 비교하면 그림 12와 같다. 그림과 같이  $K=7.3$ 일 때 진동이 완벽히 사라지는 것을 볼 수 있으며 실험 데이터와 근사한 값들을 가진다.

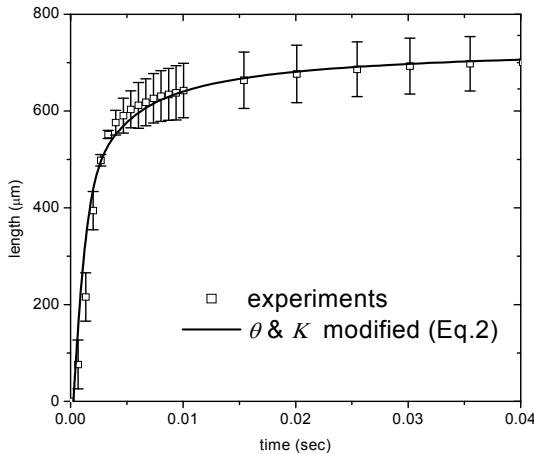


그림 12. 접촉각의 변화와 전단응력의 효과( $K=7.3$ )를 고려한 이론과 실험값을 비교한 그래프

3.3.1 진동이 발생한 유체 침투 현상

진동이 발생한 실험의 경우에도 전단응력을 고려한 보정계수  $K$ 를 넣어 계산하였으며 그 결과는 그림 13과 같다.

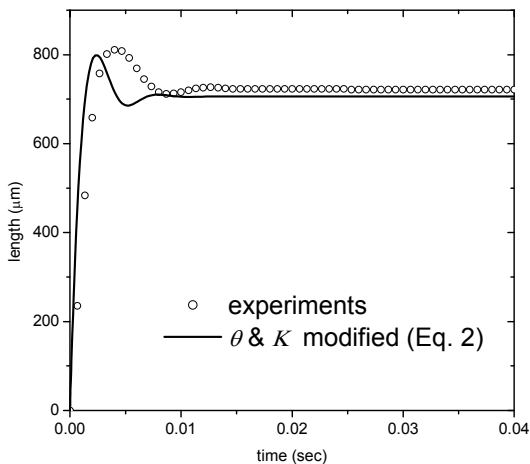


그림 13. 접촉각의 변화와 전단응력의 효과( $K=4.2$ )를 고려한 이론과 실험값을 비교한 그래프

이 경우  $K=4.2$ 일 때 실험의 데이터와 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 이는 표면에서 더 큰 전단응력을 받을수록 진동에 쓰이는 에너지를 소비하여 진동이 줄어들음을 뜻한다. 따라서, 표면처리를 통해 젖음성을 증가시켜 주면 전단응력에 의한 저항이 줄어들고 진동이 일어나게 된다.

4. 결론

본 연구를 통해 닫힌 모세관 내에서 발생하는 유체 침투 현상에 대하여 1차원으로 해석하고자 하였다. 이를 위해 닫힌 모세관 안 유동에 대한 관성력, 점성력, 표면장력, 정수압, 압력의 영향을 고려하여 지배 방정식을 세웠다. 이후 실험을 통해 이론의 정밀성을 판별하고자 하였으며, 실험을 진동이 있는 경우와 없는 경우로 나눠 각각의 특성에 따라 분석하였다. 먼저 실험에서는 유체의 반월판과 모세관 사이의 접촉각의 변화가 있음을 확인하고 이론식에 대입하는 작업을 통해 진동을 일정부분 감소시켰다. 또한 표면 전단응력이 유동과 밀접한 관련이 있음을 찾아 지배 방정식의 점성력 항에 보정계수  $K$ 값을 곱해 줄으로써 실험과 잘 맞는 이론 결과를 얻었다. 이 방정식의 해는 실험으로 얻은 결과와 매우 근사하여 방정식의 유효성을 확인 할 수 있었다.

후 기

본 연구는 농림수산식품기획평가원 고부가식품기술개발사업(313023-3)의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Bell, J. and Cameron, F. K., 1906, "The Flow of Liquids through Capillary Spaces," Journal of Physical Chemistry, Vol.10 (8), pp.658-674.
- (2) Lucas, V. R., 1918, "Ueber das Zeitgesetz des kapillaren Aufstiegs von Flüssigkeiten," Kolloid Zeitschrift, Vol.23 (1), pp.15-22.
- (3) Washburn, E. W., 1921, "The Dynamics of Capillary Flow," Physical Review, Vol.17 (Copyright (C) 2010 The American Physical Society), p.273.
- (4) Hoffman, R. L., 1975, "Study of Advancing Interface. 1. Interface Shape in Liquid-Gas

- Systems,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.50 (2), pp.228~241.
- (5) Jiang, T. S., Oh, S. G., and Slattery, J. C., 1979, “Correlation for Dynamic Contact-Angle,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.69 (1), pp.74~77.
- (6) Ichikawa, N. and Satoda, Y., 1994, “Interface Dynamics of Capillary-Flow in a Tube under Negligible Gravity Condition,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.162 (2), pp.350~355.
- (7) Siebold, A.; Nardin, M.; Schultz, J.; Walliser, A. and Opplinger, M., 2000, “Effect of dynamic contact angle on capillary rise phenomena,” *Colloids and Surfaces a-Physicochemical and Engineering Aspects*, Vol.161 (1), pp.81~87.
- (8) Chebbi, R., 2007, “Dynamics of liquid penetration into capillary tubes,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.315 (1), pp.255~260.
- (9) Xue, H. T.; Fang, Z. N.; Yang, Y.; Huang, J. P. and Zhou, L. W., 2006, “Contact angle determined by spontaneous dynamic capillary,” *Chemical Physics Letters*, Vol.432 (1~3), pp.326~330.
- (10) Lorenceau, E.; Quere, D.; Ollitrault, J. Y. and Clanet, C., 2002, “Gravitational oscillations of a liquid column in a pipe,” *Physics of Fluids*, Vol.14 (6), pp.1985~1992.
- (11) (a) Fries, N. and Dreyer, M., 2008, “The transition from inertial to viscous flow in capillary rise,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.327 (1), pp.125~128; (b) Fries, N. and Dreyer, M., 2008, “An analytic solution of capillary rise restrained by gravity,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.320 (1), pp.259~263; (c) Fries, N. and Dreyer, M., 2009, “Dimensionless scaling methods for capillary rise,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.338 (2), pp. 514~518.
- (12) Quere, D., 1997, “Inertial capillarity,” *Europhysics Letters*, Vol.39 (5), pp.533~538.
- (13) Zhmud, B. V.; Tiberg, F. and Hallstenson, K., 2000, “Dynamics of capillary rise,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.228 (2), pp.263~ 269.
- (14) (a) Young, W. B., 2004, “Analysis of capillary flows in non-uniform cross-sectional capillaries,” *Colloids and Surfaces a-Physicochemical and Engineering Aspects*, Vol.234(1~3), pp.123~128; (b) Polzin, K. A. and Choueiri, E. Y., 2003, “A similarity parameter for capillary flows,” *Journal of Physics D-Applied Physics*, Vol.36(24), pp.3156~ 3167; (c) Reyssat, M.; Courbin, L.; Reyssat, E. and Stone, H. A., 2008, “Imbibition in geometries with axial variations,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.615, pp.335~344; (d) Erickson, D.; Li, D. and Park, C. B., 2002, “Numerical simulations of capillary-driven flows in nonuniform cross-sectional capillaries,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.250(2), pp.422~430.
- (15) (a) Reyssat, M.; Sangne, L. Y.; van Nierop, E. A. and Stone, H. A., 2009, “Imbibition in layered systems of packed beads,” *Epl*, Vol.86(5), pp. 56002-1~6; (b) Hamraoui, A. and Nylander, T., 2002, “Analytical approach for the Lucas-Washburn equation,” *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol.250(2), pp.415~421; (c) Gruener, S.; Hofmann, T.; Wallacher, D.; Kityk, A. V. and Huber, P., 2009, “Capillary rise of water in hydrophilic nanopores,” *Phys Rev E*, Vol.79(6), pp.067301-1~ 4; (d) Siddique, J. I.; Anderson, D. M. and Bondarev, A., 2009, “Capillary rise of a liquid into a deformable porous material,” *Physics of Fluids*, Vol.21(1), pp.013106-1~15.
- (16) Deutsch, S., 1979, “Preliminary-Study of the Fluid-Mechanics of Liquid Penetrant Testing,” *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol.84(4), pp.287~292.
- (17) Radiom, M.; Chan, W. K. and Yang, C., 2010, “Capillary filling with the effect of pneumatic pressure of trapped air,” *Microfluidics and Nanofluidics*, Vol.9(1), pp.65~75.
- (18) Fazio, R. and Iacono, S., 2009, In *Entrapped Gas Action for One-Dimensional Models of Capillary Dynamics*, Proceedings of the World Congress on Engineering, London, U.K., London, U.K..
- (19) H, Lim, A., Tripathi. and J, Lee., 2014, “Dynamics of a Capillary Invasion in a Closed-End Capillary,” *Langmuir*, In Press