Journal of the Korean Association for Science Education, 34(4), 335～347, 2014

Journal of the Korean Association for Science Education
Journal homepage: www.koreascience.org

척도개념의 이해: 수학적 구조 조사로 과학교과에 나오는 물질의 크기를 표현하는 학생들의 이해도 분석

박은정*
이화여자대학교

Student Understanding of Scale: From Additive to Multiplicative Reasoning in the Constriction of Scale Representation by Ordering Objects in a Number Line

Eun-Jung Park*
Ewha Womans University

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 13 February 2014
Received in revised form
23 June 2014
10 June 2014
Accepted 13 June 2014

Keywords:
size and scale,
number,
multiplicative reasoning,
operation

A B S T R A C T

Size/scale is a central idea in the science curriculum, providing explanations for various phenomena. However, few studies have been conducted to explore student understanding of this concept and to suggest instructional approaches in scientific contexts. In contrast, there have been more studies in mathematics, regarding the use of number lines to relate the nature of numbers to operation and representation of magnitude. In order to better understand variations in student conceptions of size/scale in scientific contexts and explain learning difficulties including alternative conceptions, this study suggests an approach that links mathematics with the analysis of student conceptions of size/scale, i.e. the analysis of mathematical structure and reasoning for a number line. In addition, data ranging from high school to college students facilitate the interpretation of conceptual complexity in terms of mathematical development of a number line. In this sense, findings from this study better explain the following by mathematical reasoning: (1) varied student conceptions, (2) key aspects of each conception, and (3) potential cognitive dimensions interpreting the size/scale concepts. Results of this study help us to understand the troublesomeness of learning size/scale and provide a direction for developing curriculum and instruction for better understanding.

Ⅰ. 서론

관찰(observation, Hodson, 1985; Hofstein & Lunetta, 1982)과 측정(measurement)을 기본으로 하는 과학 교과에서 “크기(size)”와 이를 나타내는 “척도(scale)”는 물질의 물리적 속성(physical property of matter)과 과학적 현상(scientific phenomenon)을 이해하도록 돕는 중요한 개념이다. 이는 크기가 단순히 물질의 물리적 특성을 나타내는 지표임을 넘어 여러 분야에 걸쳐 나타나는 다양한 과학적 현상을 예측하고 설명하는 주요변수로 작용함과 관련이 있다. 예를 들어, 최근 여러 분야에서 관심을 받고 있는 나노과학 역시, 나노물질의 크기가 과연 얼마나 작은 것인지, 크기가 작아서 무슨 현상이 관찰될 수 있는 것인지, 크기 변화에 따른 물성 변화는 무엇인지 등, “크기와 그 변화”를 키워드로 주목을 받고 있는 과학의 영역이다. Tolman(Redlich, 1970)의 구분에 따라 변화가 가능하고 크기에 무관한 세기성질(intensive property)과 크기에 비례하는 크기성질(extensive property)로 구분하여 설명하였던 매크로척도(macroscale)에서의 물질의 특성은 나노척도(nanoscale)에서 다른 현상, 즉 세기성질이 변화되는 것을 보이는데, 이를 설명하려는 나노과학 분야의 많은 연구는 물질의 크기가 물질의 속성을 변화시키는 중요한 변수임을 보여준다. 이를 반영하듯, 미국의 과학교육과정지침은(National Science Education Standards, NRC, 1996) "크기와 척도"를 모든 과학 교과를 연결하고 하나로 아우르는 중요한 개념이라 명시해 두었고, 차세대 과학 인재개발을 위해 설립된 나노과학/공학 교수학습센터 (NCLT: National Center for Learning and Teaching in Nanoscale Science and Engineering)은 “크기와 척도”를 이 분야의 주요개념을 설명하는 핵심이며 발전의 방향성을 제시해주는 Big Idea 중 하나라고 설명하고 있다(Stevens, Sutherland, & Krajcik, 2009). 이러한 “크기와 척도” 개념은 원자단위의 작은 물질뿐 아니라 반대의 극단에 있는 천문학적 시간이나 공간 또는 지질학적 시간 등을 나타냄에서도 아주 중요한 과학의 개념임을 알 수 있다(Cheek, 2010; Trend, 2000; Zen, 2001). 이는 우리나라 과학 교과에서도 마찬가지로 적용되며 특히, 물질의 크기란 무엇을 의미하며, 어떻게 측정하고, 또 표현할 수 있는지는 과학의 여러 단원에서 기본개념으로 가르치도록 도입하고 있다. 이처럼 물질의 크기를 알고 정확히 측정하고 표현하는 것의 중요성은 인식되어 있지만, 이렇듯 여러 영역의 도입부에 제시되어서인지, 일반적으로 학생들은 “크기나 척도”를 쉬운 개념이라고 여기며, 교사들 또한 대부분의 학생이 잘 이해하는 것으로 추측하고 단원내용에 맞추어 설명은 하지만, 강조할 개념이라고 생각하지는 않는 것 같다. 그러나 이와 관련된 선행 연구들을 살펴보면,

* 교신저자 : 박은정 (ejpark2012@sookmyung.ac.kr)
** 본 연구는 2011학년도 이화여자대학교 연구교수 지원 사업에 의한 결과임.
http://dx.doi.org/10.14697/jkase.2014.34.4.0335

물질의 크기를 제대로 이해하지 못하거나 척도로 나타내는 것을 어려워하는 학생들이 뜻밖에 많다는 것을 알 수 있다(Lamon, 1994; Tretter *et al*., 2006; Tretter, Jones, & Minogue, 2006; Jones *et al*, 2006). 이와 같은 어려움은 단지 물질의 크기를 정확히 알지 못하는 정확성에 관한 오류로만 그치는 것이 아니다. 정확한 크기를 개념화하고 상대적 크기의 비교를 통해 차이를 분명하게 나타낼 수 있을 때 관련된 과학적 현상을 적절히 설명할 수 있는 것뿐 아니라 이를 근거로 자연 현상을 과학적으로 예측하는 것이 가능하고 더불어 과학적 사고를 진작시킬 수 있기 때문이다. 또한, 물질의 크기를 나타내는 척도에 관한 학생들의 부족한 이해는 개념이해의 어려움에서 그치는 것이 아니라 종종 연관된 개념을 추론하거나 개념을 확장해 나가는 과정에서의 어려움으로 이어진다. 실험 보고서 등에 결과나 과정을 나타내는 그래프를 만들어 첨가할 때 좌표축을 설정하는 과정에서도 이와 같은 현상은 쉽게 관측할 수 있다. 예로, 좌표축의 척도 표현을 올바르게 하지 않으면, 그래프에 표시된 좌표 값들의 함수관계를 구할 때 읽어내어야 하는 값들이 달라져서 얻어야 하는 값에 원하지 않는 오류를 범하는 경우가 이에 해당한다.

흥미로운 점은, 위의 예처럼 크기를 어림잡는 것, 그래프나 수직선을 이용하여 척도로 크기를 표현하는 것은 비단 과학교육에서만 관심있어 하는 주제가 아니라는 것이다. 실제로 사물의 수, 크기, 또는 양을 어림잡거나(estimation) 그것을 정확하게 표현하는 것은 (number line description) 수학에서 수의 개념 형성과 발달, 표현법의 습득, 나아가서는 연산에 관한 사고로 발전되는 중요한 개념이다. 실질적으로 수(number)와 수직선(number line)은 수학 사에서의 진화 혹은 연산에 관한 수학적 사고(mathematical reasoning)의 인지발달과 관련해 수학교육 연구의 주요 주제였다(Booth & Siegler, 2006 & 2008; Dehaene, 2011; Kadosh, Tzelgov, & Henik, 2008; Lamon, 1993; Lesh, Post, & Behr, 1988; Piaget, 1987; Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith, 2009; Siegler & Opfer, 2003; Smith & Confrey, 1994; Vergnaud, 1983). 예를 들어, Smith와 Confrey는 학생들이 만든 수직선 (number line)을 분석하여 수학의 역사에서 수개념과 사칙연산(four arithmetic operations)이 발달한 경로에 비춰 아동의 수학적 사고를 해석하였다. 특히, 그들은 물질의 크기를 이해하는 과정에서 비례개념을 어떻게 형성하는지를 집중적으로 관찰하여 "수와 크기"에 관한 아동의 사고가 덧셈적 변화(additive increment)를 보는 관점에서 곱셈적 변화(multiplicative increment)를 이용하는 단계로 발달해 가는 것을 밝혔다. 연구에서 드러난 각 단계를 구체적으로 보면 덧셈적 사고는 군/계열 만들기(grouping)에서 숫자세기(counting)의 두 단계로 변화하며, 곱셈적 사고는 세 유형(repeated addition → ratio/proportion → exponential/logarithmic function)으로 변화가 진행된다고 설명하고 있다. 연구의 주요 관심이었던 비례개념의 형성을 더욱 자세히 이해하기 위해 위 연구가 제시한 곱셈적 사고의 세 유형은 다음과 같다. 첫째, 덧셈으로 곱셈을 이해하는 유형(multiplication by repeated addition, 예를 들면 3x4=12를 3+3+3+3=12의 반복적 덧셈으로 배수를 이해), 둘째, 곱셈으로 곱셈을 이해하는 유형 혹은 비례를 이용한 곱셈적 사고 유형 (예를 들면, 물고기의 길이가 두 배 차이가 날 때 즉 5cm와 10cm의 두 물고기가 있다면 이들의 먹는 양도 50g에서 100g으로 2배 증가라고 대답하는 경우), 셋째, 지수(일반적으로 10^n)나 로그 (일반적으로 $\log10^n$)의 체계를 이용해 비례 값을 구하고 상대적 크기의 배수 관계를 파악하는 유형이다. 덧붙여, Smith와 Confrey는 덧셈적 사고와 곱셈적 사고 사이에 존재하는 틈 혹은 난관을 들어 학생들이 비례의 개념을 이해하기 위해서는 덧셈에서 곱셈으로 가는 과정에 존재하는 어려움을 극복해야 한다고 설명하고 있다. 이에 대해, Clark와 Kamii (1996)는 두 사고 사이에 이해수준(levels of understanding)의 차이가 있다고 보았다. 즉, 곱셈적 사고로 문제를 해결할 수 있는 것을 보다 상위수준의 이해도 혹은 인지능력으로 해석했다. 수학 사적 맥락에서 덧셈에서 곱셈으로 수와 연산이 발전해 온 것처럼 학생들의 개념이해도 덧셈적 수의 전개에서 곱셈적 수의 전개로 진화 혹은 발달한다고 설명하였다. 특히, "수"에 관한 인지구조 발달을 아동발달의 프레임 속에서 설명한 Piaget의 연구를 적용하여 초등학생들, 특히, 구체적 조작기(concrete operation stage)와 형식적 조작기(formal operation stage)의 경계에 있는 학생들이 겪는 수학개념 이해의 어려움을 집중적으로 분석하였다. 이처럼 수 개념의 사고체계를 인지구조 발달과 함께 연결하는 것은 우리나라의 수학과 교육과정에도 잘 반영되어있다. 실제 우리나라 수학과 교육과정의 "수와 연산" 단원을 보면 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 초등학교 1~2학년 군에서 도입하고 곱셈, 나눗셈, 분수, 소수, 자연수의 혼합계산을 3~4학년 군에서 가르치도록 권장한다. 또한, 수학의 "측정" 단원을 보면 양과 길이의 비교와 읽기를 1~2학년 군에서, 3~4학년 군에서는 측정의 대상에 해당하는 시간, 길이, 무게, 각도 등의 개념에 관한 학습을 하고 5~6학년 군에서는 덧셈, 곱셈 등의 연산을 바탕으로 하는 측정값을 계산하는 법을 배우게 되어있다. 동시에 이 시기의 학생들은 비, 비율, 비례식과 비례배분, 정/반비례의 관계를 이해하고 활용할 수 있도록 지도받는다. 5~6학년 군에서 익힌 연산과 비례의 규칙성은 중학교 과정의 "수와 연산"으로 보다 복잡한 계산을 포함하는 개념들로 확장되고 지수와 로그에 관한 설명과 문제풀이는 고등학교의 수학2 과정에서 학습하도록 권장하고 있다 (2009개정 수학과 교육과정 참고, 교과부).

초등학교 5~6학년이 되면 형식적 조작기(formal operation period)에 해당하여 비례를 포함한 곱셈적 사고가 가능한 인지발달 단계라 볼 수 있고 학교에서는 교육과정에 관련 개념을 배우게 되어 있으므로 보다 상위 학년인 중-고등학교 학생들은 곱셈적 사고에 해당하는 비례관계를 잘 이해하고 수직선에 지수/로그함수형 척도를 쉽게 그려서 물질의 상대적 크기를 비교할 것으로 추정된다. 하지만 수학교육 분야의 많은 연구는 예상보다 많은 중-고등학교 학생들이, 심지어는 대학생들조차도 비례개념을 어렵게 생각하고 있다는 것을 보고하고 있다 (An, 2008; Hart, 1981 & 1988; Kamii & Livingston, 1994; Lindquist, 1989; O'Brien & Casey, 1983; Siemon, Breed, & Virgona, 2006; Siemon & Virgona, 2001). 여기서, 학생들이 겪는 어려움은 단지 비례의 개념을 아느냐에만 머무는 것이 아니다. 이는 앞으로 배워야 할 과학과 고등 수학의 기초개념이므로 해당 분야의 관련 개념을 이해하거나 문제를 푸는 과정에서 역시 어려움을 겪을 것으로 예측할 수 있다는 것이다. 이를 반영하듯 비례 개념은 미국의 교육과정 지침(NCTM standards)을 비롯해 많은 연구에서 중요성이 강조되었고, 비례개념을 포함한 곱셈적 사고를 하는 데 있어 학생들이 겪는 어려움 역시 함께 거론되어왔다(Ben-Chaim *et al*, 1998; Kim & Bang, 2013; Lesh, Post, & Behr, 1988; Tournaire & Pulos, 1985). 여기서, 다시 과학 교과에서 사용되는 비례개념을 살펴보면, 앞서 언급한 것처럼 과학의 다양한 현상을 설명할 때 사용하는 그래프 표현이나 문제풀이

과정에서 비례나 곱셈의 과정을 쉽게 접할 수 있다. 더욱이, 많은 과학 현상이 비의 관계로 정의되거나 설명된다. 예를 들어 속도는 거리와 시간의 비례 값이며 밀도는 질량과 부피의 비례 값이다(속도=거리/시간, 밀도=질량/부피). 또한, 이상기체 상태방정식은(PV=nRT) 보일의 법칙, 샤를의 법칙 등으로 식 내의 변수 간 비례관계를 이용해 이상기체의 속성을 설명한다. 이처럼, 인식하지 못하고 있지만, 과학의 많은 현상들이 비례의 관계를 바탕으로 설명된다는 것은 수학의 곱셈적 사고를 바탕으로 한 비례의 개념을 잘 이해하지 못한다면 학생들은 결과적으로 과학적 현상의 이해나 문제풀이 과정에서 어려움을 겪게 될 것을 의미한다. 실질적으로 수학과 과학 분야의 다양한 연구가 그 상관관계를 잘 설명하고 있다(Akatugba & Wallace, 1999; Angell *et al*, 2008; Beland & Mislevy, 1996; De Lozano & Cardenas, 2002; Guckin & Morrison, 1991; Hines & McMahon, 2005; Lamon, 1993; Prain & Waldrip, 2006). 예로, Akatugba와 Wallace(1999, 2009)의 일련의 연구를 보면 수학 시간에 곱셈을 이용해 두 값 사이의 비를 비교적 잘 구하던 고등학생들이 물리 시간에 교과서에 나와 있는 문제를 풀어 계산할 때 비례관계를 잘 설정하지 못하고 어려워하는 것이 보고되었다. 밀도 개념의 이해나, 몰분율, 산-염기 적정의 계산과정 등에서도 두 측정값 사이의 비(비례)가 의미하는 것이 무엇인지 알지 못할 뿐 아니라 주어진 공식을 암기하여 적용하는 수준의 이해에 그치는 예가 여러 연구에 보고되어 있다(Bar, 1987; Dawkins *et al*., 2008; Evans *et al*., 2008; Kohn, 1993; Smith, 1997; Streefland, 1984; Wagner, 2001). "수학은 쉬운데 과학은 어렵다?" 몇몇 사전연구를 보면, 이 같은 불균형은 숫자를 문자로 대체하는 과정 혹은 과학적 현상을 해석하기 위해 수학적 문제풀이를 적용할 때의 전환적 사고(translation)가 어려운 것이라 해석하고 있다(De Lozano, *et al*, 2002; Erickson, 2006). 하지만 본 연구는 전환적 추상화 단계 이전에 수학이 쉬웠던 것이 아니라 공식을 이용한 산술적 계산(algorithmic calculation)이 쉬웠을 뿐 수학적 개념의 이해, 특히 위의 예 같은 경우 "비례를 바탕으로 한 곱셈적 사고"가 유의미한 수준에서 이루어지지 않았을 것으로 생각한다. 다시 말하자면, 수학적 구조를 포함하고 있는 과학의 개념은 수학과 개념이 분리된 개체로 존재하는 것이 아닌 하나의 구조체로 해석해야 한다. 예로 제시된, 속도나 밀도는 계산을 위한 수학(v=d/t & d=m/v)과 과학적 개념이 다른 차원으로 존재하는 것이 아니라, "두 값(value)의 비"라는 수학적 의미가 "두 측정값(measure: 시간과 거리 혹은 부피와 질량)의 비"라는 과학적 개념과 다르지 않음을 이해할 수 있어야 한다. 이러한 관점에서 본 연구가 현재 많은 관심을 받고 있는 STEM 혹은 수학과 과학 혹은 기술을 바탕으로 한 융합교육에 시사하는 바가 클 것으로 본다. 알고리듬적 계산을 할 수 있게 돕는 차원을 넘어 올바른 수학적 구조를 적절히 형성하도록 교육하는 것은 수학뿐 아니라 유의미한 수준의 과학개념 이해와 문제풀이를 위해서도 아주 중요함을 알 수 있다. 학생들이 과학 교과에 나오는 문제풀이나 수식, 그래프 등의 수학적 표현이나 계산이 싫고 어려워 과학에 흥미를 잃기도 한다는 연구의 결과는 두 교과의 관련성과도 무관하지 않을 것이며 이를 위한 효과적 융합교육의 필요성을 더욱 강조해준다(De Lozano & Cardenas, 2002; Oon & Subramaniam, 2011; Prain & Waldrip, 2006; Park & Choi, 2010). 제시된 바와 같은 융합형 수업을 설계하기 위해서는 수학과 과학의 두 교실에서 학습의 목표는 각각 다를지라도 내용과 소재를 공유할 수 있는 공통 접점에 해당하는 주제를 찾는 것이 중요하다. 다양한 잠재성을 지닌 주제들 가운데 본 연구에서 다루는 "크기와 척도"는 수학과 과학의 중요개념이며 동시에 두 교과의 상위개념을 연결하는 근간이 되는 개념이라는 점에서 눈여겨 볼만한 주제이다.

하지만, "크기와 척도"는 과학교육보다는 수학교육의 분야에서 더 많은 관심을 받고 연구되어왔다. 수 개념과 수직선에 관한 수학교육 분야의 연구를 구체적으로 살펴보면 본 연구에서 보고자 하는 과학교실에서의 "크기와 척도" 개념의 이해와도 직접적인 연관성이 있음을 알 수 있다. 따라서 본 연구는 수학교육에서 설명한 "수 개념과 연산"의 수학적 사고를 인지구조 발달의 관점으로 체계화하여 물질의 "크기와 척도"를 이해하는 학생들의 사고를 해석하는 데 사용하려 한다. 이를 위해 앞서 언급한 Smith와 Confrey의 1994년 연구와 함께 학생들이 이해하는 "크기와 척도" 개념을 과학적 맥락에서 조사한 Swarat *et al*.의 2011년 연구를 참고하였다. Swarat *et al*.의 연구는 학생들은 크기를 구분하고 척도를 표현함에 자신의 기준을 지니고 있으며 그것을 기반으로 하는 척도유형으로 물질의 크기를 비교하고 있다고 설명한다. 이 연구는 학생들의 응답을 바탕으로 일반적으로 적용되는 네 가지 기준(절대적: absolute, 상대적: relative, 대상중심: object-based, 체계중심: system-based)을 밝혀내었고, 그 기준으로 나눈 척도의 유형은 다음과 같다고 소개하고 있다; 분절형: fragmented, 선형: linear, 비례형: proportional, 로그함수형: logarithmic scale. 물질의 크기를 비교하고 있다고 설명한다. 분절형척도(fragmented scale)은 물질의 크기가 연속성을 띄며 수직선 상에서 함께 비교될 수 있는 것이 아닌 성격이 다른 세계(detached world)에 각각 분리되어 속하는 것으로 해석하는 경우이다. 선형척도(linear scale)는 절대적 차이를 보여주는 기준으로 작은 영역에서 큰 영역으로 균일한 점진적 변화(증가/감소)를 보이는 척도이고, 비례형척도(proportional scale)는 두 크기의 상댓값 혹은 비례 값을 구하여 그만큼의 공간적 거리를 표기한 형태이며, 로그함수형척도(logarithmic scale)는 10의 지수나 자연로그값이라는 체계(system)를 이용하여 균일한 간격을 만든 후 상대적 크기를 표기함과 동시에 척도를 실체가 아닌(unreal) 편이를 위한 도구로 생각하는 유형이다. 이 선행연구는 학생들의 개념이해 유형을 찾아 내용의 복잡성(complexity)과 의미의 포괄성(inclusiveness)에 따라 차례대로 나열하여 하나의 유형표(typology)로 정리하였다(Table 1, Swarat *et al*, 2010). 본 연구는 위 선행연구에 참여한 대학생들의 인터뷰 자료와 고등학생들을 대상으로 행한 추가 인터뷰데이터를 재분석하였다. "수와 연산"의 개념발달에 따른 수학적 사고구조를 이용해 학생들의 "크기와 척도" 개념 이해도를 분석-평가하였고, 밝혀진 유형들 사이의 상관관계를 조사하여 연구의 결과가 내포하는 교육학적 의미도 함께 고찰하였다. 수학적 구조를 이용한 해석은 앞선 연구(Swarat *et al*, 2010)에서 설명이 모호했던 네 가지 유형 사이에 존재하던 아래 단계들(sub categories)을 분명히 구분하도록 도왔고 더불어 전환 단계에 있는 유형을 밝히는 기준이 된 것에 그 의의가 있다. 이러한 해석은 수학과 과학, 두 교과 간의 틈을 줄일 뿐 아니라 연결점을 찾아 학생들의 개념이해와 어려움의 원인을 분석하는데 폭넓은 시각을 제공할 것이다. 이는 비단 개념이해뿐 아니라, 최근 많은 관심을 받고 있는 STEM 혹은 수학-과학 융합 수업을 위한 소재로서의 "크기와 척도" 개념의 사용 가능성을 보여준다.

II. 연구방법

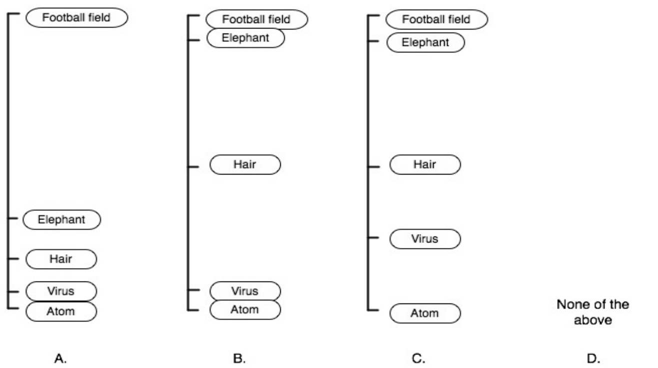
1. 연구대상

크기와 척도 개념의 이해를 조사하기 위해 미국 중서부에 위치한 한 연구중심 대학에 재학 중인 20명의 이공계 계열의 대학생들과 같은 지역에 위치한 한 고등학교의 물리 수업을 듣는 7명의 학생이 본 연구에 참여하였다. 첫째, 나노과학/공학 교수학습센터(NCLT)가 나노 융합과학 분야의 Big Ideas로 선정한 개념을 (1. Size & Scale, 2. Structure of Matter, 3. Forces & Interactions, 4. Quantum Effects, 5. Size-dependent Properties, 6. Self-assembly, 7. Tools & Instrumentation, 8. Models & Simulations, 9. Science, Technology, & Society) 중심으로 해당 계열이나 과에 마련된 수업을 수강한 대학생들이 연구의 대상으로 선정되었다. 본 연구가 제시한 과제 수행을 동반한 인터뷰에 참여한 대학생들은 전공과 학년에 따라 세 그룹으로 나뉜다. (1) 비과학/공학계열의 다양한 전공으로 나노과학의 기초 수업을 듣는 8명의 학생과 (2) 공학 설계과목에서 나노과학의 기본적 지식을 배우는 8명의 공학계열 전공자들과 (3) 재료과학 상급과정에서 나노과학과 관련된 지식을 배우는 4명의 과학계열 전공자들이 본 연구에 참여하였다. 세 그룹 모두, 나노-융합과학의 Big Ideas를 과목의 특성에 맞게 재구성한 수업을 듣는 기간에 본 연구의 인터뷰에 참여하였다. 둘째, 고등학생을 대상으로 한 인터뷰의 경우는, NCLT에서 교사를 위해 제공한 나노-교육 관련 프로그램에 참석했던 한 물리교사가 재직하고 있는 인근 고등학교에서 실행되었다. 연구진은 교사, 학교, 학부모의 동의로 물리 과목을 수강하는 123명의 학생에게 아래의 수행과제를 포함한 설문(6문항)을 나누어 주었고 학생들의 응답을 분석하고 유형별로 나누어 추가 인터뷰 연구를 요청하였다. 본 연구는 추가 인터뷰에 참여한 7명 학생의 응답 분석을 포함한다.

2. 수행과제

학생들이 물질의 “크기”를 어떻게 생각하고 “척도”에 그 상대적 크기를 나타내는지 알아보기 위해 사전에 실시한 파일럿 인터뷰 결과를 분석하여 찾아낸 유형을 재 조합하여 질문과 선택답안을 만들었다. 파일럿 분석에서 분절형, 선형, 비례형, 로그함수형의 4가지 유형을 밝혀냈지만, 비례형과 로그함수형의 경우 지면을 이용한 과제에서 구분을 요구하는 것이 어려워 하나의 유형으로 묶어 총 3가지 답안을 만들고 기타에 해당하는 항목을 포함하여 사지선다형으로 과제를 만들어, 참여 학생들에게 수행하도록 하였다. 더불어, 인터뷰를 진행하여 수행과제에서 선택한 답안에 대한 학생들의 자세한 설명을 이끌어내었다. 연구에 사용된 과제는 아래에 제시되어있다. 과제를 살펴보면, 축구장, 코끼리, 사람의 머리카락, 바이러스, 원자의 크기를 m 단위 값으로 주고 참여한 학생들에게 물질들의 크기를 가장 적절히 나타낸 척도유형을 고르게 하였다. 응답 A는 점진적 차이로 증가 혹은 감소하는 선형 척도의 파일럿 데이터를 재구성한 것으로 작은 물질들 사이의 간격은 가깝지만 큰 물질과의 간격이 크게 나타나 있으며, 응답 B는 익숙한 사람의 머리카락을 기준으로 크다 혹은 적다를 구분한 분절형 척도의 유형을 표현하였고, 응답 C는 비례적 관계를 이용해 척도를 구성한 비례형/로그함수형 척도의 유형을 재구성하였다. 연구에 참여한 대학생들은 인터뷰 중에 아래의 과제를 수행하며 자신이 선택한 답에 관해 설명하였고, 고등학생들은 인터뷰에 응한 학생들만 사전에 작성한 설문에 표기한 답을 구체적으로 설명하는 방식으로 연구가 진행되었다. 인터뷰는 약 30여 분간 소요되었으며 대학 내의 연구실 (대학생들 대상인터뷰)와 고등학교 과학실(고등학생들 대상인터뷰)에서 각각 실행되었다.

Task Question: A group of students were asked to create a scale that best represents the relative size differences of the following objects: the length of football field (about 91 meters), the height of an elephant (about 3 meters), a diameter of a human hair (about 0.0001 meters), the diameter of a virus (about 0.0000004 meters), and the diameter of an atom (about 0.0000000001 meters). Here are some examples of what they created. Which one of the following do you think is the most appropriate scale?



3. 자료 분석

인터뷰 응답은 Smith와 Confrey(2004)의 연구를 기반으로 하여 크게 Pre-additive(PA: 덧셈적 사고 이전), Additive(A: 덧셈적 사고), 그리고 Multiplicative(M: 곱셈적 사고)의 세 유형으로 나누고 세부적인 차이는 수 개념의 발달과 연산에 관련된 수학교육 분야의 문헌을 참고하여 분석기준을 구성하고 수학교육 분야의 전문가(박사학위 소지) 2인과 상의하여 내용검증을 거쳤다. 토론에 제안된 견해를 모두 충족하는 7가지 유형으로 범주를 정리하였고. 수학적 사고의 발달단계에 비추어 범주의 순서와 위치를 결정하여 하나의 틀을 만들었다. 덧셈적 사고 이전(pre-additive reasoning)의 척도 유형은 단순한 군/계열 만들기(grouping), 즉, 기준이 되는 무엇과 같다, 혹은 더 크거나 작다의 구분으로 물질의 크기를 표현하고 상호 비교하는 유형으로 산술적 연산의 과정을 포함하지 않는다. 덧셈적 사고(additive reasoning) 유형은 단순히 수의 점진적 증가, 즉 숫자를 세는 과정(+1, +2, 혹은 더 큰 단위: A_c)으로 척도를 구성하거나 연산(덧셈과 뺄셈: A_o)을 통해 그 차이를 이용하여 척도를 구성하는 두 가지 유형으로 구분하였고 곱셈적 사고 (multiplicative reasoning) 유형은 Smith와 Confrey의 연구에서처럼, 반복적 덧셈, 비례적 사고, 10의 지수나 로그를 이용한 곱셈적 사고에 바탕을 둔 네 가지 범주로 구분하였다. 아래 Table 1은 본 연구에 사용된 일곱 유형을 개념발달 순서에 따라 배열한 것이다.

과학교육 박사 1인, 과학교육 석사1인, 수학교육 석사 1인으로 구성된 세 명의 연구자들이 27명 학생의 인터뷰 데이터를 먼저 읽고 학생

Table 1. Mathematical structure framing student conceptions of size and scale

Mathematical developmental stage		Description
Pre-Additive	PA	Grouping : bigger, smaller, the same
Additive	A_c	Counting : one-to-one, doubling, skipping
	A_o	Applying operations : part/part or part/whole (addition & subtraction)
Multiplicative	M_a	Multiplication by repeated addition
	M_r	Applying operations : part/part or part/whole (multiplication & division → ratio)
	M_{p10}	Multiplication by powers of 10
	M_l	Multiplication by logarithmic functional operation

들의 “크기와 척도” 개념을 이루고 있는 수학적 사고구조가 무엇인지를 각각 평가한 후, 결과를 함께 비교하며 해당하는 유형을 최종적으로 결정하였다. 이때, 연구자 간 유형분석은 24명의 응답분석이 일치하여 높은 신뢰도를 얻었고(88.9% 일치율), 일치하지 않는 3명의 데이터는 토론을 거쳐 공통의 유형을 얻어내었다.

III. 연구결과 및 논의

1. 수학적 구조를 적용한 “크기와 척도” 유형

본 연구에 참여한 학생들이 제시한 물질의 상대적 크기를 나타내는 척도는 덧셈적 사고 이전 단계(PA)에서 곱셈적 사고 단계(M)까지 다양하였다. 각 척도 유형의 속성과 해당하는 학생들의 응답 예를 아래에서 차례로 설명할 예정이다.

가. 덧셈적 사고 전 단계(Pre-Additive Reasoning Stage, PA)

처음으로 분류된 척도의 유형은 각 학생에게 익숙한 물질을 기준(landmark object or scale landmark)으로 “더 크다” vs. “더 작다”로 그룹을 나누어 구분한(grouping) 것이다. 고등학생 SW[1]의 척도가 여기에 해당하는데 그는 우선 B를 답으로 선택하였고 아래의 인터뷰 발췌문에서 볼 수 있듯 물질들을 “in meters”와 “less than a meter”의 두 그룹으로 나누어 배치하였다. 주로 보아 크기가 익숙한 사람의 키나 몸 일부를 기준으로 머릿속의 삼차원 공간(spatial scale)에서 상대적 크기를 빠르게 측량한다고 한다고 언급했던 Tretter *et al*. (2006, p298) 연구의 결과처럼 고등학생 SW도 사람의 크기를 1m 근처(a meter long)로 기준 잡고 “1m보다 작은”을 아주 작은(extremely small) 크기의 물질 범주로 하나로 묶고 “더 큰”에 해당하는 물질들은 “수 미터(meters)”의 한 그룹으로 포함하였다. 아래는 SW의 인터뷰 발췌문이다.

Interviewer: B? Can you explain more?

SW: The elephant and the football field are both in meters, so they're both relatively around the same thing. Whereas the hair, the virus, and the atom are all - they're all less than a meter and they're extremely small, so they'd more be grouped together lower down, whereas like, this one here - there's too big of a gap between the football field and the elephant. And for here, I feel like the virus and the atom would be - should be closer together (pointing the gap between ‘football field and elephant’ and ‘virus and atom). There are about 7 zeros here, so overall they're both extremely small and that probably…

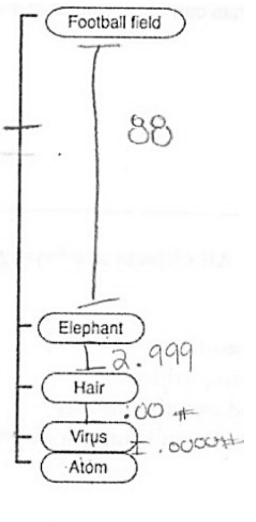
인터뷰 내용을 보면, 미터(m) 단위를 쓰고는 있지만 하나의 연속된 수 체계를 갖고 물질의 크기를 서로 비교하기보다는 물질을 구분하는 기준 속성으로만 삼고 있어 척도의 연속성을 기반으로 사고하지 않는 것으로 보인다. 축구장과 코끼리는 “수 미터”로 거의 크기가 같으므로 좀 더 가까워야 하며, 소수점 이하의 0의 숫자가 많은 원자와 바이러스는 굉장히 작아 크기가 거의 같으니 좀 더 가깝게 그려졌어야 한다는 설명이 수학적 사고구조로 보면 군 만들기(grouping) 단계, 즉 Smith와 Confrey가 덧셈적 사고의 시작으로 설명한 점진적 변화를 바탕으로 하는 수세기(counting)보다 이전의 단계에 머물러 있음을 알 수 있다.

나. 덧셈적 사고 단계(Additive Reasoning Stage, A)

덧셈적 사고에 바탕을 둔 척도가 다음 단계로 설정되었다. 본 연구에서는 수학적 사고구조 중 두 가지 유형(Ac & Ao)을 덧셈적 사고를 바탕으로 한 척도의 기준으로 보았다. 첫째는 많은 문헌에서 언급된 수세기(counting)를 바탕으로 한 덧셈적 사고로 +1 (1, 2, 3, 4, 5, …) & +2 (2, 4, 6, 8, 10, …) 혹은 +10 (10, 20, 30, 40, …) & +100 (100, 200, 300, 400, 500, …)과 같은 보다 큰 단위로 점진적 변화(증가/감소)를 만드는 척도를 우선 만들어 놓고 해당하는 물질을 배치하는 “수세기에 의한 덧셈”유형(addition by counting, A_c)이며 둘째는 덧셈/뺄셈의 연산을 통해 상대적 차이를 구하고 이 값을 기준으로 척도를 구성하는 “산술적 계산에 의한 덧셈”유형(addition by arithmetic operation, A_o)이다. 뺄셈의 방법은 전체 기준을 정하고 각 물질의 크기를 빼서 차를 구하거나(part/whole) 각 물질 간 차를 구해 배치하는(part/part) 형태가 있지만 본 연구에서는 이 두 방법 간의 구체적 구분을 하지는 않았다. 연구에 참여한 학생의 응답에서는 A_c 유형이 없었는데, 이는 척도를 만들도록 요구했던 것이 아니라 문항에서 선택하게 만든 과제의 형태와도 관련이 있는 듯하다. 5명의 학생이 A_o 유형의 척도개념을 보여주었다. 설명하는 과정에서 척도를 재구성할 때 A_c의 +1 혹은 +10의 척도를 만들기 시작한 학생들이 있었으나 물질의 숫자가 커지고(91m) 또 소수점 이하의 단위가 커지니(0.000000001m) 수세기보다는 뺄셈으로 차를 구하는 방식으로 급히 전환하는 것을 볼 수 있었다. 아래 그림(Figure 1 참고)은 A_o의 예로 고등학생 EL[2]이 응답 A를 선택한 과정을 잘 보여준다. 먼저 축구장과 코끼리 사이의 크기/길이 차(91-3=88), 즉 뺄셈하여 절대적 차이 값을 구하고 이 값을 척도에서 두 물질 간의 상대적 거리를 정하는 데 이용하였다. 머릿속으로 계산하는 걸 잘못한다(“bad at mental math”)고 했던 것처럼, 계산에서의 실

1) 본 연구에서는 참여 학생들의 신분보장을 위해 학생의 성과 본명의 첫 알파벳으로 조합된 기호를 사용하여 표기하고 있다.

2) 학생 참여자의 암호화된 이름



A.

Figure 1. EL's scale for ordering objects

수는 있었지만, 같은 방법으로 다음 물질 간의 차이를 2.999, 0.00#, 0.0000#으로 각각 구하고 그 절대적 차이 값들 간의 상대적 크기를 어림잡아 척도를 형상화하고 A를 답으로 선택하였다. 이 경우 뺄셈의 연산을 이용한 덧셈적 사고구조가 물질의 크기를 비교하는 척도의 근간이 되었음을 알 수 있다.

EL: So 91, I'm really bad at math, so it's like 88. Yeah 91 minus 3. (…) I'm bad at mental math. 0.001, which is really, really small. Ok, Like 2.9. (…) And then here is the virus. Ok this is just um - I don't even know. A lot of zeros. (…) whatever and then, this one you just .0000 something, so… (…) Well I think the only difference is that one has like the weird - like this one is so similar to this one. Like the 0.00 is so similar to the 2.99. So I guess that doesn't really make sense. Like if I was going to move this (*pointing to hair*), I would move this down a little lower.

발췌문에 나와 있는 것처럼, 뺄셈으로 상대적 크기를 어림잡은 EL은 코끼리와 머리카락의 차이 2.99~는 머리카락과 바이러스 간의 차이는 0.00~ 보다 크므로 A에 나와 있는 척도그림에서 머리카락과 바이러스 사이의 공간이 좀 더 작아야 한다고 후에 덧붙였다.

다. 곱셈적 사고 단계(Multiplicative Reasoning Stage)

수 개념은 덧셈에서 곱셈적 사고로 발달하여가므로 곱셈적 사고를 바탕으로 한 척도유형을 다음 단계에 두었다. 과학적 맥락에서 물질의 "크기"와 "척도" 표현을 이해하는 학생들의 사고는 곱셈적 사고방식에 따라 아래 제시된 4가지 유형으로 분석하여 나눌 수 있었다.

반복적 덧셈에 의한 곱셈적 사고 (by Repeated Addition: M_a)
곱셈에 의한 곱셈적 사고 (by Multiplication or Ratio: M_r)
10의 지수를 이용한 곱셈적 사고 (by Powers of 10: M_{p10})
로그 값을 이용한 곱셈적 사고 (by Logarithmic functional operation: M_l)

a. 반복적 덧셈에 의한 곱셈적 사고(Ma)

Piaget (1987)를 포함한 많은 수학교육의 연구가 반복적 덧셈으로 곱셈을 이해하는 과정이 덧셈에서 곱셈적 사고로 인지 발달하여가는 과정 중에 초기(primitive) 혹은 직관적 사고(intuitive) 형태로 종종 관찰된다고 설명한다(Fischbein, Dri, Nello, & Marino, 1985). 본 연구에서는 고등학생 AV[3]가 이러한 유형의 사고과정을 잘 보여주고 있다. 그는 설문에 덧셈적 변화를 근간으로 만들어진 척도 A를 답으로 선정하였다. 하지만 인터뷰 동안 덧셈적 사고에 바탕을 두고 선정한 응답을 수정하고 있음을 볼 수 있다.

AV: So I feel like this scale (pointing A) wouldn't, this would be… (…) the ratio between these (pointing to football field and elephant) is not this drastic difference.

I: What do you mean "ratio"?

AV: Like if you're comparing the difference between here and the difference between these two…it wouldn't, they (pointing to elephant and hair) would need to be more spaced out like this one because… because…. I'm not exactly sure. (…) If you look at the difference between the height of an elephant and a football field, it's not as drastic as the height of an elephant and a piece of hair.

I: Can you explain more?

AV: Like if you were to have an elephant on a football field, like laying down… (…) That ratio wouldn't be as if you stacked up a bunch of pieces of hair to get to the height of the elephant. (…) I think that was just the, like, ratio if you took a bunch of elephants and stacked them up to the height of the football field. Or if you took a bunch of hairs and stacked them at the height of the elephant. (…) I can picture, like, an elephant on a football field. It's easier to grasp.

발췌된 인터뷰내용을 보면, AV는 곱셈적 사고의 바탕이 되는 용어 "비/비례(ratio)"를 사용하며 덧셈적 사고를 근거로 선정한 A를 수정해야 한다고 설명하고 있다. 여기서 자세히 보아야 할 것은 "ratio", 즉 비례의 개념을 어떠한 과정을 통해 얻고 이해하고 있는가? 일 것이다. 그 과정을 살펴보면, AV는 숫자로 제시된 값을 이용해 그 비례 값 혹은 상댓값을 구하고 있지 않음을 알 수 있다. 덧셈이나 곱셈의 산술적 계산으로 구하는 것이 아니라 머릿속에 두 물질을 시각적으로 떠올리고 그 크기를 더하고 더하고 더해서(코끼리를 축구장에 놓고 놓고 놓아서 혹은 머리카락을 쌓고 쌓고 쌓아서 코끼리 키만큼: "laying down" or "stacking up") 어림잡는 과정, 즉 반복적 덧셈의 과정을 통해 배수에 해당하는 상대적 크기를 파악하고 있음을 잘 보여준다. 여기서 AV가 사용한 "ratio" 개념은 곱셈에 의한 비례의 개념(Singer & Resnick, 1992), 즉, 부분/전체 또는 부분/부분의 곱셈/나눗셈이 아니라 반복적 덧셈에 의한 배수 값을 알아내는 과정을 의미한다. 이와 같은 곱셈의 형태는 덧셈적 사고에서 곱셈적 사고가 가능한 단계가 되는 형식적 조작기 아동들이 곱셈을 배울 때 많이 발견되는 사례로

3) 학생 참여자의 암호화된 이름

보고되어있다. 그렇다면, 이미 형식적 조작기에 이른 고등학생의 사고에서는 이러한 과정이 드물게 나타날 것으로 생각할 수 있다. 하지만 숫자로만 계산하고 어림잡는 수학적 연구의 배경과는 다르게 실존하는 물질을 바탕으로 크기를 비교하는 본 연구의 과제 수행에서는 시각화 효과에 의해 곱셈적 사고의 초기 단계 혹은 덧셈에서의 곱셈으로의 전이되는 단계(transitional stage)에서 나타난 것으로 보인다.

b. 곱셈과 비례에 의한 곱셈적 사고(Mr)

다음은 곱셈을 통해 곱셈적 사고를 하는 수준의 단계로 덧셈과 곱셈적 사고의 중간 과정에 걸쳐있던 AV가 사용한 “비례”와는 달리 고등학생 RL[4]의 경우 실질적인 곱셈과 나눗셈의 과정을 거쳐 “~배 큰(~times bigger)”이라는 비례의 개념으로 상대적 크기를 비교하고 있다. 아래는 RL과의 인터뷰 중 나누었던 대화 일부와 인터뷰 중에 직접 그린 척도의 그림이다(Figure 2).

I: C?

RL: Yeah because in this -If I use division or given this is 2, 3…7 decimal places or this is 7 decimal places back and this is 4. And then this would be 3, 4, 5, 6, 7…

I: Can you show or explain more about what you are doing now?

RL: Ok yeah. So there’s 91 and 3. So then, that means that the football field and the elephant, the football field is, whatever 91 divided by 3 is times bigger. And then this would be like, almost 1000 times bigger, (…) oh 1 here then, 2, 3, 4…yeah, so it’d be 1000 times, 3000 times bigger. (…) Um…so 30 1/3. Then from here it’d be…so 7 minus 4. It’d be less than 1000 times bigger, but…and then this one’s 10. So this would also be somewhere like 4000 times bigger. So then, (…) so then that would mean that the atom, the virus, and the hair are all around the same - and the hair from the elephant - are all around the same distance apart ‘cause they’re under 1000.

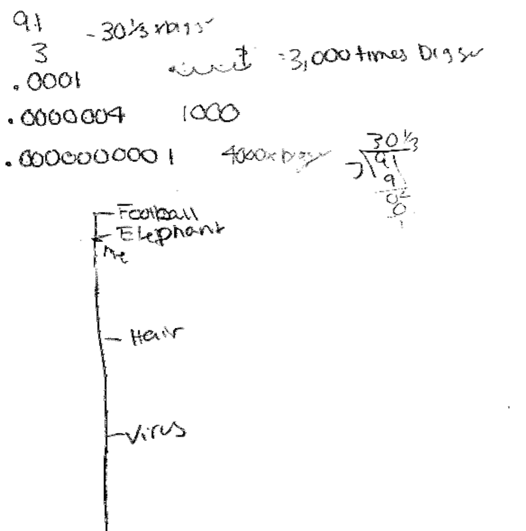


Figure 2. RL’s scale for ordering objects

And then the elephant and the football field is a much smaller number. So then I would pick C.

위의 인터뷰 발췌문을 보면, RL이 사물을 시각화하여 비교하는 과정 없이 바로 수치를 대입하여 나눗셈하고 비례 값을 얻는 것을 볼 수 있다. 계산의 과정을 살펴보면(위 발췌문과 아래 Figure 2), 축구장과 코끼리는 $\frac{91}{3}\approx 30(\frac{1}{3})$ 이고 코끼리와 머리카락은 $\frac{3}{0.0001}\approx 3000$이므로 축구장과 코끼리 간의 거리는 코끼리와 머리카락 간 거리보다 훨씬 가까워야 한다고 설명하고 있다. 분수의 곱셈/나눗셈 계산과정에서 많은 오류를 범해 값은 정확하지 않지만, 제시된 물질들 간의 상대적 차이를 나타내는 척도는 부분/부분의 곱셈(나눗셈), 즉, 각 물질의 크기 값들을 서로 곱하거나 나누어 얻은 곱셈적 사고를 하고 있음을 잘 보여준다. 이와 같은 셈을 바탕으로 RL은 인터뷰과정 중 척도를 다시 그렸고(Figure 2), 이를 근거로 주어진 수행과제의 문항에서 응답 C가 적절하여 선택한 것이라고 설명하였다.

c. 10의 지수를 이용한 곱셈적 사고(Mp_{10})

곱셈적 사고를 이용하여 척도를 사용하는 다른 예는 과제에서 D를 선정하고 직접 그려 설명한 대학생 SL[5]의 경우라고 볼 수 있다. 실제 값을 곱셈(나눗셈)하여 구한 값을 비교하며 두 물질 사이의 상대적 거리로 척도를 구성하였던 RL의 경우와는 달리 SL은 물질의 크기 값을 대입하기 이전에 10의 지수(powers of 10)를 이용해 10^{-8}에서 10^{4}m까지 등 간격으로 이루어진 직선 척도를 만들고(SL은 이것을 로그척도 – log scale – 라고 부름) 10의 지수로 물질의 크기를 어림잡아 직접 그린 척도(아래의 Figure 3 참고) 위에 표기하였다.

SL: I guess I would place the atom here and the virus around there. And then the human hair, yeah. Human hair on that scale. Human hair. I think that’s a general thing what nanotechnology people

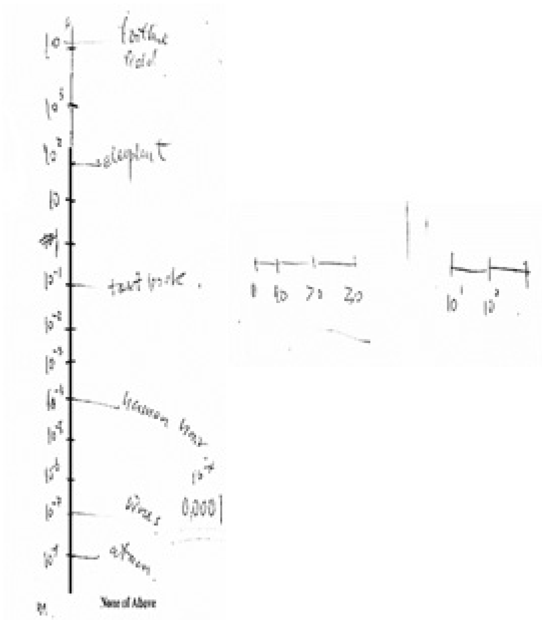


Figure 3. SL’s scale for ordering objects

4) 학생 참여자의 암호화된 이름

5) 학생 참여자의 암호화된 이름

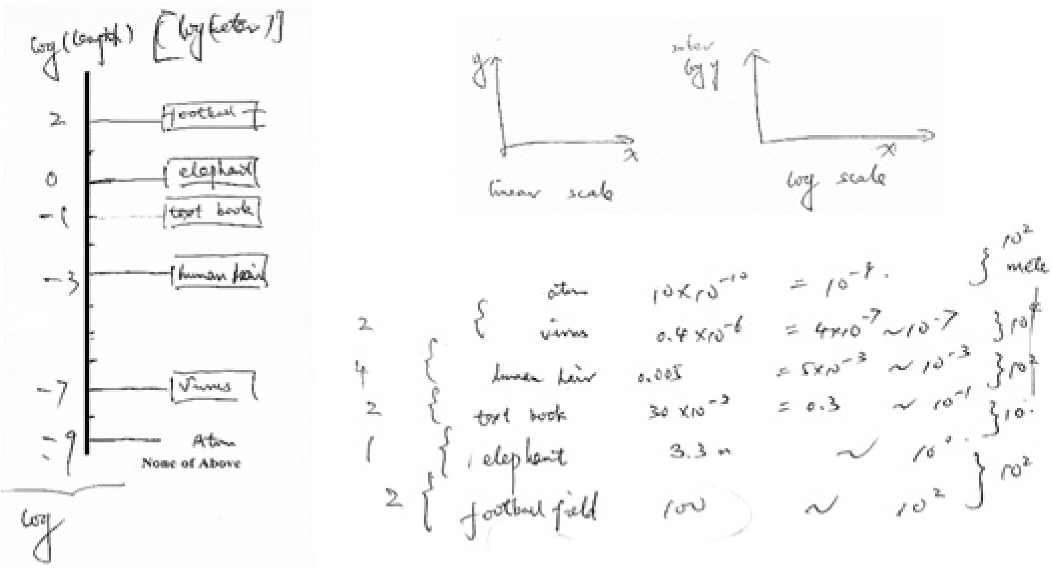


Figure 4. ZF’s scale for ordering objects

do. Like it’s on the powers of tens, it’s on the log scale.

I: What do you mean by “log scale”? What is the log scale?

SL: Yeah, if you do a regular scale it would be like zero to ten, 20, 30, and then it would just be too long. So the log scale is actually like something that increases, basically, like I did here, this will be one and this will be ten. This will be ten to the two.

I: Then, why are we using the log scale then?

SL: It’s just because the size difference is too much. That’s why we use a log scale.

실제, 축구장, 코끼리, 원자의 크기 등은 정확한 값의 위치에 표기하지 않았지만, SL은 0, 10, 20, 30으로 진행되는 덧셈적 척도를 일반척도(regular scale)라고 설명하며 물질의 크기를 표시한다면 굉장히 길어진다고 설명하고 10의 지수, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, …와 같이 비례적 변화를 근간으로 구성된 척도를 로그척도라 설명하며 그 차이를 알고 사용용도를 구분하고 있음을 보여준다. SL이 “로그척도(log scale)”라는 용어를 사용한 부분을 살펴보면 로그함수와 관련된 설명은 전혀 없고 10의 지수를 사용하여 등 간격으로 10의 배수씩 증가/감소하는 척도로 해석하고 있음을 알 수 있다. 덧붙여 일반적으로 과학자들(특히, 나노-공학자들)이 10의 지수를 이용한 로그 척도를 사용하는 것으로 인식하고 있음을 볼 수 있다.

d. 로그 값을 이용한 곱셈적 사고(M_l)

참여한 학생들이 보인 또 다른 등 간격 척도의 유형은 로그함수를 이용한 계산의 과정($\log(a10^n)$)을 거친 값의 곱셈적 변화로 진행되는 척도이다. 연구에 참여한 학생들 중 재료과학과의 전공자를 대상으로 한 수업을 듣고 있던 학생 ZF[6]만 이 단계에 해당하는 척도개념을 갖는 것으로 나타났다. 그는 재료과학과의 대학원생으로 물리학과에서 재료과학과로 전과하여 학위과정에 들어온 관계로 재료과학과의 학부과정 일부 과목들을 이수 하여야 했고 이 과목은 필수 과목 중 하나였다. 10의 지수로 변화하는 등 간격의 척도를 먼저 그린 후 물질의 크기를 어림잡아 배치한 SL의 경우와는 다르게, ZF는 우선 물질의 크기를 10의 지수에 해당되는 값으로 바꾸고 다시 로그함수를 적용하여 계산 값을 얻었다. 예를 들어 원자는 $10\text{x}10^{-10}=10^{-9}$(실제 주어진 과제에서 주어진 값은 $1\text{x}10^{-10}=10^{-10}$에 해당되는데 계산에서 실수를 한 듯하다) 그리고 바이러스는 $0.4\text{x}10^{-6}=4\text{x}10^{-7}\approx10^{-7}$과 같이 10의 지수 값으로 나타낸 후 로그함수 log(length)를 취해 간단한 숫자로 바꾸었다. 즉 원자는 $\log(10^{-9})=-9$ 그리고 바이러스는 $\log(10^{-7})=-7$에 해당되며, 값을 구한 후 -9와 2 사이를 1의 차이를 갖는 등 간격으로 나눈 척도를 만들고 해당되는 로그함수 값에 과제에서 주어진 물건을 배치하였다. 특히, 위 그림 4의 오른쪽 아랫부분에 나와 있는 것처럼 두 물질간의 상대적 차이를 설명할 때에는 10의 지수로 나타낸 값을 서로 나누어 상대적 크기의 차이 값을 구하는 것을 볼 수 있다. 이 과정을 거쳐 원자와 바이러스($10^{-7}/10^{-9}=10^2$) 사이의 거리보다 바이러스와 머리카락의 상대적 거리($10^{-3}/10^{-7}=10^4$)가 10^2차이 즉 $\log(10^2)=2$, 척도상에서 두 배 크다고 설명하고 있다. 실제 과제 수행 시 이 같은 사고를 통해 ZF는 세 가지 보기에서 답을 구하지 못하고, D를 선택하고 직접 척도를 만들어내었다.

특히, 로그척도라는 용어의 사용에 관해서는 아래의 발췌문에서도 알 수 있는 것처럼 x vs. y의 직접 대응에 해당하는 선형 척도를 x vs. log(x) 관계를 이용해 대폭 줄여놓은(great shrink) 척도라고 설명하고 있음을 알 수 있다. 앞의 SL이 상대적 차이가 대단히 클 때 로그척도를 사용한다고 했던 응답과 유사하게 로그척도의 필요와 유용성에 관한 인식이 있음을 알 수 있다.

I: You mentioned a log scale. What do you mean?

ZF: Okay, log scale, you just…you get a number, right? Then, you just get a log of this number. So, for a number, you get x, y here, okay? (*drawing the first x-y Cartesian coordinate graph*) and here, instead of directly joining x and y, you join like log(x) versus x, so that’s a log scale for x.

6) 학생 참여자의 암호화된 이름

Table 2. Number of students constructing a scale in terms of mathematical reasoning for a number line

Group	Scale	PA	A_c	A_o	M_a	M_r	M_{p10}	M_l	Total
	MS	pre-additive	additive		multiplicative				
High School		1	0	2	1	2	1	0	7
MSCa		0	0	2	0	4	2	0	8
EDC		0	0	1	0	0	7	0	8
MSCb		0	0	0	0	0	3	1	4
Total		1	0	5	1	6	13	1	27

MS: mathematical structure
MSCa: materials science course for non-majors
EDC: engineering design course for engineering majors
MSCb: materials science course for majors in advanced levels

I: Then, is this log scale? (*pointing to choice b on the item*)

ZF: No, no. (…) Okay, I think maybe they just are just general linear…, (…) this is linear scale, like directly joining the x and y. (…) And this is log scale (*pointing to his own scale created in the choice none of above*). (…) The location is different because of the great shrink--the log scale is great shrink --I mean, the distance between each two.

2. “크기와 척도” 유형 분포와 개념의 복잡성

위의 표(Table 2)는 연구에 참여한 학생들의 척도개념 유형을 학생 집단에 따라 분류하고 그 수를 나타낸 것이다. 표는 개념의 복합성에 근거하여 순서를 정하였던 선행연구와는 달리 수학적 인지구조의 발달에(덧셈이전 → 덧셈 → 곱셈) 맞춰 배열된 것이다. 참여자 수가 제한되어 있어 일반화하기는 어렵지만, 본 연구는 학생들이 생각하는 크기와 척도는 수학 학습과 인지발달의 수준과는 달리 다양한 형태로 나타남을 알 수 있다. 비교적 많은 학생이 10의 지수 값으로 표기 후 곱하거나 나누어 물질 간의 상대적 차이를 구하는 것으로 보인다. 하지만 덧셈이전의 분절형 척도에서, 덧셈적 사고에 기반을 둔 선형 척도, 곱셈적 사고를 바탕으로 한 여러 척도의 유형들이 함께 관찰됨을 알 수 있다. 몇 명의 학생들은 자신이 만든 척도를 “로그척도”라고 불렀지만, 그들의 대부분이 10의 지수에 기반을 둔 M_{p10} 유형의 척도를 로그척도로 생각하고 있었고 실질적으로 로그함수 계산을 적용한 척도로 물질의 크기를 나타낸 학생은 과학계열 전공자(MSC_b) 그룹의 한 학생에 불과하였다.

학년이 높아질수록, 특히 이공계 계열 전문성이 깊어질수록 (고등학교 & 비전공자 → 전공자) 곱셈적 사고를 바탕으로 10의 지수나 로그함수 값의 체계를 이용한 척도로 물질의 크기를 어림잡거나 비교하는 경우가 증가하는 것으로 볼 수 있다. 재미있는 것은 M_a 유형의 생각은 덧셈적 사고 영역과 곱셈적 사고 영역에서 함께 나타나는 경우가 많았다. 특히, 코끼리, 머리카락, 운동장 등처럼 눈으로 관찰 가능한 영역에서는 반복적 덧셈(stacking) 과정을 자연스레 머릿속으로 거치는 것이 관측되었다. M_a 유형을 보인 고등학생 AV의 경우에도 덧셈적 사고에 바탕을 둔 선형 척도로 물질의 크기를 어림잡았으나 관찰 가능한 물질들의 상대적 크기를 비교하는 과정에서 M_a 유형의 반복적인 덧셈 메커니즘에 의한 비례의 사고로 전환되는 과정을 보였다. 또한, M_r과 Mp_{10}으로 물질의 크기를 비교하는 비례에 의한 곱셈적 사고를 하는 학생 중의 몇은 곱셈/나눗셈의 과정을 거쳐 구체적 상대 값을 얻었음에도 특정 물질의 크기는 반복적 덧셈의 사고 과정을 적용하여 설명하였다. 특히, M_r의 경우는 이 시각화 되는 상상적 공간에 영향을 받아 수치적으로는 정확한 비례 값을 얻더라도 척도에 왜곡된 폭으로 표기되는 경우가 많아 M_{p10}과 M_l과 달리 척도의 간격을 일정하게 유지하지 못해 오류를 유발하는 이유가 되기도 하였다.

IV. 결론 및 제언

일반적으로 과학 교과에서 다뤄지는 수학적 표현이나 문제풀이, 계산 과정은 쉽다고 생각되거나 종종 도구로 취급되지만, 실질적으로 이러한 수학적 사고의 부족은 낮은 이해도, 즉 과학적 사고를 저해하거나, 과학에 대한 흥미를 잃도록 하는 요인이 되기도 한다. 이와 관련해 과학의 문제풀이 과정에서 학생들이 어렵게 생각하는 수학이론에 관해서는 과학뿐 아니라 수학교육의 분야에서도 관심을 두고 연구를 진행해왔다(Adjiage & Pluvinage; 2007). 하지만 두 교과를 연결 지어 양측의 고민을 해결하려는 노력이 많지는 않았다. 실제 과학에서의 수학은 도구가 아니라 부분으로 생각할 수 있고, 과학의 현상은 수학에서 이용하여 수학적 사고를 구체화할 수 있는 좋은 방법이기도 하므로 최근 들어 두 교과를 하나의 융합된 주제로 수업을 만들어 보자는 생각이 STEM 등의 융합교육에서 강조되기 시작했다(Lee *et al*., 2012; NCES, 2009; Sanders *et al*., 2011; Sin & Han, 2011). 이에, 과학수업 시간에 익숙한 물질의 크기를 이해하고 물질 간 상대적 크기를 비교할 때의 사고를 수학적 사고 구조로 분석한 본 연구는 여러 면에서 그 교육학적 의의를 찾을 수 있을 것이다. 첫째, “크기와 척도” 개념이 두 교과를 융합한 수업의 주제로 사용 가능함을 잘 보여준다. “크기와 척도”는 과학의 기본개념이며 수 개념과 연산의 이해를 바탕으로 한 수학의 중요 영역으로 과학과 수학의 두 교과를 연결하는 교량의 역할을 효과적으로 할 수 있다. 둘째, 수학적 사고구조를 바탕으로 본 연구에서 재구성한 개념 틀은 학생개념의 다양성을 보다 구체적/체계적으로 설명해주며 개념의 복잡성으로 척도의 유형을 정리하여 구성하였던 선행 연구를 재해석하는 타당한 근거를 제공한다. 또한, 개념 틀의 각 유형을 구분 짓는 핵심요소는 해당하는 과학과 수학의 학습 평가나 분석의 기준으로 유용하게 사용될 수 있다. 셋째, 본 연구에 사용된 개념 틀은 수 개념과 연산에 관한 인지구조의 발달 과정을 반영하므로 이는 다시. 과학학습 과정에서의 “크기와 척도” 개념의 발달 방향(learning path or learning progression)과 학습 과정 중 만날 수 있는 어려움이 무엇일지 예측하도록 도와, 교재와 수업 준비에 유용한 정보가 될 것이다. 넷째, “크기와 척도” 개념을 이해하지 못하는 어려움의 한 원인을 수학적 개념이해나 문제풀이의 과정에서 비롯되는 어려움과 연결 지어 생각해볼 수 있다. 실제 예로, 곱셈적 사고 중 하나인 비례의 개념을 이해하는 것은 수학에서도 어려운 것으로 인식되어 있으며(Lamon, 1994; Noelting, 1980; Rizvi & Lawson, 2007; Singh, 2000; Streefland, 1984; Thompson, 1994) 또한, 과학에서 그 개념을 적용하는 과정도 쉽지 않은 것으로 알려졌다. 하지만 보통의 학교 과학 수업에서는 과학 교과에 나오는 수학적 공식이나 계산을 도구로 해석하는 경향이 있어 계산 과정에서 생기는 실수나 오류는 개념만 이해하고 있으면 쉽게 고칠 수 있을 사소한 것으로 생각하는 것 같다. 본

연구에서도 쉽게 볼 수 있는 것처럼 보이지 않는 물질의 크기를 추측하고 배열할 때 많은 학생이 계산과정에서 다양한 오류를 보였고, “대략”, “아마”와 같이 어림잡는 경우가 많았다. 특히 소수점 이하의 자리를 지수로 옮길 때, 소수점 이하의 자릿값으로 산술적 계산을 할 때, 10의 음의 지수를 이용한 계산의 과정 등에서 정확성은 상당히 감소하였다. 실제 10^{-3}과 10^{-4}은 큰 차이를 나타내지만, 학생들의 계산에서는 정확성이 떨어지는 것을 쉽게 발견할 수 있었다. 또한, 로그척도라는 용어는 종종 인용되었지만, 실질적으로 로그 함수에 관해 알고 있거나, 지수나 로그 척도를 사용하는 이유, 즉 비례적 변화의 선형적 표현에 관해 설명할 수 있는 학생들은 적었다. 로그의 개념은 수학의 중요한 개념일 뿐 아니라 과학의 많은 현상을 표현하는 방법이기도 하다(예, pH 값, 리히터 강도, 음파의 데시벨 측정, 빛의 흡광도 등). 하지만 실질적으로 공식에 의한 산술적 계산이 아닌 로그의 개념, 즉 수학적 구조를 제대로 이해하는 것이 어려움은 수학과 과학의 분야에서 많이 지적되었었던 현상이다(Fauvel, 1995; Sheppard, 2006; Siegler, Thompson & Opfer, 2009; Smith & Confrey, 1994; Weber, 2002). 이와 같은 수학적 개념이해의 부족으로 인한 문제풀이 혹은 계산의 어려움은 실질적으로 과학적 현상의 이해에 상당한 영향을 끼칠 뿐 아니라 과학흥미도를 감소시키는 요인이 되는 것을 알 수 있다. 다섯째, 눈으로 볼 수 있는 물질을 머릿속에서 시각화하는 과정이 과학적 현상 이해를 방해할 수도 있다는 점이다. 특히 크기와 척도에 관해서는 시각화시킬 수 있는 영역에서 덧셈적 사고와 곱셈적 사고의 과도기적 모습(M_a)이 드러났던 것이 좋은 일례라 할 수 있다. 많은 학생이 보이는 영역의 물질 크기를 어림잡는 것과 더불어 보이지 않는 영역의 물질들의 이미지나 크기를 왜곡되게 기억하는 경우가 많다. 이와 관련된 과학적 모형, 학생들의 개념이해, 오개념 발생 등에 관한 여러 연구가 진행되어왔다. 본 연구에서는 보이지 않는 영역인 바이러스, 원자들을 “모두 굉장히 작다”로 표현하고 있으며 실제 물질을 보지 못했음에도 책에서 본 바이러스를 확대하여 놓은 이미지나 다양한 모형으로 보았던 원자 구조 등의 크기를 제각각 시각화하여 머릿속에서 재단하고 있는 것을 볼 수 있다. 실제 많은 학생이 머릿속에서 비교한 원자와 바이러스의 상대적 크기는 실제적 차이가 상당히 있음에도 거의 비슷하게 인식하고 있었다. 숫자를 직접 대입하여 계산한 학생들은 비로소 그 차이를 인식하게 되지만, 곱셈적 사고를 바탕으로 척도를 구성한 학생들에 비해 덧셈적 사고를 바탕으로 척도를 구성한 학생들은 너무 작은데 다 거기서 거기인 것으로 인식하는 경우가 많았고 소수점 이하 영역을 간과하는 계산적 오류를 동반하는 것으로 보인다. 본 연구에서는 고등학생과 대학생에 한해서만 연구가 진행되어 곱셈적 사고 구조의 유형을 자주 보였지만, 스펙트럼을 넓혀 저학년을 포함하여 수학적 발달과정에 맞춰 연구한다면 시각화 효과와 관련해서 보다 넓은 범위의 자료를 만들어낼 수 있을 것이라 본다. 여섯째, 체계(척도양식)의 도입으로 얻을 수 있는 정확성의 부재가 많이 관측되었다는 것이다. 척도라는 균등간격을 이용한 체계를 씀으로 덧셈에 의한 관계이건 곱셈에 의한 비교이건 쉽게 상대적 크기를 정확히 파악할 수 있음에도 불구하고 많은 시각적으로 어림잡아 척도에 물질을 배열하거나, 계산하고 상대적 크기를 어림잡아 간격을 나누고 물질을 배열하는 방식 등으로 부정확한 척도를 사용하는 것을 볼 수 있다. 이러한 현상은 많은 학생이 척도표현이 의미하는 바를 적절히 이해하지 못하는 것을 드러내며, 상대적 크기 비교에 장애가 되는 것을 알 수 있다. 그러므로 덧셈적 혹은 곱셈적 사고에 의한 선형 혹은 비례형 척도가 무엇을 의미하는지 체계를 바르게 이해하는 것이 크기 비교와 표현의 정확성을 학습하는 데 있어 중요하다 할 수 있다. 본 연구에 사용된 학생들의 “크기와 척도” 유형 개념 틀과 해당 학생들의 응답을 자세히 보면 학생들의 크기와 척도 개념이 아래 그림 5에 나타낸 것처럼 3가지 특정영역으로 나뉘는 것을 알 수 있다. 즉, 단순한 관찰이나 사-공간적 이미지에 의한 구분이나 계산법으로 물질의 크기를 표현하는 (1) 물질영역(Object based dimension (PA & Ma): influenced by visual-spatial observation), 다음으로는 덧셈/뺄셈 혹은 곱셈/나눗셈의 산술적 계산을 거쳐 상대적 크기를 비교하는 (2) 산술연산영역(Math based dimension (Ao & Mr): applied arithmetic operation), 마지막으로는 등 간격 척도를 먼저 도입하고 물질을 배치하여 상대적 비교를 하거나, 산술 혹은 함수 계산을 하는 (3) 체계영역(System based dimension (A_c, M_{p10}, M_l): applied evenly spaced scale and arithmetic/ functional operation)으로 구분됨을 볼 수 있다.

위 영역들을 보면, 시각적 효과에 의한 정확성의 오류는 상위 두 영역인 체계나 계산으로 바로잡아지게 되며 상댓값 비교의 정확성은 최상위의 영역인 등 간격을 유지한 체계의 도입으로 얻을 수 있음을 예측할 수 있다. 이는, 산술적 계산을 할 수 있는 것 그리고 척도 체계의 의미를 이해하는 것이 학습 능력 수준이나 개념이해의 정도와도 관련됨을 알 수 있다. 수 개념의 발달에서 드러난, 덧셈과 곱셈의 중간 영역인 Ma 는 위의 영역 그림에서도 물질의 크기를 표현하는 과정에 전이개념으로 드러남을 알 수 있다. 그림에서 가로축은 수와 “크기와 척도” 개념의 발달과정 (grouping → addition → transition state → multiplication)을 나타내며 세로축은 척도 개념에 내재한 개념발달 영역 (object-based → math-based → system-based)을 드러내어 크기와 척도 개념의 학습에서의 주요요소가 무엇인지를 분석적으로 보여준다. 이와 같은 관계와 요소를 파악하는 과정은 과학 교과에서 다루는 물질 간의 크기 비교에만 머무는 것이 아니라 척도를 사용함으로 크기, 세기를 올바르게 나타내고 그 속성을 이해할 수 있도록 돕는다. 과학과 수학의 영역에서 중요할 뿐 아니라 기본이 되는 개념인 “크기와 척도”

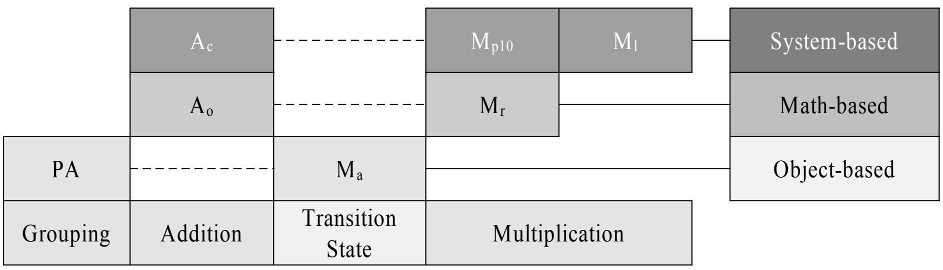


Figure 5. Dimensions in the conceptions of size and scale by mathematical reasoning

는 두 교과를 이어 STEM 수업의 준비에 의미 있는 주제로 사용될 수 있을 것이다.

국문요약

관찰과 측정을 기본으로 하는 과학의 교과에서 "크기(size)"와 그를 나타내는 "척도(scale)"는 물질의 물리적 속성과 과학적 현상을 이해하도록 돕는 중요한 개념이다. 또한, 사물의 수, 크기나 양을 어림잡거나 그것을 정확하게 표현하는 것은 수학에서 수의 개념 형성과 발달, 표현법의 습득, 나아가서는 연산에 관한 사고로의 발전과 관련되어있는 문제라고 볼 수 있어 "크기와 척도" 개념은 수학과 과학의 기본이며 동시에 두 교과를 연결하는 개념이다. 일반적으로 "크기와 척도"는 쉬운 개념이라 생각되지만, 실제 학생들은 물질의 크기를 제대로 이해하지 못하거나 척도로 나타내는 것을 어려워하는 것을 알 수 있다. 이는 단지 물질의 크기를 정확히 알지 못하는 정확성에 관한 오류로만 그치는 것이 아니라 종종 연관된 개념을 추론하거나 개념을 확장해 과학의 현상을 이해하는 과정에서의 어려움으로 이어진다. 이와 관련해 수와 연산에 관한 개념이해와 학습의 어려움에 관한 수학교육분야의 연구는 다양하게 진행되었지만, 과학교육분야에서의 연구는 많지 않았다. 본 연구에서는 "크기와 척도"에 관한 학생들의 사고를 더 잘 이해하고 과학 학습의 어려움에 관한 원인을 분석하기 위해 수학적 구조분석을 적용하였다. 수학교육에서 설명한 수 개념의 발달에 따른 사고유형(덧셈이전의 사고, 덧셈적 사고-additive reasoning, 곱셈적 사고-multiplicative reasoning)을 적용하여 7단계의 수학적 구조를 만들고 이를 이용하여 "크기와 척도"와 관련된 과제를 수행한 학생들의 인터뷰 데이터를 체계적으로 분석하였다. 수학적 구조를 바탕으로 한 개념 틀은 다양한 학생들의 사고를 분석하는 기준이 되었고, 또한 학생들이 겪는 개념이해의 어려움을 해석하는 도구가 되었다. 수 개념의 발달에 맞춘 수학적 사고구조를 적용한 분석은 학생들의 개념 유형의 구분을 명확히 하였고 설명이 모호했던 전환 단계(transition stage) 유형을 밝혀내어 수업에서 고려되어야 할 점들을 구체적으로 드러내었다. 이는 수학과 과학, 두 교과 간의 틈을 줄일 뿐 아니라 연결점을 찾아 학생들의 개념이해와 어려움의 원인을 분석하는데 폭넓은 시각을 제공한다는 점에서 최근 많은 관심을 받고 있는 STEM 혹은 수학과 과학의 융합 수업을 위한 소재로의 가능성을 제시해준다.

주제어 : 크기와 척도, 수학적 구조, 수와 연산, 과학개념이해

References

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. Educational Studies in Mathematics. 65, 149-175.

Akatugba, A. H., & Wallace, J. (1999). Sociocultural influences on physics students' use of proportional reasoning in a non-western country. Journal of Research in Science Teaching, 36(3), 305-320.

Akatugba, A. H., & Wallace, J. (2009). An integrative perspective on students' proportional reasoning in high school physics in a West African context. International Journal of Science Education, 31(11), 1473-1493.

An, S. (2008). A survey on the proportional reasoning ability of fifth, sixth, and seventh graders. Journal of Educational Research in Mathematics, 18(1), 103-121.

Angell, C., Kind, P. M., Henriksen, E. K., & Guttersrud, O. (2008). An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics. Physics Education, 43(3), 256-264.

Bar. V. (1987). Comparison of the development of ratio concepts in two domains. Science Education, 71(4), 599-613.

Beland, A., & Mislevy, R. J. (1996). Probability-based inference in a domain of proportional reasoning tasks. Journal of Educational Measurement, 33(1), 3-27.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7thgrade students with different curricular experiences. Educational Studies in Mathematics, 36(3), 247-273.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. Developmental Psychology, 41(6), 189-201.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. Child Development, 79(4), 1016-1031.

Cheek, K. A. (2010). Why is geologic time troublesome knowledge? In J. H. F. Meyer, R. Land, & C. Baillie (Eds.), Threshold concepts and transformational learning (pp.117-129). Rotterdam: Sense Publishers.

Clark, F., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. Journal for Research in Mathematics Education, 27(1), 41-51.

Dawkins, K. R., Dickerson, D. L., McKinney, S. E., & Butler, S. (2008). Teaching density to middle school students: Preservice science teachers' content knowledge and pedagogical practices. The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues, and Ideas, 82(1), 21-26.

De Lozano, S. R., & Cardenas, M. (2002). Some learning problems concerning the use of symbolic language in physics. Science Education, 11, 589-599.

Dehaene, S. (2011). The number sense: How the mind creates mathematics. (Revised & Expanded Edition), New York, NY: Oxford University Press.

Drane, D., Swarat, S., Light, G., Hersam, M., & Mason, T. (2009). An evaluation of the efficacy and transferability of a nanoscience module. Journal of Nano Education, 1(1), 8-14.

Erickson, T. (2006). Stealing from physics: modeling with mathematical functions in data-rich contexts. Teaching Mathematics and its Applications, 25(1), 23-32.

Evans, K. L., Yaron, D., & Leinhardt, G. (2008). Learning stoichiometry: a comparison of text and multimedia formats. Chemistry Education Research and Practice, 9(3), 208-218.

Fauvel, J. (1995). Revisiting the history of logarithms. Learn from the Masters, 39-48.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, 16 (1), 3-17.

Guckin, A. M., & Morrison, D. (1991). Math*Logo: A project to develop proportional reasoning in college freshmen. School Science and Mathematics, 91(2), 77-81.

Hart, K. M. Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G., & McCartney, M. (1981). Children's understanding of mathematics: 11-16. London: John Murray.

Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp.198-219). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Hines, E., & McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. School Science and Mathematics, 105(2), 88-105.

Hodson, D. (1985). Philosophy of science, science and science education. Studies in Science Education, 12(1), 25-57.

Hofstein, A., & Lunetta, V. N. (1982). The role of the laboratory in science teaching: Neglected aspects of research. Review of Educational Research, 52(2), 201-217.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence. New York: Basic Books, Inc.

Jang, M., & Park, M. (2006). A study on the multiplicative thinking of 2nd grade elementary students. Communications of Mathematical Education. Series E, 20(3), 443-467.

Jones, M. G., Taylor, A., & Broadwell, B. (2009). Concepts of scale held by students with visual impairment. Journal of Research in Science Teaching, 46(5), 506-519.

Jones, M. G., Taylor, A., Minogue, J., Broadwell, B., Wiebe, E., and Carter, G. (2006). Understanding scale: Powers of ten. Journal of Science Education and Technology, 16(2), 191-202.

Kadosh, R., Tzelgov, J., & Henik, A. (2008). A synthetic walk on the mental number line: The size effect. Cognition, 106, 548-557.

Kamii, C., & Livingston, S. (1994). Young children continue to reinvent arithmetic, 3rdgrade. New York: Teachers College Press.

Kim, J., & Bang, J. (2013). An analysis on third graders' multiplicative thinking and proportional reasoning ability. Journal of Educational Research in Mathematics, 23(1), 1-16.

Kohn, A. S. (1993). Preschoolers' reasoning about density: Will it float? Child Development, 64, 1637-1650.

Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity. 2009 - Revised national curriculum.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 24(1), 41-61.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. J. Harel, & J, Confrey (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 89-122). Albany, NY: State University of New York Press.

Lee, H., Son, D., Kwon, H., Park, K., Han, I., Jeong, H., Lee, S., Oh, H., & Nam, J. (2012). Secondary teachers' perceptions and needs analysis on integrative STEM education. Journal of the Korean Association for Science Education, 32(1), 30-45.

Lesh, R., Post, R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. M. Hiebert Behr (Ed.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lindquist, M. (1989). Results from the fourth mathematics assessment of the national assessment of educational progress. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Retrieved from http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=16909

National Research Council (1996). National science education standards. Washington, D. C: National Academy Press.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I—Differentiation of stages. Educational studies in Mathematics, 11(2), 217-253.

O'Brien, T., & Casey, S. (1983). Children learning multiplication. School Science and Mathematics. 83, 246-251

Oon, P. T., & Subramaniam, R. (2011). On the declining interest in physics among students—from the perspective of teachers. International Journal of Science Education, 33(5), 727-746.

Park, E-J., & Choi, K. (2010). Analysis of mathematical structure to identify students' understanding of a scientific concept: pH value and scale. Journal of the Korean Association for Science Education, 30(7), 920-932.

Piaget, J. (1987). Possibility and necessity: The role of possibility in cognitive development. Minneapolis, MN: The University of Minnesota Press.

Prain, V., & Waldrip, B. (2006). An exploratory study of teachers' and students' use of multi-modal representations of concepts in primary science. International Journal of Science Education, 28(15), 1843-1866.

Redlich, O. (1970). Intensive and extensive properties. Journal of Chemical Education, 47(2), 154-156

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). Helping children learn mathematics. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Rizvi, N. F., & Lawson, M. J. (2007). Prospective teachers' knowledge: concept of division. International Education Journal, 8(2), 377-392.

Sanders, M., Kwon, H., Park, K., & Lee, H. (2011). Integrative STEM education: contemporary trends and issues. Secondary Education Research, 59(3), 729-762.

Sheppard, K. (2006). High school students' understanding of titrations and related acid-base phenomena. Chemistry Education Research and Practice, 7(1), 32-45.

Siegler, R. S., & Opfer, J. (2003). The developmental of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. Psychological Science, 14(3), 237-243.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2009). The logarithmic to linear shift: One learning sequence, many tasks, many time scales. Mind, Brain, and Education, 3(3), 143-150.

Siemon, D., Breed, M., & Virgona, J. (2006). From additive to multiplicative thinking-The big challenge of the middle years. www.education.vic.gov.au/studentlearning/teachingresources/maths/

Siemon, D., & Virgona, J. (2001). Road maps to numeracy-Reflections on the middle years numeracy research project. Paper presented at the annual conference of the Australian Association for Research in Education, Fremantle, WA.

Sin, Y., & Han, S. (2011). A study of the elementary school teachers' perception in STEAM Education. Elementary Science Education, 30(4), 514-523.

Singer, J. A., & Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? Educational Studies in Mathematics, 23(3), 231-246.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. Educational Studies in Mathematics, 43(3), 271-292.

Smith, E., & Confrey, J. (1994). Multiplicative structures and the development of logarithms: What was lost by the invention of function? In G. J. Harel, & J, Confrey (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp333-364). Albany, NY: State University of New York Press.

Smith, C., Maclin, D., Grosslight, L., & Davis, H. (1997). Teaching for understanding: a study of students' pre-instruction theories of matter and a comparison of the effectiveness of two approaches to teaching about matter and density. Cognition and Instruction, 15(3). 317-393.

Stevens, S., Sutherland, L., Schank, P., & Krajcik, J. (2009). The big ideas of nanoscale science & engineering: A guidebook for secondary teachers. NSTA Press.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards... a theory). Educational Studies in Mathematics, 15(4), 327-348.

Swarat, S., Light, G., Park, E-J., & Drane, D. (2011). A typology of undergraduate students' conceptions of size and scale: Identifying and characterizing conceptual variation. Journal of Research in Science Teaching, 48(5), 512-533.

Taber, K. S. (2006). Conceptual integration: a demarcation criterion for science education?. Physics Education, 41(4), 286-287.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Trend, R. (2000). Conceptions of geological time among primary teacher trainees, with reference to their engagement with geosciences, history, and science. International Journal of Science Education, 22(5), 539-555.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. Educational Studies in Mathematics, 16,181-204.

Tretter, T. R., Jones, M. G., Andre, T., Negishi, A., & Minogue, J. (2006). Conceptual boundaries and distances: Students' and experts' concepts of the scale of scientific phenomena. Journal of Research in Science Teaching, 43(3). 282-319.

Tretter, T. R., Jones, M. G., & Minogue, J. (2006). Accuracy of scale conceptions in science: Mental maneuverings across many orders of spatial magnitude. Journal of Research in Science Teaching, 43(10), 1061-1085.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp.

127-174). New York: Academic Press.

Wagner, E. P. (2001). A study comparing the efficacy of a mole ratio flow chart to dimensional analysis for teaching reaction stoichiometry. School Science and Mathematics, 101(1), 10-22.

Weber, K. (2002). Developing students' understanding of exponents and logarithms. ERIC Documents, 471-763.

Zen, E.-A. (2001). What is deep time and why should anyone care? Journal of Geoscience Education, 49(1), 5-9.