

## 2차원 압축성 유동 해석을 위한 강건한 무격자 해석기법 개발

허진영,<sup>1</sup> 이재상,<sup>1</sup> 김규홍,<sup>\*2</sup> 정석영<sup>3</sup>

<sup>1</sup>서울대학교 기계항공공학부

<sup>2</sup>서울대학교 기계항공공학부 항공우주신기술연구소

<sup>3</sup>국방과학연구소

### DEVELOPMENT OF A ROBUST MESHLESS METHOD FOR 2-D COMPRESSIBLE FLOW

J.Y. Huh,<sup>1</sup> J.S. Rhee,<sup>1</sup> K.H. Kim<sup>\*2</sup> and S.Y. Jung<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dept. of Mechanical & Aerospace Engineering, Seoul Nat. Univ.

<sup>2</sup>Dept. of Mechanical & Aerospace Engineering/Institute of Advanced Aerospace Technology, Seoul Nat. Univ.

<sup>3</sup>Agency for Defense Development

*The purpose of this study is to develop a new Meshless Method to solve 2-D compressible flow problems numerically. This paper includes a revised Least Square method that improves robustness compared with its original version by removing excessive numerical oscillation which occurs when points are randomly distributed. Numerical analyses of hypersonic flow over a blunt body were carried out using the method, then robustness, accuracy and convergence of their results were compared with those obtained from the original method.*

**Key Words :** 전산유체역학(CFD), 무격자 해석기법(Meshless Method), 최소제곱법(Least-Square Method), 라그랑지승수법(Lagrange Multiplier), 2차원 압축성 유동(2-D Compressible Flow), AUSMPW+(AUSMPW+)

### 1. 서 론

무격자 해석기법은 미분방정식을 수치적으로 해석하기 위해 고안된 기법 중 한가지로 해석공간상에서 격자 없이 질점들만을 가지고 수치해석을 수행하는 방법이다. 따라서 복잡한 형상이나 움직이는 물체 주위의 유동 해석 등 격자 생성에 많은 시간과 노력이 필요한 경우에 강점을 가진다. 무격자 해석기법은 Smooth Particle Hydrodynamics(SPH)가 1977년 최초로 개발된 후, 수많은 연구자들에 의해 다양한 무격자 해석기법들이 개발되었다. 근래에 와서는 압축성유동을 해석할 수 있는 오일러 방정식을 무격자 해석기법으로 해석하고자 하는 시도도 다양하게 진행되어 왔다[1]. 이들 가운데서 Sridar은 Upwind Finite Difference Scheme을 Katz and Jameson[2]은 Moving Least Square Method를 이용하여 압축성 유동에 대한 수치 해석을 각각 수행하였다. 이러한 선형 연구들을 통해 무

격자 해석기법이 보존법칙을 비록 엄격히 만족하진 못하더라도 다양한 해석검증을 통해 유한체적법과 매우 유사한 결과를 도출할 수 있음을 보여주었다. 하지만 지금까지의 연구자들은 주로 아음속과 천음속 영역에서의 유동해석에 초점을 맞추어 왔기 때문에 강한충격파를 포함하는 유동에서는 수치진동 없이 무격자 해석을 수행 하는데 어려움이 있었다. 이를 해결하기 위해서 Huh et al.[3]은 AUSMPW+[4]와 MLP[5]를 적용한 무격자 해석기법을 개발하였다. AUSMPW+는 AUSM-type 기법 중 하나로 벽면근처 및 충격파 부근에서 발생하는 진동 현상을 효과적으로 제거하는 공간 차분 기법이고, MLP는 공간 고차 내삽 기법을 다차원 공간에서 적용할 때 발생하는 수치진동을 제거하는 기법으로 이 두 기법을 적용한 무격자 해석기법을 이용하면 초음속 및 극초음속 유동 해석 시 강건하고 정확하게 수치해석을 수행할 수 있다. 하지만 균일하지 않은 질점계에서는 과도한 수치진동이 유발되는 등의 문제점이 발생하였다.

본 연구에서는 기존의 최소제곱법을 이용한 무격자 해석기법에 수치진동을 제거할 수 있는 조건을 라그랑지 승수법으로 추가함으로써 과도한 수치진동을 제어할 수 있는 무격자 해석기법을 개발하였다. 개발된 무격자 해석 코드를 유한체적

Received: August 31, 2014, Revised: September 18, 2014,  
Accepted: September 18, 2014.

\* Corresponding author, E-mail: aerocfd1@snu.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2014.19.3.085>

© KSCFE 2014

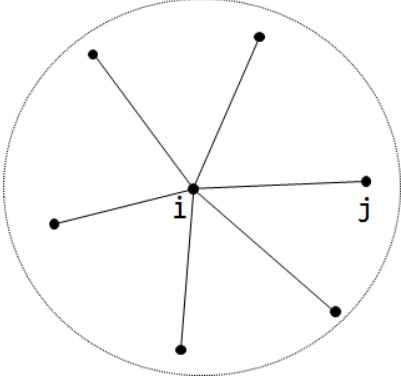


Fig. 1 Illustration of Local Point Cloud at point i

법 해석코드와 비교하여 강건성과 정확성을 검증하였다.

## 2. 무격자 해석 기법

### 2.1 최소제곱법

최소제곱법은 기준 점에서의 미분 값을 알기 위하여 해당 질점에서 근사함수를 구하고, 그 근사함수의 미분 값을 해석적으로 구하는 방법이다. 이 연구에서는 근사함수를 테일러 전개를 통해 구하였다.

질점  $(x_0, y_0)$ 을 기준으로 테일러 전개를 통해 질점  $(x_j, y_j)$ 에서의 함수 값을 계산하면 다음과 같다.

$$\Delta\phi_{0j} = \Delta x_{0j} \frac{\partial\phi_0}{\partial x} + \Delta y_{0j} \frac{\partial\phi_0}{\partial y} + O(\Delta^2) \quad (1)$$

식 (1)과 같이 2차 이상의 값을 무시하고 얻은 함수와 클라우드의 실제 값들을 사용하여 편차 값들을 구하고 이 편차들의 제곱합이 최소가 되는 함수를 구하게 된다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^n w_{0j} \left[ \Delta\phi_{0j} - \Delta x_{0j} \frac{\partial\phi_0}{\partial x} - \Delta y_{0j} \frac{\partial\phi_0}{\partial y} \right]^2, \\ & \text{wrt} \quad \frac{\partial\phi_0}{\partial x}, \frac{\partial\phi_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)를 계산하면 결과적으로 식 (1)의 미분 값들을 구할 수 있다. 여기서  $n$ 은 Local Point Cloud에 속하는 질점의 개수이다. Fig. 1은 Local Point Cloud의 모식도이고, Local Point Cloud에 속하는 질점들은 이산화에 이용되는 질점들이다. 각각의 편미분 값은 다음과 같다[2].

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_0}{\partial x} & \approx \sum_{j=1}^n a_{0j} \Delta\phi_{0j} \\ & w_{0j} \Delta x_{0j} \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta y_{0k}^2 - w_{0j} \Delta y_{0j} \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k} \Delta y_{0k} \end{aligned} \quad (3)$$

$$a_{0j} = \frac{w_{0j} \Delta x_{0j} \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta y_{0k}^2 - w_{0j} \Delta y_{0j} \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k} \Delta y_{0k}}{\sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k}^2 \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta y_{0k}^2 - \left( \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k} \Delta y_{0k} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_0}{\partial y} & \approx \sum_{j=1}^n b_{0j} \Delta\phi_{0j} \\ & w_{0j} \Delta y_{0j} \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k}^2 - w_{0j} \Delta x_{0j} \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k} \Delta y_{0k} \end{aligned} \quad (4)$$

$$b_{0j} = \frac{w_{0j} \Delta y_{0j} \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k}^2 - w_{0j} \Delta x_{0j} \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k} \Delta y_{0k}}{\sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k}^2 \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta y_{0k}^2 - \left( \sum_{k=1}^n w_{0k} \Delta x_{0k} \Delta y_{0k} \right)^2}$$

식 (2)-(4)에서와 같이 클라우드의 각 질점들이 최소제곱 값에 주는 영향에 차등을 주기 위하여 가중 함수를 사용하였다. 본 연구에서 사용한 가중함수는 simple inverse distance weighting function[6]으로 다음과 같이 표현된다.

$$w_{0j} = \frac{1}{(\Delta x_{0j}^2 + \Delta y_{0j}^2)^{1/2}} \quad (5)$$

### 2.2 라그랑지 승수법을 이용한 강건한 무격자 해석기법

최소제곱법을 이용하여 얻은 식 (3)은 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_i}{\partial x} & \approx \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta\phi_{ij} \\ & = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\phi_j - \phi_i) \\ & = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\phi_j + \phi_i - 2\phi_i) \\ & = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \frac{\phi_j + \phi_i}{2} - \phi_i \right) \\ & = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \phi_{ij+\frac{1}{2}} - \phi_i \right) \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)과 같이 점  $i$ 에서의 이산화 된 편미분 값은 mid-point와  $i$  값의 선형 결합으로 표현될 수 있다. 여기서 mid-point는 선분  $\overline{ij}$ 의 중심점으로 정의되고, Fig. 2는 mid-point의 모식도이다. 이 식을 오일러 방정식의 대류항에 대한 차분 결과로 보면, mid-point 값은 유한체적법의 cell 경계에서의 플럭스 값과 대응됨을 유추할 수 있다. 한편  $\phi_i$  항은 유한체적법과 대응되는 항이 없고, 해석수행 시 수치진동을 발생시키는 요

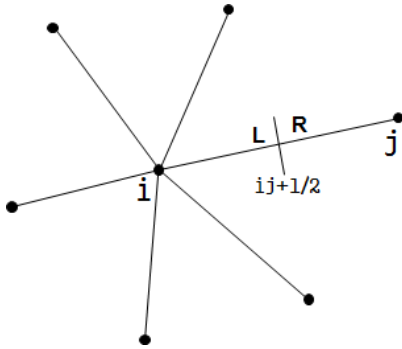


Fig. 2 Illustration of Mid-point Value on the Edge Connecting Nodes i and j

소가 되므로 다음과 같은 제한조건을 가정하였다.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0 \tag{7}$$

y방향에 대한 편미분도 같은 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0 \tag{8}$$

식 (7), (8)을 만족시키는 가운데 식 (2)를 구하기 위하여 라그랑주 승수법을 도입하였다. 라그랑주 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$A \equiv F_i + \lambda G_i + \mu H_i \tag{9}$$

여기서  $F_i, G_i, H_i$ 는 각각 목적함수와 제약함수들로써 다음과 같다.

$$F_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} [\Delta\phi_{ij} - \Delta x_{ij} (\sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta\phi_{ik}) - \Delta y_{ij} (\sum_{k=1}^n b_{ik} \Delta\phi_{ik})]^2 \tag{10}$$

$$G_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tag{11}$$

$$H_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \tag{12}$$

라그랑주 함수가  $\nabla A = 0$ 을 만족하도록 식을 정리하면, 최종적으로 다음과 같은 행렬방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
 AX &= B \\
 A &= \begin{bmatrix} D & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & d_n \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \\
 d_i &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n w \Delta x_{ik}^2 & \sum_{k=1}^n w_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik} \\ \sum_{k=1}^n w_{ik} \Delta x_{ik} \Delta y_{ik} & \sum_{k=1}^n w_{ik} \Delta y_{ik}^2 \end{bmatrix} \\
 E &= \begin{bmatrix} I_2 \\ \vdots \\ I_2 \end{bmatrix}_{2n \times 2}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$X^T = [a_{i1}, b_{i1}, \dots, a_{in}, b_{in}, \lambda, \mu]$$

$$B^T = [w_{i1} \Delta x_{i1}, w_{i1} \Delta y_{i1}, \dots, w_{in} \Delta x_{in}, w_{in} \Delta y_{in}, 0, 0]$$

본 연구에서는 LU 분해를 이용하여 역행렬 계산을 수행하였다.

### 3. 오일러 방정식에 적용

#### 3.1 지배방정식

본 연구에 사용된 지배방정식은 압축성 비점성 2차원 오일러 방정식으로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uH \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho vH \end{bmatrix} \tag{15}$$

오일러 방정식을 무격자 해석기법으로 표현하면 다음과 이산화 된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^n (a_{0j} \Delta f_{0j} + b_{0j} \Delta g_{0j}) \\
 = \frac{\partial w_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \Delta F_{0j} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 계수  $a, b$ 는 식 (13)을 이용하여 얻어진다. 식 (16)에서  $F$ 는 directed flux로  $F_i = a_{ij} f_i + b_{ij} g_i$ 으로 정의 된다. 유동 해석의 정확성 향상과 AUSMPW+의 적용을 위하여 Fig. 2와 같은 중간 값을 사용하여 위 식을 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \Delta F_{0j} \\
&= \frac{\partial w_0}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^n \Delta F_{0j+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\partial w_0}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^n (F_{j+\frac{1}{2}} - F_0) \\
&= \frac{\partial w_0}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^n F_{j+\frac{1}{2}} - 2 \sum_{j=1}^n F_0 \\
&= \frac{\partial w_0}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^n F_{j+\frac{1}{2}} - 2 \sum_{j=1}^n (a_{0j} f_0 + b_{0j} g_0) \\
&= \frac{\partial w_0}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^n F_{j+\frac{1}{2}} - 2 f_0 \sum_{j=1}^n a_{0j} - 2 g_0 \sum_{j=1}^n b_{0j} \\
&= \frac{\partial w_0}{\partial t} + 2 \sum_{j=1}^n F_{j+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{17}$$

제안된 무격자 해석기법의 경우 식 (7), (8)의 조건을 만족하기 때문에 최종적으로 식 (17)와 같이 나타낼 수 있고 여기서  $F_{j+1/2}$ 는 AUSMPW+ 기법을 이용하여 값을 얻게 된다.

### 3.2 AUSMPW+적용

AUSM-type 기법으로 벽면근처 및 충격과 부근에서 발생하는 진동 현상을 효과적으로 제거하는 공간 차분 기법인 AUSMPW+기법[4]의 수치 플럭스는 다음과 같이 표현된다.

$$F_{\frac{1}{2}} = \overline{M_L^+} c_{\frac{1}{2}} \Phi_L + \overline{M_R^-} c_{\frac{1}{2}} \Phi_R + (P_L^+ P_L + P_R^- P_R) \tag{18}$$

여기서  $\Phi = (\rho, \rho u, \rho v, \rho H)^T$ ,  $P = (0, a_j p, b_j p, 0)^T$ 이며, 중간 지점에서의 마하수는 다음과 같이 정의 된다.

$$m_{\frac{1}{2}} = M_L^+ + M_R^- \tag{19}$$

식 (18)의  $\overline{M_{L,R}^\pm}$ 는 마하수 내삽 함수로 중간 지점에서의 마하수에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
& 1) \ m_{\frac{1}{2}} = M_L^+ + M_R^- \geq 0 \text{ 인 경우,} \\
& \overline{M_L^+} = M_L^+ + M_R^- [(1-\omega)(1+f_R) - f_L] \\
& \overline{M_R^-} = M_R^- \omega (1+f_R)
\end{aligned} \tag{20}$$

$$2) \ m_{\frac{1}{2}} < 0 \text{ 인 경우,}$$

$$\overline{M_L^+} = M_L^+ \omega (1+f_L) \tag{21}$$

$$\overline{M_R^-} = M_R^- + M_L^+ [(1-\omega)(1+f_L) - f_R]$$

함수  $f$  와  $\omega$ 는 압력 가중 함수로써, 다음과 같이 주어진다.

$$\omega(p_L, p_R) = 1 - \min\left(\frac{p_L}{p_R}, \frac{p_R}{p_L}\right)^3 \tag{22}$$

$$f_{L,R} = \left(\frac{p_{L,R}}{p_s} - 1\right), \ p_s \neq 0 \tag{23}$$

$$p_s = P_L^+ p_L + P_R^- p_R \tag{24}$$

AUSMPW+ 기법의 분할 마하수와 분할 압력은 다음과 같이 주어진다.

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2, & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|), & |M| > 1 \end{cases} \tag{25}$$

$$P^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M), & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(M)), & |M| > 1 \end{cases} \tag{26}$$

마하수는 다음과 같이 정의 된다.

$$M_{L,R} = \frac{U_{L,R}}{c_{1/2}} \tag{27}$$

중간 지점에서의 음속은 다음과 같다.

$$c_{1/2} = \min\left(\frac{c^{*2}}{\max(|U_L|, c^*)}, \frac{c^{*2}}{\max(|U_R|, c^*)}\right) \tag{28}$$

여기서 critical 음속  $c^*$ 는  $\sqrt{2(\gamma-1)/(\gamma+1)H}$ 이다.

### 3.3 내삽기법 및 제한자

해석 결과의 정확성을 향상시키기 위해서는 공간 수치기법에서 사용하는 중간 값을 고차 내삽을 통해 계산하여야 한다. 하지만 고차 내삽은 수치진동을 동반하기 때문에 이를 제어하기 위하여 제한자를 사용해 주어야한다. 본 연구에서는 minmod limiter를 무격자 해석기법에 적용하였다[3].

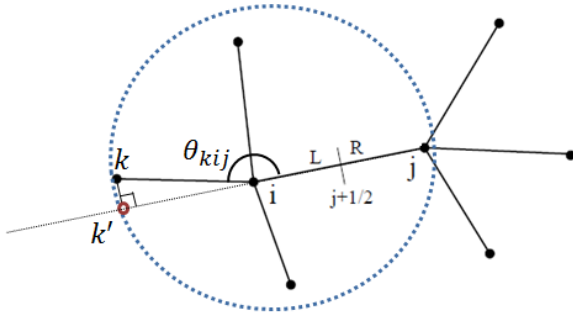


Fig. 3 Minmod Limiter for Meshless Method

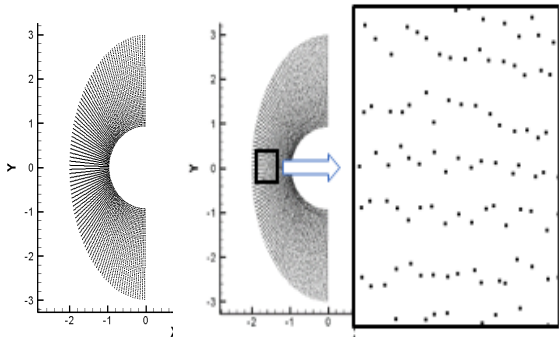


Fig. 4 Computational Domain for Validation  
(Left : Regular Grid, Right : Random Grid)

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \Phi_i + 0.5 \cdot \phi_L \cdot (\Phi_j - \Phi_i), \\ \Phi_R &= \Phi_j + 0.5 \cdot \phi_R \cdot (\Phi_i - \Phi_j) \end{aligned} \quad (29)$$

minmod limiter를 무격자 해석기법에 적용하기 위해서는 다음과 같은 보정이 필요하다. Fig. 3에서 표현된 것과 같이 질점  $i$ 의 Local Point Cloud에 속하는 질점  $k$ 가 일반적으로 직선  $\vec{ij}$  위에 존재하지 않으므로 정사영 시킨 가상의 질점  $k'$ 를 이용하여  $\phi$ 를 계산한다.

$$\begin{aligned} \phi &= \max(0, \min(1, r_k)), \\ \text{where } k &\in \text{local point cloud of node } i \\ &\text{ \& } \theta_{kij} \text{ is max} \end{aligned} \quad (30)$$

Table 1 Numerical Scheme and Flow Condition

Spatial Discretization	AUSMPW+
Limiter	Minmod Limiter
Time Integration	LU-SGS
Inflow Mach No.	10
Inflow Condition	P=100 pa, T=300 K

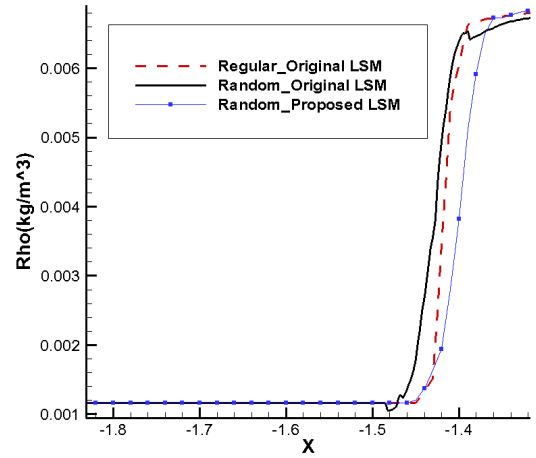


Fig. 5 Density Comparison between Original LSM and Proposed LSM along Stagnation Line

$$r_k = \frac{s_{ik'}}{s_{ji}} = \frac{s_{ki}}{s_{ji}} \cos(\theta_{kij}) \quad (31)$$

$$s_{ki} = \frac{\Phi_k - \Phi_i}{\|x_k - x_i\|} \quad (32)$$

식 (31)과 같이 무격자 해석기법에서의 minmod 판별점은 점  $j$ 의 반대편 선상에서 가장 가까운 점으로 선택된다.

#### 4. 수치해석 결과

개발된 2차원 압축성 무격자 해석기법을 검증하기 위하여 무딘 물체 주위 해석에 본 기법을 적용하였다. Fig. 4와 같이 사용된 질점계의 크기는 101×51이며, 균일한 질점계와 랜덤한 질점계를 각각 사용하였다. 랜덤한 질점계는 균일한 질점계에서 주위 질점사이 간격의 최대 30% 만큼의 값을 랜덤하게  $x$ 축과  $y$ 축으로 더하는 방법으로 제작되었다.

유동 해석을 위한 초기 및 외부조건은 Table 1과 같다. 시간 적분기법은 무격자 해석기법에 맞게 수정된 LU-SGS를 사용하였다[7].

Fig. 5는 stagnation line을 따라 밀도 변화를 나타낸 것이다. 기존의 방법의 경우 균일한 질점계에서는 단조성을 가지며 충격파를 강건하게 포착하고 있지만, 랜덤한 질점계에서는 충격과 전후에서 수치 진동이 발생하였고 있음을 확인할 수 있다. 하지만 새롭게 제안된 최소제곱법의 경우 랜덤한 질점계에서도 수치진동 없이 강건하게 충격파를 포착하였다. 또한 제안된 최소제곱법이 기존의 무격자 해석기법과 마찬가지로

## 후 기

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소가 지원하는 일반 기초연구 “복합 물리 현상 해석을 위한 비정상 압축성 유동 무격자 해석 기술”로 수행되었습니다.

## References

- [1] 2003, Liu, G.R., "Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method," *CRC Press*.
- [2] 2009, Katz, A. and Jameson, A., "A Comparison of Various Meshless Schemes Within a Unified Algorithm," *AIAA 2009-596*, 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida.
- [3] 2013, Huh, J., Kim, K. and Jung, S., "Meshless Method for Simulation of 2-D Compressible Flow," *The 2013 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology*.
- [4] 2001, Kim, K., Kim, C. and Rho, O., "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows I. AUSMPW+ Scheme," *Journal of Computational Physics*, Vol.174, pp.38-80.
- [5] 2005, Kim, K. and Kim, C., "Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows. Part II: Multidimensional limiting process," *Journal of Computational Physics*, Vol.208-2, pp.570-615.
- [6] 2003, Mavriplis, D.J., "Revisiting the least-squares procedure for gradient reconstruction on unstructured meshes," *AIAA paper 2003-3986*, AIAA 16th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida.
- [7] 2005, Chen, H.Q. and Shu, C., "An efficient implicit Mesh-Free method to solve two-dimensional compressible Euler equations," *International Journal of Modern Physics C*, Vol.16-3, pp.439-454.

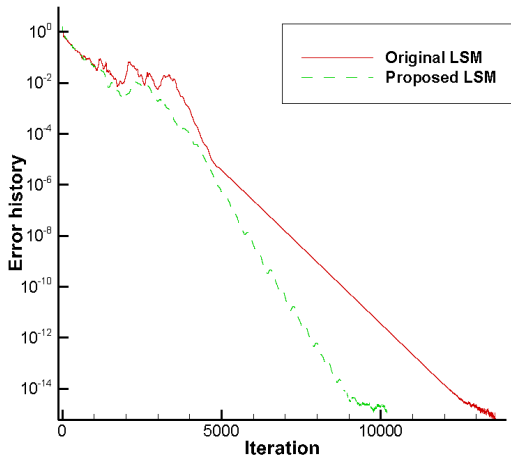


Fig. 6 Comparisons of Convergence Histories between Original LSM and Proposed LSM

보존법칙을 엄격하게 만족하진 못함에도 불구하고, 기존의 무격자 해석기법보다 충격과 후방의 유동 값을 비교적 더 정확하게 예측하고 있음을 확인하였다.

각각의 수치해석에 대한 error history는 Fig. 6를 통해 나타내었다. 새로 제안된 방법 또한 machine accuracy까지 수렴됨을 확인하였으며, 수렴속도 또한 더 높음을 확인 하였다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 2차원 압축성 유동을 해석하기 위한 강건한 무격자 해석코드를 개발하였다. 불균일한 질점계에서 발생하는 과도한 수치에러를 제거하기 위해서 최소제곱법에 라그랑지 승수법을 적용하여 추가조건을 부여하였다. 개발된 코드를 검증하기 위하여 무단물체 주위의 극초음속 유동을 해석하였다. 이를 통해 기존의 최소제곱법을 이용한 무격자 해석기법과 비교하여 강건성, 정확성, 수렴성이 개선되었음을 확인하였다.