

행렬스타 그래프와 하프 팬케익 그래프 사이의 일대일 사상 알고리즘

One-to-One Mapping Algorithm between Matrix Star Graphs and Half Pancake Graphs

김종석* · 유남현** · 이형옥***†

Jong-Seok Kim, Nam-Hyun Yoo, and Hyeong-Ok Lee†

*로체스터대학교 컴퓨터과학과, **경남대학교 조선해양IT공학과, ***순천대학교 컴퓨터교육과

† Dept. of Computer Education, Sunchon National University

요 약

행렬스타 그래프와 하프팬케익 그래프는 스타 그래프의 변형으로 노드 대칭성과 허용도 등 여러 가지 좋은 성질을 갖는다. 본 연구에서는 행렬스타 그래프와 하프팬케익 그래프 사이의 임베딩을 분석한다. 연구 결과로 행렬스타 그래프 MS_{2n} 는 하프팬케익 그래프 HP_{2n} 에 연장을 5, 확장을 1에 임베딩 가능하다. 또한 하프팬케익 그래프 HP_{2n} 는 행렬스타 그래프 MS_{2n} 에 임베딩하는 연장을 비용이 $O(n)$ 임을 보인다. 이러한 결과는 스타 그래프에서 개발된 여러 가지 알고리즘을 하프팬케익 그래프에서 상수의 추가적인 비용으로 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다. 왜냐하면 스타 그래프 S_n 은 행렬스타 그래프 MS_{2n} 의 부분 그래프이기 때문이다.

키워드 : 행렬스타 그래프, 하프팬케익 그래프, 임베딩, 병렬처리, 하이퍼큐브

Abstract

Matrix-star and Half-Pancake graphs are modified versions of Star graphs, and has some good characteristics such as node symmetry and fault tolerance. This paper analyzes embedding between Matrix-star and Half-Pancake graphs. As a result, Matrix-star graphs MS_{2n} can be embedded into Half-Pancake graphs HP_{2n} with dilation 5 and expansion 1. Also, Half Pancake Graphs, HP_{2n} can be embedded into Matrix Star Graphs, MS_{2n} with the expansion cost, $O(n)$. This result shows that algorithms developed from Star Graphs can be applied at Half Pancake Graphs with additional constant cost because Star Graphs, S_n is a part graph of Matrix Star Graphs, MS_{2n} .

Key Words : Matrix Star Graphs, Half Pancake Graphs, Embedding, Parallel Processing, Hypercube.

1. 서 론

사회 현상이나 과학, 공학 분야에서 많은 계산을 수행하면서 또한 빠른 시간에 해를 구해야하는 응용분야의 문제를 해결하기 위해 고성능 컴퓨터에 대한 관심이 집중되고 있다. 컴퓨터의 속도를 결정하는 주용한 요소는 컴퓨터 내부의 프로세서 속도는 지속적으로 개선되고 있지만 하드웨어 장치의 물리적 특성으로 그 한계성에 봉착하고 있다. 또한 응용 분야에서 문제해결을 위해 요구하는 정도의 시스템 성

능을 얻기에는 여전히 부족하다. 대부분의 컴퓨터 설계에서 성능 향상을 위한 방법으로써 병렬처리(parallel processing) 기술이 널리 사용되고 있다. 병렬처리란 다수의 프로세서들이 여러 개의 프로그램들 또는 한 프로그램의 분할된 부분들을 분담하여 동시에 처리하는 기술을 말한다[1].

병렬처리를 위한 다중 컴퓨터 시스템의 각 프로세서들은 자신의 지역 메모리 장치를 갖고, 프로세서들은 정적인 상호 연결망에 의해 연결되어 있다. 다중 컴퓨터의 프로세서들을 연결하기 위한 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다[19,20].

상호연결망(interconnection network)은 각 프로세서를 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 예지로 나타내는 무방향 그래프로 표현되는데, 지금까지 제안된 상호연결망은 노드 개수를 기준으로 분류하면 $k \times n$ 개로 표현되는 메쉬 부류[2,3], 노드 주소가 이진수를 가지면서 2의 지수승개를 갖는 하이퍼큐브(hypercube) 부류[1], 노드 주소가 순열 형태를 갖지면서 n 팩토리얼로 표현되는 스타(star) 그래프 부류[4]로 나눌 수 있다.

상호연결망을 평가하는 척도로는 하드웨어적인 척도와

접수일자: 2014년 5월 2일

심사(수정)일자: 2014년 6월 27일

게재확정일자 : 2014년 6월 30일

† Corresponding author

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

소프트웨어적인 척도로 구분할 수 있다. 하드웨어 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 등이 있으며, 소프트웨어적인 척도로는 지름(diameter), 평균거리(average distance), 고장지름(fault diameter), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다[1,5]. 상호연결망의 망비용(network cost)은 분지수×지름으로 정의된다. 분지수는 하드웨어 비용과 관련되어 있으며 지름은 소프트웨어적인 처리 비용을 나타낸다. 상호연결망에서 하드웨어 비용과 소프트웨어 비용은 역상관 관계를 가지고 있다. 즉 하드웨어 비용과 관련된 분지수를 늘리면 소프트웨어 비용인 지름은 줄어들게 된다. 상호연결망에서 그래프이론 관점에서 망비용을 개선하기 위한 방안이 여러 가지로 연구되었다. 이러한 방법으로는 모듈 개념을 이용한 연결망 설계 방안, 분지수를 절반으로 줄이면서 지름은 그대로 유지하는 방안, 분지수는 그대로 유지하면서 연결 관계를 조작하여 지름을 절반으로 줄이는 방안 등이 있다[6,7,8].

본 연구에서는 노드 개수가 팩토리얼 개수를 갖는 그래프중에서 행렬스타 그래프를 하프팬케익 그래프에 노드와 에지를 일대일 사상하는 방법을 통해 임베딩을 분석한다. 행렬스타 그래프는 스타 그래프를 부분 그래프로 갖고 있으므로 스타 그래프에서 개발된 알고리즘을 하프팬케익 그래프에서 상수의 추가 비용으로 시뮬레이션 할 수 있는 장점이 있다. 논문의 구성은 2장에서 상호연결망과 행렬스타 및 하프팬케익 그래프 구조에 대해 알아보고, 3장에서 노드와 에지를 사상하는 방법을 통해 연장율을 분석하고 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 관련연구

상호연결망으로 제안된 스타 그래프 부류는 노드 주소를 표현하는 정수의 개수 n 을 이용한 팩토리얼 개의 노드수를 갖는 스타(star) 그래프[4], 버블정렬(bubblesort) 그래프[12], 전위(transposition) 그래프[9], 팬케익(pancake) 그래프[10,11], Rotator 그래프[12], Faber-Moore 그래프, 매크로-스타(macro-star) 그래프[13], 행렬스타(matrix-star) 그래프[17], 하프팬케익[18] 등이 있다. 스타 그래프 부류는 노드 개수가 팩토리얼개이므로 하이퍼큐브(hypercube)와 비슷한 노드 개수를 가질 때 상대적으로 망비용이 개선된 결과를 갖는다. 그렇지만 연결망의 전체 노드 개수의 증가율이 급격하고 이진수로 표현되는 하이퍼큐브 부류와 임베딩이 어려운 단점이 있다[14].

스타 그래프 S_n 은 $n!$ 개의 노드와 $n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v 와 w 의 순열에서 첫 번째 심볼과 나머지 $n-1$ 개 심볼 중 한 개의 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 v 와 w 사이에 에지가 존재한다. 스타 그래프 S_n 은 분지수가 $n-1$ 인 정규 그래프이고, 지름은 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ 이고, 노드 대칭 및 에지 대칭적이고 이분 그래프(bipartite graph)이고, 최대고장 허용도 성질이 있음이 알려졌다[4]. 그림 1.은 4차원 스타그래프이다. 임베딩에 있어서는 $n \times (n-2)!$ 매쉬를 스타 그래프 S_n 에 연장율 $n-1$, 확장율 $n-1$ 로 사상하고, $n(n-1) \times (n-2)!$ 매쉬 구조를 스타 그래프 S_n 에 연장율 $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, 확장율 1로 사상 가능함이 알려져 있다 [15]. 스타 그래프 S_n 에서 k 개의 입력을 갖는 병렬 알고리즘

은 $O(p \log p \cdot n \log n + pn^3 \log n)$ 시간에 정렬 될 수 있어서(단, $p = \lfloor k/n! \rfloor$) 하이퍼큐브에서 요구되는 $O(p \cdot n \log n + pn^2 \log^2 n)$ 보다 조금 크다. 또한 스타 그래프 S_n 에서는 $n!$ 개 입력의 Fourier Transform을 $O(n^2)$ 시간에 할 수 있음이 알려져 있다[16]. 또한 스타 그래프와 행렬스타 그래프 사이의 임베딩에 대한 연구 결과 스타 그래프가 행렬스타 그래프의 부분 그래프임이 알려져 있다[17]. 이에 본 연구에서는 스타 그래프에서 개발된 여러 가지 알고리즘을 하프팬케익 그래프에서 효율적으로 활용할 수 있는지 여부를 임베딩을 통해 분석하고자 한다.

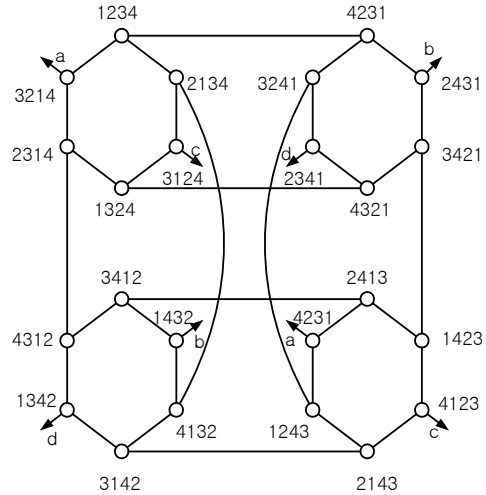


그림 1. 4차원 스타 그래프
Fig. 1. 4-Dimension Star Graphs

행렬스타 그래프 $MS_{2,n}$ 은 $2n$ 개의 심볼 $1,2,3,\dots,2n$ 으로 구성된 2행 n 열의 행렬 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 형태로 노드가 표현되고, 노드를 연결하는 에지는 다음과 같은 행렬로 표현된 노드 사이에 연결 관계를 갖는다. 첫째, 1행 1열의 원소와 1행 i 열의 원소가 교환된 행렬 $\begin{bmatrix} x_i & x_2 & \dots & x_1 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$, 둘째, 1행과 2행의 원소가 교환된 행렬 $\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix}$, 셋째, 1열에 있는 원소 x_1 과 x_{n+1} 이 교환된 행렬 $\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_1 & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 사이에 에지가 존재한다. 행렬스타그래프 $MS_{2,n}$ 의 에지를 3개로 구분하여 첫 번째 조건에 의해 정의되는 에지를 C_i -에지 $2 \leq i \leq n$ 라 하고, 두 번째 조건에 의해 정의되는 에지를 E -에지라 하고, 그리고 세 번째 조건에 의해 정의된 에지를 R -에지라 한다. 행렬스타 그래프 $MS_{2,n}$ 의 노드 개수는 $2n$ 개 심볼로 표현할 수 있는 순열 개수만큼 행렬을 생성할 수 있으므로 $(2n)!$ 개이고, 각 노드의 분지수는 $n+1$ 인 정규 연결망이다($n \geq 2$). 그림. 2는 노드가 2행 2열의 행렬로 표현되는 행렬스타 $MS_{2,2}$ 의 예이다. 행렬스타 $MS_{2,n}$ 의 노드는 $2n$ 개 원소를 갖는 2행 n 열의 행렬로 표현하므로 본 논문에서는 노드와 행렬을 동일한 개념으로 사용한다.

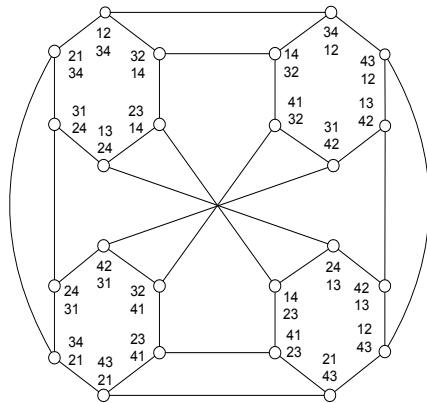


그림 2. 2차원 행렬스타 그래프
Fig. 2. 2-Dimension Matrix Star Graphs

팬케익 그래프는 P_n 은 $n!$ 개의 노드와 $n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성되고 노드 대칭성을 갖는다. 각 노드 주소는 n 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드 v 와 연결된 w 의 비트 스트링은 노드 v 의 순열에서 두 번째 심볼부터 n 번째 심볼이 역순으로 교환된 순열을 갖는 노드 v 와 w 사이에 에지가 존재한다. 팬케익 그래프 P_n 은 해밀턴 싸이클을 포함하지만, 4-차원 이상의 팬케익 그래프는 길이가 홀수인 싸이클이 존재하기 때문에 이분 그래프가 아님이 알려져 있고, 전위합 문제, 정렬(sorting)과 합병(merging) 알고리즘에 대한 연구 결과가 있다. 또한 팬케익 그래프에서 지름, 병렬 라우팅과 정렬, 임베딩, 부하균등 문제 등이 발표되었다[10,11]. 그림 3.은 4차원 팬케익 그래프이다.

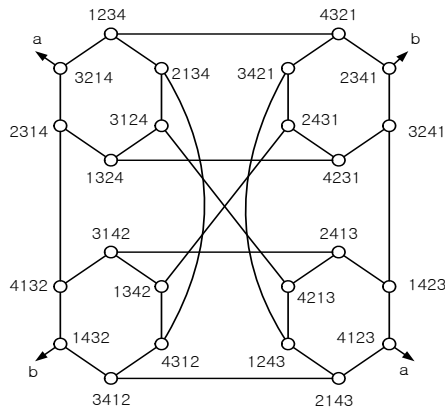


그림 3. 4차원 팬케익 그래프
Fig. 3. 4-Dimension Pancake Graphs

하프팬케익 그래프 HP_n 는 $HP_n=(V(HP_n),E(HP_n))$ 로 표현하고, HP_n 은 노드 집합 $V(HP_n)$ 와 에지 집합 $E(HP_n)$ 로 구성되어 있다($n \geq 3$). n 개의 서로 다른 원소를 이용하여 노드의 순열을 표현한다. 임의의 노드 $S=s_1s_2s_3 \dots s_i \dots s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots s_{n-1}s_n$, 이라 하면 하프팬케익 HP_n 은 다음과 같이 정의 된다($1 \leq i \leq n$). 노드를 연결하는 에지는 P_n 과 P_k 로 구성되어 있으며 다음과 같다 ($2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$). n 개 원소에 대한 순열에서 n 번째 원소부터 첫 번째 원소까지 성분의 순서를 뒤집어 생성된 순열

을 연결하는 에지를 P_n -에지라 하고, k 번째 원소에서 첫 번째 원소까지 성분의 순서를 뒤집어 생성된 순열을 연결하는 에지를 P_k -에지라 한다. 따라서 하프팬케익 HP_n 의 노드 개수는 $n!$ 개 이고, 분지수는 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 개다. 하프팬케익 그래프는 팬케익 그래프의 망비용을 개선하고자 제안된 연결망이다. 본 논문에서는 노드의 주소를 순열로 표현할 수 있으므로 순열을 노드 주소와 동일한 의미로 사용한다. 또한 HP_n 의 임의의 노드 H 와 에지 P_n 에 의해 인접한 노드를 $P_n(H)$ 라 하고, 에지 P_k 에 의해 인접한 노드를 $P_k(H)$ 로 나타낸다. 그림 4.는 4차원 하프팬케익 그래프이다.

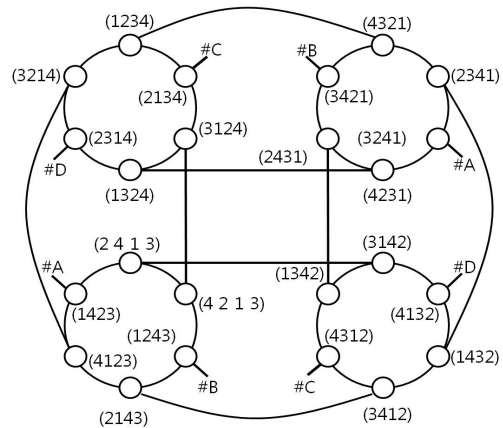


그림 4. 4차원 하프 팬케익 그래프
Fig. 4. 4-Dimension Half Pancake Graphs

3. 그래프간의 일대일 사상 알고리즘 분석

상호연결망의 임베딩은 어떤 그래프 G 가 다른 그래프 H 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 그래프 G 의 노드와 에지를 다른 그래프 H 의 노드와 에지로 일대일 사상(mapping)하는 것이다[2]. 상호연결망과 그래프의 관계에서 임베딩 분석은 이미 개발된 알고리즘의 활용 가능성을 평가하는 항목이다. 임베딩의 비용을 평가하는 척도는 연장율(dilation), 밀집율(congestion), 확장율(expansion)이 사용되고 있다. 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 f 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍(θ, ρ)을 말한다. θ 는 G 의 노드 집합 $V(G)$ 과 H 의 노드 집합 $V(H)$ 을 일대일로 대응시키는 함수이다. ρ 는 G 의 정점 v 와 w 를 연결하는 에지 $e=(v,w)$ 에서 노드 사상 함수에 의해 $\theta(v)$ 와 $\theta(w)$ 를 잇는 H 상의 라우팅 경로로 대응시키는 함수이다. 그래프 G 의 에지 e 의 연장율은 $\theta(v)$ 와 $\theta(w)$ 가 사상된 H 상에서의 $\theta(v)$ 에서 $\theta(w)$ 까지 최단 경로 알고리즘에 의한 $\rho(e)$ 의 길이를 말한다. $\rho(e)$ 의 길이는 최단 경로상에 존재하는 에지의 개수이고 이 값이 연장율이다. 임베딩 f 의 연장율은 G 의 모든 에지의 연장율 중 최댓값이다. 그래프 H 의 에지 e' 의 밀집율은 e' 에 포함되는 $\rho(e)$ 의 개수를 말한다. 즉 그래프 G 의 $\theta(v)$ 와 $\theta(w)$ 가 사상된 H 상에서 $\theta(v)$ 에서 $\theta(w)$ 까지 최단 경로를 지날때 H 상의 에지중 $\theta(v)$ 와 $\theta(w)$ 에 의해 경유하는 G 그래프의 에지개수를 의미한다. 임베딩 f 의 밀집율은 H 의 모든 에지의 밀집율 중 최댓값이다. 임베딩 f 의 확장율은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점의 개수 dp 대

한 평가로서 일반적으로 일대일인 경우 가장 최적이라고 할 수 있다.

정리1. 행렬스타 그래프 MS_{2n} 는 하프팬케익 그래프

HP_{2n} 에 연장을 5, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 연장을 분석 방법은 다음과 같다. 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 는 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 $H(h_1h_2h_3...h_i...h_n...h_{2n})$ 로 사상한다. 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 에 인접한 노드 X' 는 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 H' 로 사상한다. 행렬스타 MS_{2n} 과 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드는 $(2n)!$ 개를 갖고, 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 동일한 주소를 갖는 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 H 가 오직 한 개 존재하므로 확장율이 1임을 쉽게 알 수 있다. 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 H 에서 H' 로 라우팅 하는 최단경로 길이를 통해 연장을 분석한다. 본 증명에서는 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 주소 $2 \times n$ 행렬 형태 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 를 $1 \times 2n$ 행렬 형태 $[x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots x_j \dots x_{2n}]$ 로 표현한다. 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 $X (= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix})$ 에 인접한 노드는 $n+1$ 개 이다. 노드 X 에 인접한 3개 에지 C_i -에지, E -에지, R -에지를 통해 각 경우를 나누어 분석한다. 노드 X 에서 C_i -에지에 의해 인접한 노드는 $(n-1)$ 개 있고, E -에지에 의해 인접한 노드는 1개, R -에지에 의해 인접한 노드는 1개 이다.

논문의 편의상 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 주소 $2 \times n$ 행렬 형태 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 를 (수식1)로 표현 하겠다.

(경우1) C_i -에지, $2 \leq i \leq n$

행렬스타 MS_{2n} 의 노드 $X=(\text{수식1})$ 와 C_i -에지에 의해 인접한 노드 X' 의 행렬은 $\begin{bmatrix} x_i & x_2 & \dots & x_1 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이고, $1 \times 2n$ 행렬로 표현하면 $[x_i x_2 \dots x_1 \dots x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots x_j \dots x_{2n}]$ 이다($2 \leq i \leq n$). 노드 X 와 C_i -에지에 인접한 노드는 i 에 따라 3가지 경우로 세분할 수 있다.

(경우1-1) C_2 -에지, $i=2$

행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 C_2 -에지에 의해 인접한 노드 X' 의 행렬은 $\begin{bmatrix} x_2 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이고, $1 \times 2n$ 행렬로 표현하면 $[x_2 x_1 \dots x_1 \dots x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots x_j \dots x_{2n}]$ 이다. 즉 노드 X 의 심벌 x_1 과 x_2 가 서로 교환된 행렬이다. 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 $H(h_1h_2h_3...h_i...h_n...h_{2n})$ 에서 심벌 h_1 과 h_2 가 서로 교환된 순열 $H'(h_2h_1h_3...h_i...h_n...h_{2n})$ 는 에지 P_k , $k=2$ 에 인접한 노드 이다. 따라서 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 C_2 -에지에 인접한 노드는 하프팬케익 HP_{2n} 에서 연장을 1에 사상 가능하다.

(경우1-2) C_3 -에지, $i=3$

행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 C_3 -에지에 의해 인접한 노드 X' 의 행렬은 $\begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이고, $1 \times 2n$ 행렬로 표현하면 $[x_3 x_2 x_1 \dots x_1 \dots x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots x_j \dots x_{2n}]$ 이다. 즉 노드 X' 의 행렬은 노드 X 의 행렬에서 심벌 x_1 과 x_3 가

서로 교환된 행렬이다. 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 $H(h_1h_2h_3...h_i...h_n...h_{2n})$ 에서 심벌 h_1 과 h_3 가 서로 교환된 순열 $H'(h_3h_2h_1...h_i...h_n...h_{2n})$ 는 에지 P_k , $k=3$ 에 인접한 노드이다. 따라서 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 C_3 -에지에 인접한 노드는 하프팬케익 HP_{2n} 에서 연장을 1에 사상 가능하다.

(경우1-3) C_i -에지, $4 \leq i \leq n$

행렬스타 MS_{2n} 의 노드 $X=(\text{수식1})$ 와 C_i -에지에 의해 인접한 노드 X' 의 행렬은 $\begin{bmatrix} x_i & x_2 & \dots & x_{i-1} & x_1 & x_{i+1} & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이고, $1 \times 2n$ 행렬로 표현하면 $[x_i x_2 \dots x_{i-1} x_1 x_{i+1} \dots x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{j-1} x_j x_{j+1} \dots x_{2n}]$ 이다. 즉 노드 X' 의 행렬은 노드 X 의 행렬에서 심벌 x_1 과 x_i 가 서로 교환된 행렬이다. 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 $H(h_1h_2 \dots h_{i-1} h_i h_{i+1} \dots h_n h_{n+1} h_{n+2} \dots h_{j-1} h_j h_{j+1} \dots h_{2n})$ 에서 심벌 h_1 과 h_i 가 서로 교환된 순열 $H'(h_i h_2 \dots h_{i-1} h_1 h_{i+1} \dots h_n h_{n+1} h_{n+2} \dots h_{j-1} h_j h_{j+1} \dots h_{2n})$ 이다. 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 $H(h_1 h_2 \dots h_{i-1} h_i h_{i+1} \dots h_n \dots h_{2n})$ 에서 $H'(h_i h_2 \dots h_{i-1} h_1 h_{i+1} \dots h_n \dots h_{2n})$ 까지 최단경로 라우팅을 위한 적용할 에지 시퀀스는 $\langle P_{i-1}, P_i, P_2, P_i, P_{i-1} \rangle$ 이다. 노드 $H(h_1 h_2 \dots h_{i-1} h_i h_{i+1} \dots h_n \dots h_{2n})$ 에서 에지 시퀀스 $\langle P_{i-1}, P_i, P_2, P_i, P_{i-1} \rangle$ 를 적용한 노드의 최단경로 라우팅 과정은 다음과 같다. 노드 H 에서 에지 P_{i-1} 에 인접한 노드 $P_{i-1}(H)$ 의 순열은 $h_{i-1} \dots h_2 h_1 h_i h_{i+1} \dots h_n \dots h_{2n}$ 이다. 노드 $P_{i-1}(H)$ 에서 에지 P_i 에 인접한 순열 $P_i(P_{i-1}(H)) = h_i h_1 h_2 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_n \dots h_{2n}$ 이다. 노드 $P_i(P_{i-1}(H))$ 에서 에지 P_2 에 인접한 노드 $P_2(P_i(P_{i-1}(H))) = h_1 h_i h_2 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_n \dots h_{2n}$ 이다. 논문의 기술 편의상 노드 $P_2(P_i(P_{i-1}(H))) = K$ 로 간단히 표현한다. 노드 K 에서 에지 P_i 에 인접한 노드 $P_i(K) = h_{i-1} \dots h_2 h_i h_1 h_{i+1} \dots h_n \dots h_{2n}$ 이다. 노드 $P_i(K)$ 에서 에지 P_{i-1} 에 인접한 노드 $P_{i-1}(P_i(K)) = h_i h_2 \dots h_{i-1} h_1 h_{i+1} \dots h_n \dots h_{2n}$ 이다. 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 C_i -에지에 인접한 노드 X' 는 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 H 와 H' 로 각각 사상 가능하다. 따라서 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 C_i -에지에 인접한 노드 X' 는 하프팬케익 HP_{2n} 에서 연장을 5에 사상 가능하다($4 \leq i \leq n$)

(경우2) R -에지

행렬스타 MS_{2n} 에서 R -에지는 임의의 노드 X 의 행렬 주소에서 1열에 있는 2개 심벌을 서로 교환한 것이다. 따라서 노드 $X=(\text{수식1})$ 와 R -에지에 의해 인접한 노드 X' 의 행렬은 $\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_2 & \dots & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이고, $1 \times 2n$ 행렬로 표현하면 $[x_{n+1} x_2 \dots x_1 \dots x_n x_1 x_{n+2} \dots x_j \dots x_{2n}]$ 이다. 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 $H(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} h_{n+2} \dots h_j \dots h_{2n})$ 에서 $H'(h_{n+1} h_2 \dots h_i \dots h_n h_1 h_{n+2} \dots h_j \dots h_{2n})$ 로 최단경로 라우팅 할 때 필요한 에지를 통해 연장을 분석한다. 노드 H 에서 H' 까지 최단경로 라우팅을 위한 적용할 에지 시퀀스는 $\langle P_n, P_{n+1}, P_2, P_{n+1}, P_n \rangle$ 이다. 노드 $H(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} h_{n+2} \dots h_j \dots h_{2n})$ 에서 에지 시퀀스 $\langle P_n, P_{n+1}, P_2, P_{n+1}, P_n \rangle$ 를 적용한 노드의 라우팅 과정은 다음과 같다. 노드 H 에서 에지 P_n 에 인접한 노드 $P_n(H)$ 의 순열은 $h_n \dots h_i \dots h_2 h_1 h_{n+1} h_{n+2} \dots h_j \dots h_{2n}$ 이다. 노드 $P_n(H)$ 에서 에지 P_{n+1} 에 인접한 순열 $P_{n+1}(P_n(H)) =$

$h_{n+1}h_1h_2...h_i...h_nh_{n+2}...h_j...h_{2n}$ 이다. 노드 $P_{n+1}(P_n(H))$ 에서 에지 P_2 에 인접한 노드 $P_2(P_{n+1}(P_n(H)))=h_1h_{n+1}h_2...h_i...h_nh_{n+2}...h_j...h_{2n}$ 이다. 논문의 기술 편의상 노드 $P_2(P_{n+1}(P_n(H)))=K$ 로 간단히 표현한다. 노드 K 에서 에지 P_{n+1} 에 인접한 노드 $P_{n+1}(K)=h_n...h_i...h_2h_{n+1}h_1h_{n+2}...h_j...h_{2n}$ 이다. 노드 $P_{n+1}(K)$ 에서 에지 P_n 에 인접한 노드 $P_n(P_{n+1}(K))=h_{n+1}h_2...h_i...h_nh_1h_{n+2}...h_j...h_{2n}$ 이다. 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 R -에지에 인접한 노드 X' 는 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 H 와 H' 로 각각 사상 가능하다. 따라서 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 R -에지에 인접한 노드 X' 는 하프팬케익 HP_{2n} 에서 연장을 5에 사상 가능하다.

(경우3) E -에지

행렬스타 MS_{2n} 에서 E -에지는 임의의 노드 X 의 행렬 주소에서 1행과 2행의 n 개 심벌을 동일한 위치에 있는 심벌을 서로 교환한 것이다. 따라서 노드 $X=(\text{수식1})$ 와 E -에지에 의해 인접한 노드 X' 의 행렬은 $\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix}$ 이고, $1 \times 2n$ 행렬로 표현하면 $\begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} & x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix}$ 이다. 노드 X 와 노드 X' 가 각각 사상된 노드 H 의 순열은 $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} h_{n+2} \dots h_j \dots h_{2n})$ 이고, 노드 H' 의 순열은 $(h_{n+1} h_{n+2} \dots h_j \dots h_{2n} h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n)$ 이다. Half Pancake HP_{2n} 의 노드 H 에서 H' 까지 최단경로 라우팅을 위한 적용할 에지 시퀀스는 $\langle P_n, P_{2n}, P_n \rangle$ 이다. 노드 H $(h_1 h_2 \dots h_i \dots h_n h_{n+1} h_{n+2} \dots h_j \dots h_{2n})$ 에서 에지 시퀀스 $\langle P_n, P_{2n}, P_n \rangle$ 를 적용한 노드의 라우팅 과정은 다음과 같다. 노드 H 에서 에지 P_n 에 인접한 노드 $P_n(H)$ 의 순열은 $h_n...h_i...h_2h_1h_{n+1}h_{n+2}...h_j...h_{2n}$ 이다. 노드 $P_n(H)$ 에서 에지 P_{2n} 에 인접한 순열 $P_{2n}(P_n(H))=h_{2n}...h_j...h_{n+2}h_{n+1}h_1h_2...h_i...h_n$ 이다. 노드 $P_{2n}(P_n(H))$ 에서 에지 P_n 에 인접한 노드 $P_n(P_{2n}(P_n(H)))=h_{n+1}h_{n+2}...h_j...h_{2n}h_1h_2...h_i...h_n$ 이다. 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 E -에지에 인접한 노드 X' 는 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 H 와 H' 로 각각 사상 가능하다. 따라서 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 E -에지에 인접한 노드 X' 는 하프팬케익 HP_{2n} 에서 연장을 3에 사상 가능하다. 따라서 행렬스타 그래프 MS_{2n} 는 하프팬케익 그래프 HP_{2n} 에 연장을 5, 확장율 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

정리2. 하프팬케익 그래프 HP_{2n} 는 행렬스타 그래프 MS_{2n} 에 연장을 $O(n)$, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

증명 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드는 $\langle 2N \rangle = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 의 순열로 표현하고, 노드를 연결하는 에지는 P_n 과 P_k 로 구성되어 있다($2 \leq k \leq n+1$). 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 H $(h_1h_2h_3...h_i...h_n...h_{2n})$ 에 인접한 노드 H' 는 $n+1$ 개다. 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드 H 와 H' 를 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X 와 X' 로 각각 사상하고, 노드 X 에서 X' 로 최단경로 라우팅을 위해 필요한 에지 개수를 통해 연장을 분석한다. 노드 H $(h_1h_2h_3...h_i...h_n...h_{2n})$ 에 인접한 $n+1$ 개의 H' 에서 연장을 값이 가장 큰 경우는 에지 P_n 에 인접한 노드이다. 증명의 편의를 위해 하프팬케익 HP_{2n} 의 주소를 행렬스타 MS_{2n} 과 동일한 $2 \times n$ 행렬 형태로 표현한다. 하프팬케익 HP_{2n} 의 노드

H 의 순열은 $h_1h_2h_3...h_i...h_n...h_{2n}$ 이므로 $2 \times n$ 행렬 형태로 표현하면 $\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_i & \dots & h_n \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \dots & h_j & \dots & h_{2n} \end{bmatrix}$ 로 나타낼 수 있다. 노드 H 에서 P_n 에 인접한 노드 H' 의 순열 $P_n(H)$ 은 $h_{2n}...h_n...h_i...h_3h_2h_1$ 이므로 $2 \times n$ 행렬 형태로 표현하면 $\begin{bmatrix} h_{2n} & h_{2n-1} & \dots & h_j & \dots & h_{n+1} \\ h_n & h_{n-1} & \dots & h_i & \dots & h_1 \end{bmatrix}$ 이다. 행렬스타 MS_{2n} 의 노드 X $(=$ 수식1)에서 X' $(=$ $\begin{bmatrix} x_{2n} & x_{2n-1} & \dots & x_j & \dots & x_{n+1} \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_i & \dots & x_1 \end{bmatrix})$ 까지 라우팅을 위한 최단 경로 길이가 연장율이 된다. 노드 X' 의 1행을 오름차순으로 정렬하기 위해서는 스타(star) 그래프의 지름 $\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \rfloor$ 만큼 C_i -에지가 필요하다. 왜냐하면 행렬스타 MS_{2n} 의 C_i -에지는 스타 그래프의 에지와 동일하고, 정렬하는 횟수가 가장 많이 필요한 경우는 내림차순 순열을 오름차순 순열로 정렬하는 경우이기 때문이다. 노드 X' $(=$ $\begin{bmatrix} x_{2n} & x_{2n-1} & \dots & x_j & \dots & x_{n+1} \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_i & \dots & x_1 \end{bmatrix})$ 에서 C_i -에지를 $\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \rfloor$ 번 이용하면 순열 $K = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_i & \dots & x_1 \end{bmatrix}$ 이 된다. 순열 K 와 E -에지에 인접한 순열 $E(K) = \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_i & \dots & x_1 \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_j & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$ 이다. 순열 $E(K)$ 의 1행 원소를 오름차순으로 정렬하기 위해 C_i -에지를 $\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \rfloor$ 번 이용하면 (수식1)의 순열이 된다.

따라서 하프팬케익 그래프 HP_{2n} 를 행렬스타 그래프 MS_{2n} 에 일대일 사상하기 위해서는 $2 \times (\lfloor \frac{3}{2}(n-1) \rfloor) + 1$ 개의 에지를 사용해야하므로 연장율은 $O(n)$ 이다.

4. 결론

본 논문에서는 스타그래프가 갖는 상호 연결망의 중요한 성질을 가지면서 망비용이 개선된 행렬스타 그래프와 하프팬케익 그래프사이의 임베딩을 분석하였다. 본 연구의 임베딩 방법은 행렬스타 그래프와 하프팬케익 그래프가 $(2n)!$ 개의 동일한 노드 수를 가질 때를 기준으로 하였다. 그래프 G 의 에지 생성 규칙을 통해 인접한 두 노드 u, v 를 대상 그래프 H 에 u' 와 v' 로 일대일 사상했을 때 그래프 H 에서 u' 에서 v' 로 최단 경로로 라우팅할 때 사용하는 에지의 개수를 통해 연장을 분석하였다.

본 논문의 연구 결과는 행렬스타 MS_{2n} 은 하프팬케익 HP_{2n} 에 연장을 5, 확장율 1에 임베딩 가능하고, 하프팬케익 HP_{2n} 은 행렬스타 MS_{2n} 에 연장을 $O(n)$ 에 임베딩 가능함을 보였다. 이러한 결과는 스타 그래프에서 개발된 여러 가지 알고리즘을 하프팬케익 그래프에서 상수의 추가적인 비용으로 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다. 왜냐하면 스타 그래프 S_n 은 행렬스타 그래프 MS_{2n} 의 부분그래프이기 때문이다.

References

[1] F. Harary, J. P. Hayes, and H.-J. Wu, "A Survey of

the Theory of Hypercube Graphs," *Comput. Math Appl.*, vol. 15, pp.277-289, 1988.

[2] Dong, Q., Zhou, J., Fu, Y., & Yang, X., "Embedding a mesh of trees in the crossed cube," *Information Processing Letters*, vol. 112, pp. 599 - 603, 2012.

[3] Ivan Stojmenovic, "Honeycomb Networks: Topological Properties and Communication Algorithms," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, vol. 8, no. 10, pp. 1036-1042, 1997.

[4] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "On Group Graphs and Their Fault Tolerance," *IEEE Trans. Comput.*, vol. c-36, no. 7, pp. 885-888, July 1987.

[5] Kim, J.-S., Eddie Cheng, & Lee, H.-O., "Embedding hypercubes, rings, and odd graphs into hyper-stars," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 86, no. 5, pp. 771-778, 2013.

[6] S.K. Yun and K.H. Park, "Hierarchical Cubic Networks", *IEEE Trans. Parallel Distributed syst.*, vol. 9, no. 4, pp. 410-414, 1998.

[7] D. R. Duh, G. H. Chen and J. F. Fang, "Algorithms and Properties of a New Two-Level Network with Folded Hypercubes as Basic Models," *IEEE Trans. Parallel Distributed syst.*, vol. 6, no. 7, pp.714-723, 1995.

[8] Huang, W.-Y., Liu, J.-J., & Chang, J.-M., "Cycle Embedding in Folded Hypercubes with More Faulty Elements," *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 62, pp. 737-740. 2012.

[9] S. Latifi and Pradip K. Srimani, "Transposition Networks as a Class of Fault-Tolerant Robust Networks," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 45, no. 2, pp. 230-238, 1996.

[10] K. Qiu, H. Meijer and S. G. Akl, "Parallel Routing and Sorting on the Pancake Networks," *LNCS*, no. 497, pp. 235-242, 1991.

[11] P. Berthome, A. Ferreira and S. Perennes, "Optimal Information Dissemination in Star and Pancake Networks," *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst.*, vol. 7, no. 12, pp. 1292-1300, 1996.

[12] Kim, M.-H., Kim, D.-Y., & Lee, H.-O., "Embedding Algorithms for Star, Bubble-Sort, Rotator-Faber-Moore, and Pancake Graphs," *LNCS*, vol. 6082, pp. 348-357. 2010.

[13] C. H. Yeh and E. A. Varvarigos, "Macro-Star Networks: Efficient Low-Degree Alternatives to Star Graphs," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, vol. 9, no. 10, pp. 987-1003, 1998.

[14] M. M. Azevedo, N. Bagherzadeh, and S. Latifi, "Low Expansion Packing and Embeddings of Hypercubes into Star Graphs: A Performance-Oriented Approach," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, vol. 9, no. 3, pp. 261-274, 1998.

[15] S. Ranka, J.-C. Wang, and N. Yeh, "Embedding Meshes on the Star Graph," *J. Parallel and Distributed Computing*, vol. 19, pp. 131-135, 1993.

[16] K. Qiu, S. G. Akl and H. Meuer, "On Some Properties and Algorithms for the Star and Pancake

Interconnection Networks," *Journal of Parallel and Distributed Computing* 22, pp. 16-25, 1994.

[17] Hyeongok Lee and Hyeongseok Lim, "Matrix-Star Graphs: A New Interconnection Network based on Matrix Operations," *Journal of KIISE: Computer Systems and Theory*, vol. 26, no. 4, pp. 389-405, 1999.

[18] JuBong Kim, "Design and Analyzation of Half Pancake Graphs," Master Thesis, Suncheon National University, 2014.

[19] R. Kabakas, Inho N., "Message Delivery and Energy Consumption Analysis on Pocket Switched Network Routing Protocols," *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 23, no. 6, pp. 571-576, 2013.

[20] Jungjun Kim, "ECG Signal Compression based on Adaptive Multi-level Code," *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 23, no. 6, pp. 519-526, 2013.

저 자 소 개



김종석(Jong-Seok Kim)

1995년 : 순천대학교 전산학과 이학사

2001년 : 순천대학교 컴퓨터과학과
이학석사

2004년 : 순천대학교 컴퓨터과학과
이학박사

2005년~2008년 : 오클라호마 주립대학교
(Oklahoma State University)
컴퓨터과학과 박사후과정(Post-doc.)

2008년~2012 : 영남대학교 정보통신공학과 연구교수

2012년~현재 : 로체스터 대학교(University of Rochester)
컴퓨터과학과 박사후과정(Post-doc.)

관심분야 : Interconnection Network, Graph Theory,
Combinatorics

Phone : +82-70-4641-3464

E-mail : rockhee7@gmail.com



유남현(Nam-Hyun Yoo)

1999년 : 순천대학교 컴퓨터과학과 이학사

2001년 : 순천대학교 컴퓨터과학과
이학석사

2007년 : 순천대학교 컴퓨터과학과
이학박사

2007년~2008년 : ㈜엘시스 개발팀장

2008년~2010년 : 오클라호마대학교 컴퓨터
학부 방문 교수

2010년~2011년 : ㈜엘시스 개발팀장

2011년~2013년 : 경남대학교 KOSTEC 책임연구원

2013년~현재 : 경남대학교 조선해양IT공학과 조교수

관심분야 : 인공지능, 상황인식, 해양로봇, 해양시스템, 스마트 센서

Phone : +82-55-249-2186

E-mail : hyun43@kyungnam.ac.kr



이형옥(Hyeong-Ok Lee)

1994년 : 순천대학교 전자계산학과 이학사

1996년 : 전남대학교 전산통계학과
이학석사

1999년 : 전남대학교 전산통계학과
이학박사

1999년~2002년: 한국정보화진흥원
선임연구원

2002년~현재: 순천대학교 컴퓨터교육과 교수

2006년~2007년: UTD 방문교수

관심분야 : 그래프이론, 알고리즘, 상호연결망, 병렬처리

Phone : +82-61-750-3345

E-mail : oklee@scnu.ac.kr