

방향범위를 이용한 SDP 기반 적응 빔 형성

최 양 호*

SDP-Based Adaptive Beamforming with a Direction Range

Yang-Ho Choi*

요 약

적응 어레이는 조향벡터를 이용하여 조향벡터 방향의 신호는 보호하면서 간섭신호를 제거한다. 조향벡터에 에러가 있으면 원하는 신호도 감소되어 SINR(signal-to-interference-plus-noise ratio) 성능 저하를 가져온다. 본 논문에서는 원하는 신호의 도래범위를 이용하여 조향벡터 에러에 강인한 적응 빔 형성 기법을 제시한다. 제시된 기법에서는 도래범위에서 어레이 응답벡터에 관한 상관행렬을 적분을 통해 구하고, 이 상관행렬의 고유벡터 일부를 이용하여 조향벡터를 구하기 위한 최소화 문제를 정의한다. 이 최소화 문제를 컨벡스 최적화(convex optimization)의 일종인 SDP(semidefinite program) 문제로 완화하여 효과적으로 해결한다. 시뮬레이션 결과에 따르면, 제안방식은 기존의 강인한 빔 형성 방식인 ORM(outside-range-based method), USM(uncertainty-based method)보다 우수한 SINR 성능을 나타낸다.

Key Words : Adaptive Arrays, Robust Beamforming, Steering Vector Errors, Convex Optimization, SDP

ABSTRACT

Adaptive arrays can minimize contributions from interferences incident onto a sensor array while preserving a signal the direction vector of which corresponds to the array steering vector to within a scalar factor. If there exist errors in the steering vector, severe performance degradation can be caused since the desired signal is misunderstood as an interference by the array. This paper presents an adaptive beamforming method which is robust against steering vector errors, exploiting a range of the desired signal direction. In the presented method, a correlation matrix of array response vectors is obtained through integration over the direction range and a minimization problem is formulated using some eigenvectors of the correlation matrix such that a more accurate steering vector than initially given one can be found. The minimization problem is transformed into a relaxed SDP (semidefinite program) problem, which can be effectively solved since it is a sort of convex optimization. Simulation results show that the proposed method outperforms existing ones such as ORM (outside-range-based method) and USM (uncertainty-based method).

I. 서 론

MVDR(minimum variance distortionless response) 어레이는 조향벡터(steering vector) 방향으

로 빔 크기를 일정한 값으로 유지하면서 어레이 출력 전력을 최소로 하여 센서 어레이에 도래하는 간섭신호를 제거한다^[1]. 원하는 신호(desired signal)의 방향 벡터와 조향벡터 간에 불일치가 있다면 원하는 신호

* 본 2013년도 강원대학교 학술연구조성비로 수행되었습니다(과제번호-120231840).

• First Author : Kangwon National University, Dept. of Electrical and Electronic Engineering, yhochoi@kangwon.ac.kr, 정회원
 논문번호 : KICS2013-12-554, Received December 30, 2013; Revised April 3, 2014; Accepted April 3, 2014

도 간섭신호처럼 인식되어 감쇠되며, 이에 따라 성능 저하가 심하게 발생할 수 있다²⁾.

어레이 출력전력은 원하는 신호가 감쇠되지 않으면 감쇠된 경우에 비해 큰 값을 가진다. 이러한 사실에 기초하여, 조향벡터에 관한 불확실 집합(uncertainty set)을 정의하고 출력전력을 최대화 하는 집합 요소를 조향벡터로 사용하여 어레이에 대응할 수 있다³⁾. 이 방법은 불확실 집합의 각 벡터에 대한 빔 크기를 1 이상으로 하는 제한조건을 도입한 최악최적화(worst-case optimization) 방식⁴⁾과 동일하다³⁾. 최악최적의 해는 수학적 조작을 통해 컨벡스 최적화(convex optimization)⁵⁾ 문제로 변환하여 해를 구한다. 이들 방식에서는 원하는 신호의 도래각 추정으로부터 주어지는 초기 조향벡터를 이용하여 조향벡터에 관한 불확실 집합을 정의한다. 원하는 신호의 도래방향은 추정된 특정 도래각보다는 어떤 각도 범위로 주어진다 고 생각하는 것이 보다 일반적인 것이다. 어느 정도 정확한 추정이 곤란한 경우에도 적용할 수 있고, 추정된 도래각 어레이가 작지 않다면 각도 범위를 이용하는 것이 좋은 성능을 보일 것으로 기대할 수 있다.

본 논문에서는 원하는 신호의 도래방향 범위를 이용하여 조향벡터 어레이에 강인한 적응 빔 형성 기법을 제안한다. 제안 방법에서는 먼저 도래각 범위에서 적분을 통해 얻어지는 어레이 응답벡터에 대한 상관행렬을 구하고, 이 행렬의 일부 고유벡터(eigenvectors)를 이용하여 조향벡터를 구하기 위한 최소한 문제를 정의한다. 이 최소화 문제를 컨벡스(convex) 문제의 일종인 SDP(semidefinite program) 문제⁵⁾로 완화시켜 효과적으로 해를 구한다. 제시된 방법에서는 간섭 신호가 없다면 정확한 조향벡터를 구할 수 있다. 또한 기존의 도래방향 범위를 이용하는 방법⁶⁾보다 계산이 간편하고, 좋은 SINR (signal-to-interference-plus-noise ratio) 성능을 가짐을 시뮬레이션 결과는 보여준다.

II. 최적가중벡터와 출력전력

M 개의 센서를 가지는 어레이에 하나의 원하는 신호와 $(\eta - 1)$ 개의 간섭신호가 어레이에 도래할 때 수신신호를 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

여기서 \mathbf{A} 는 $M \times \eta$ 어레이 응답벡터(array response vector) 행렬로

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_\eta)] \quad (2)$$

$\mathbf{a}(\theta)$: 도래각 θ 에 대한 어레이 응답벡터

θ_i : i 번째 신호의 도래각

이고, $\mathbf{s}(t)$ 는 수신신호의 복소 포락선벡터(complex envelope vector)로

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_\eta(t)]^T \quad (3)$$

$s_i(t)$: i 번째 신호의 복소 포락선

이며, T 는 행렬의 전치(transpose), $\mathbf{n}(t)$ 는 잡음벡터이다. 방향벡터 $\mathbf{a}(\theta_i)$ ($i = 1, \dots, \eta$)를 \mathbf{a}_i 로 간략히 표시한다.

각 센서에 입력된 신호를 가중 결합하여 어레이 출력신호 $y(t)$ 를 생성한다.

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (4)$$

$\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_M]^T$ 는 가중벡터이다. 어레이 출력전력 p_o 은 아래처럼 주어진다.

$$p_o = E[y(t)y^*(t)] = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \quad (5)$$

여기서 E , H 는 각각 기댓값(expectation), Hermitian(complex conjugate transpose) 연산을, *는 켈레복소수(complex conjugate)를 나타내며, \mathbf{R}_x 는 수신신호에 대한 상관행렬로

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (6)$$

이고, $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$, σ_n^2 은 잡음전력, \mathbf{I} 는 단위행렬(identity matrix)이다. 식 (6)에서 잡음은 센서 간에 서로 상관되어 있지 않다고(spatially white) 가정하였다.

MVDR 방식에서는 아래 식 (7), (8)에 보인 것처럼 \mathbf{a}_1 에 대한 빔 크기를 단위이득으로 제한하면서 출력전력이 최소가 되도록 가중벡터를 구한다.

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \quad (7)$$

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}_1 = 1 \quad (8)$$

식 (8)의 제한아래 (7)의 최소화 문제의 해를 구하면

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}_1} \quad (9)$$

와 같이 주어진다. 원하는 신호는 간섭신호와 상관되어 있지 않다고 가정한다. 이때 출력전력을 최소로 하는 식 (9)의 최적 가중벡터는 SINR을 최대로 한다^[1]. 식 (9)와 상수 배만큼 다른 가중벡터를 사용해도 동일한 SINR을 얻는다. 식 (9)를 (5)에 대입하면 MVDR 최적가중벡터로 가중할 때의 출력전력은 (10)처럼 주어진다.

$$p_0 = \frac{1}{\mathbf{a}_1^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}_1} \quad (10)$$

실제의 경우, 원하는 신호의 방향벡터 \mathbf{a}_1 은 정확히 알려져 있지 않고, 사전에 주어진 \mathbf{a}_1 의 추정, $\hat{\mathbf{a}}_1$ 을 이용해야한다. 이때 MVDR 방식은 $\mathbf{w}^H \hat{\mathbf{a}}_0 = 1$ 의 제한 아래 출력전력이 최소가 되도록 한다. DMI(direct matrix inversion) 방법^[1]에서는 (9)에 의거해서, 상관행렬의 역행렬에 $\hat{\mathbf{a}}_1$ 를 곱해 가중벡터를 얻는다.

III. 빔 형성을 위한 조향벡터 추정

MVDR 방식에서는 처음에 주어진 조향벡터 $\hat{\mathbf{a}}_1$ 과 일치하지 않는 방향벡터를 가진 신호를 감쇠하여 어레이 출력에서 전력을 최소가 되도록 한다. 따라서 원하는 신호의 방향벡터와 조향벡터 $\hat{\mathbf{a}}_1$ 간에 불일치가 있다면 원하는 신호도 간섭신호처럼 감쇠되어 SINR 성능이 심하게 저하될 수 있다. 이러한 조향벡터 어레이 문제는 $\hat{\mathbf{a}}_1$ 보다 좀 더 정확한 조향벡터를 구해 사용함으로써 해결될 수 있다. 좀 더 정확한 벡터는 어레이 출력전력을 계산하여 구할 수 있다.

3.1 조향벡터에 관한 불확실 집합

단위이득제한 조건 $\mathbf{w}^H \mathbf{a} = 1$ 아래 어레이 출력전력을 최소로 하는 가중벡터는 식 (9)에서 \mathbf{a}_1 대신 \mathbf{a} 를 대입한 수식으로 표현된다. 이때, 어레이 출력전력은 (10)에 \mathbf{a} 를 대입하여 $1/f(\mathbf{a})$ 와 같이 주어지고, $f(\mathbf{a})$ 는

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a} \quad (11)$$

와 같다. $\mathbf{a} \neq \alpha \mathbf{a}_1$ (α 는 스칼라 인자) 이면 원하는 신호도 감쇠되어 출력전력 $[f(\mathbf{a})]^{-1}$ 은 작은 값을 가질 것이다. 벡터 \mathbf{a} 가 \mathbf{a}_1 과 가까울수록 원하는 신호의 감쇠는 작아지게 되고 출력전력은 증가하게 된다. 따라서 \mathbf{a} 에 대한 어떤 제한조건 하에서 출력전력을 최대로 하는 \mathbf{a} 를 조향벡터로 사용하면, 처음에 주어진 $\hat{\mathbf{a}}_1$ 을 사용한 경우보다 더 좋은 SINR 성능을 얻을 수 있다. 참고문헌 [3]에서는 다음과 같은 최소화 문제의 해를 구한다.

$$\min_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) \quad (12)$$

여기서

$$\mathbf{a} \in \Omega_U \quad (13)$$

$$\Omega_U = \{ \mathbf{a} : \| \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}_1 \|^2 \leq \epsilon \} \quad (14)$$

Ω_U 는 조향벡터에 관한 불확실 집합, ϵ 은 사전에 정한 상수로 불확실 집합의 한계값을 나타내고, $\| \cdot \|$ 는 Euclidean norm을 나타낸다. 최소화 문제 (12)–(14)의 해는 Lagrange multiplier 방법을 도입하여 구할 수 있으며, 그 해는

$$\mathbf{a}_s = (\mathbf{R}_x^{-1} \gamma^{-1} + \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{a}}_1 \quad (15)$$

와 같이 구해진다. Lagrange multiplier인 γ 는

$$\| (\mathbf{R}_x \gamma + \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{a}}_1 \|^2 = \epsilon \quad (16)$$

을 만족하는 해이다. 본 논문에서는 참고문헌 [3]의 방법을 USM(uncertainty-set-based method)이라 부른다. 조향벡터로 \mathbf{a}_s 를 사용하여 가중벡터는

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}_s}{\mathbf{a}_s^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}_s} \quad (17)$$

와 같이 주어진다. 식 (15)를 (17)에 대입하고 간단한 수학적 조작을 하면 다음처럼 구할 수 있다.

$$\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{R}_x + \gamma^{-1}\mathbf{I})^{-1}\hat{\mathbf{a}}_1}{\hat{\mathbf{a}}_1^H(\mathbf{R}_x + \gamma^{-1}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{R}_x(\mathbf{R}_x + \gamma^{-1}\mathbf{I})^{-1}\hat{\mathbf{a}}_1} \quad (18)$$

식 (18)의 기증벡터는 공분산 행렬 \mathbf{R}_x 에 $\gamma^{-1}\mathbf{I}$ 을 대각로딩(diagonal loading)한 것과 같으며, 따라서 USM은 대각로딩의 일종으로 볼 수 있다. 또한 이 방식은 최악최적화 방식^[4]과 동일하다^[3].

최악최적화 방식에서는 (14)에서 정의한 집합 Ω_U 에 속하는 모든 벡터 \mathbf{a} 에 대해서

$$|\mathbf{w}^H\mathbf{a}| \geq 1 \quad (19)$$

의 제한 조건을 만족시키면서 어레이 출력전력이 최소가 되도록 기증벡터를 구한다. 이 최소화 문제를 컨벡스 최적화^[5]의 한 형태인 SOC(second-order cone) 문제로 변환하여 해를 구할 수 있다.

3.2 방향 범위의 이용

원하는 신호가 $\hat{\theta}_1$ 방향으로부터 어레이에 도래하는 것으로 추정된다면, 초기 조향벡터 $\hat{\mathbf{a}}_1$ 은 $\ddot{\mathbf{a}}(\hat{\theta}_1)$ 과 같이 구할 수 있다. 여기서 $\ddot{\mathbf{a}}(\theta)$ 는 방향 θ 에 대한 가정된(모델링된) 어레이 응답벡터이다. 원하는 신호가 특정 방향으로부터 도래하는 것으로 추정되기 보다는 어떤 방향범위 내에 존재한다고 알려져 있는 경우가 보다 일반적인 것이다. 본 논문에서는 원하는 신호가 도래하는 방향범위 Φ_{ds} 가 주어진 경우, 이를 이용하여 조향벡터를 구하는 방법을 제시한다.

제시한 방식에서도 (12)의 최소화를 통해 조향벡터를 구한다. 이 최소화 문제에서 \mathbf{a} 에 대한 제한조건이 필요하고 이 조건을 Φ_{ds} 를 이용하여 유도한다. 방향범위 Φ_{ds} 가 $\Phi_{ds} = [\theta_L, \theta_U]$ 와 같다고 하자. θ_L, θ_U 는 각각 방향범위의 하한, 상한 값이다. Φ_{ds} 범위에서 다음과 같이 적분하여 행렬 $C(\Phi_{ds})$ 를 얻는다.

$$C(\Phi_{ds}) = \int_{\theta_L}^{\theta_U} \ddot{\mathbf{a}}(\theta)\ddot{\mathbf{a}}^H(\theta) d\theta \quad (20)$$

위에서 구한 $C(\Phi_{ds})$ 는 Hermitian 행렬로 positive semidefinite함을 쉽게 알 수 있다. $C(\Phi_{ds})$ 를 고유분해(eigendecomposition)하여

$$C(\Phi_{ds}) = \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^H = \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{E}^H \quad (21)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 λ_m, \mathbf{e}_m 은 각각 m 번째 고유치, 고유벡터이고

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M] \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_M] \quad (23)$$

이다. $C(\Phi_{ds})$ 는 Hermitian 행렬로 고유벡터는 서로 직교하여 $\mathbf{E}^H\mathbf{E} = \mathbf{I}$ 이고, 고유치는 양의 실수 값을 가지며 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$ 와 같이 내림차순으로 정렬되어 있다.

어레이 응답벡터 모델링이 정확하다면 $\mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{a}}(\theta_i)$ ($i = 1, \dots, \eta$)와 같게 된다. $\theta_1 \in \Phi_{ds}$ 이고 $\theta_j \notin \Phi_{ds}$ ($j = 2, \dots, \eta$)이라면, 큰 고유치에 대응하는 고유벡터들, 예를 들어

$$\mathbf{E}_K = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_K] \quad (24)$$

와 \mathbf{a}_1 간의 상관은 큰 반면에 \mathbf{a}_j ($j = 2, \dots, \eta$)와의 상관은 작을 것이다. 반대로 작은 고유치에 대응하는 고유벡터들

$$\mathbf{E}_{\bar{K}} = [\mathbf{e}_{K+1}, \dots, \mathbf{e}_M] \quad (25)$$

와 \mathbf{a}_1 간의 상관은 작은 반면에 \mathbf{a}_j ($j = 2, \dots, \eta$)와의 상관은 클 것이다. 여기서 K 은 M 보다 매우 작은 값이다. 식 (12)의 최소화 과정에서 해가 간섭신호 방향벡터나 이의 선형결합으로 접근하는 것을 방지하기 위해 위의 상관성을 이용한다. 이를 위해 제안방법에서는 집합

$$\Omega_P = \{\mathbf{a}: \|\mathbf{E}_K^H\mathbf{a}\|^2 \leq \beta, \|\mathbf{a}\|^2 = M\} \quad (26)$$

에 속하는 원소 \mathbf{a} 중 (12)와 같이 $f(\mathbf{a})$ 를 최소로 하는 벡터를 조향벡터로 구한다. 여기서

$$\beta = \max_{\theta \in \Phi_{ds}} g_p(\theta) \quad (27)$$

$$g_p(\theta) = \frac{M\|\mathbf{E}_{\bar{K}}^H\ddot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2}{\|\ddot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2} \quad (28)$$

만약 도래각이 $\theta_1 \in \Phi_{ds}, \theta_j \notin \Phi_{ds}$ ($j = 2, \dots, \eta$)

표 1. K 값에 따른 β 값
Table 1. Values of β for $K=1, \dots, 3$

K	1	2	3
β	4.69	0.32	5.8×10^{-3}

이고 $\mathbf{a}(\theta) = \ddot{\mathbf{a}}(\theta)$ 이면 집합 Ω_p 은 상대적으로 \mathbf{a}_j ($j=2, \dots, \eta$)보다 \mathbf{a}_1 에 가까운 벡터들로 구성될 것으로 예상할 수 있다.

하나의 예로, $\Phi_{ds} = [-4^\circ, 6^\circ]$ 와 같이 주어졌을 때 $M=10$ 인 ULA(uniform linear array) 어레이에서 K 값에 따른 β 값을 표 1에 나타내었다. 센서 간 간격은 반파장이다. $K=2$ 에서 β 는 0.32의 작은 값을 가지며, 이는 θ 가 Φ_{ds} 에 속하면 $\ddot{\mathbf{a}}(\theta)$ 성분의 99.7% ($=100 \times (10 - 0.32) / 10$) 이상이 \mathbf{E}_2 의 열공간(column space)에 놓여 있음을 말한다. $K=3$ 일 때 β 는 거의 0이며, $\ddot{\mathbf{a}}(\theta)$ 와 \mathbf{e}_i ($i=4, \dots, 10$) 간 상관은 실질적으로 0임을 의미한다.

집합 Ω_p 에서 크기제한을 주는 $\|\mathbf{a}\|^2 = M$ 의 조건은 중요하다. $\|\mathbf{E}_K^H \mathbf{a}\|$ 은 $\|\mathbf{a}\|$ 에 비례하고, 만약 이 크기제한 조건이 없다면, 임의의 \mathbf{a} 에 대해서도 어떤 스칼라 인자 α 를 곱하여 $\|\mathbf{E}_K^H \alpha \mathbf{a}\|^2 \leq \beta$ 가 되도록 할 수 있다. 또한 같은 크기 조건에서 $f(\mathbf{a})$ 를 최소화하는 벡터를 구하는 것이 바람직하다. 그 이유는 다음과 같다. 조향벡터에서 스칼라 인자만큼 다르면 가중벡터에서도 스칼라 인자만큼 다르고, 앞에서도 언급한 바와 같이 가중벡터에서 스칼라인자 만큼의 차이는 SINR 성능에서 아무런 차이를 주지 못한다. 따라서 조향벡터에서 스칼라 인자만큼 다르더라도 SINR은 같지만, $f(\mathbf{a})$ 는 $\|\mathbf{a}\|^2$ 에 비례한다. $\|\mathbf{a}\|^2 = M$ 의 제한으로 크기가 같은 조건에서 $f(\mathbf{a})$ 를 최소화하는 벡터를 구하게 된다.

3.3 조향벡터의 계산

제안방식에서 새로운 조향벡터를 구하기 위한 최소화 문제는 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$\min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a} \tag{29}$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = M \tag{30}$$

$$\|\mathbf{E}_K^H \mathbf{a}\|^2 \leq \beta \tag{31}$$

위 최소화 문제는 등식제한(equality constraint) 식인 (30)의 좌변이 아핀(affine) 함수가 아니어서 컨벡스 최적화⁵⁾ 문제로 다룰 수 없다. 비 컨벡스(non-convex) 문제를 푸는 것은 일반적으로 매우 어려운 일이며, 해가 존재하는지조차 알려져 있지 않다. 컨벡스가 아닌 위 문제를 컨벡스 문제의 일종인 SDP 문제로 완화시켜 근사적인 해를 구한다.

$f(\mathbf{a})$ 와 $\|\mathbf{a}\|^2$ 은 $f(\mathbf{a}) = \text{tr}(\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{Z})$, $\|\mathbf{a}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{Z})$ 와 같이 쓸 수 있다. 여기서 $\mathbf{Z} = \mathbf{a} \mathbf{a}^H$, tr 은 trace를 나타낸다. $\mathbf{Z} = \mathbf{a} \mathbf{a}^H$ 이므로 \mathbf{Z} 의 rank는 1이다. 다시 말하면 $\text{rank}(\mathbf{Z}) = 1$ 이다. $\text{rank}(\mathbf{Z}) = 1$ 은 컨벡스 제한조건이 아니므로 이 조건 대신 행렬 \mathbf{Z} 가 positive semidefinite 하다는 완화된 조건을 도입해서 (29)–(31)을 다시 쓰면

$$\min_{\mathbf{Z}} \text{tr}(\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{Z}) \tag{32}$$

$$\text{tr}(\mathbf{Z}) = M \tag{33}$$

$$\text{tr}(\mathbf{G} \mathbf{Z}) \leq \beta \tag{34}$$

$$\mathbf{Z} \geq \mathbf{0} \tag{35}$$

와 같이 나타낼 수 있고, $\mathbf{G} = \mathbf{E}_K \mathbf{E}_K^H$ 이다. 부등기호 ‘ \geq ’를 행렬에 대해 사용하는 경우 ‘positive semidefinite’임을 의미한다. 예로, 행렬 \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 에 대해 ‘ $\mathbf{M}_1 \geq \mathbf{M}_2$ ’은 행렬 $(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)$ 이 ‘positive semidefinite’함을 의미한다. 문제 (29)–(31)을 ‘원문제’, 문제 (32)–(35)를 ‘근사문제’라 부른다. $\text{rank}(\mathbf{Z}) = 1$ 이 $\mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$ 로 대체되어 근사문제는 원문

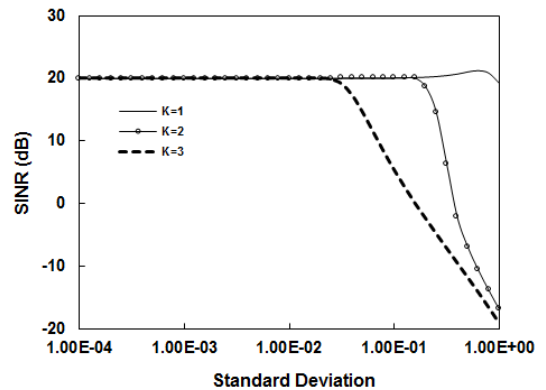


그림 1. 간섭신호가 없을 때 제안방식의 K 에 대한 성능비교
Fig. 1. Comparison of performance of the proposed method for different K in the absence of interference

제와 정확히 같지는 않지만 SDP 문제로 변환돼서 잘 알려진 패키지¹⁷⁾ 킷을 이용해서 그 해를 구할 수 있다.

간섭이 없는 경우 제안방식은 정확히 \mathbf{a}_1 과 동일한 조향벡터를 구할 수 있다. 간섭이 없는 경우, $\|\mathbf{a}\|^2 = 1$ 의 제한 조건아래 $f(\mathbf{a})$ 의 최소화하는 문제는 Rayleigh quotient¹⁹⁾ $\rho(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a} / \|\mathbf{a}\|^2$ 의 최소화 와 동가이며, $\rho(\mathbf{a})$ 의 최소치는 \mathbf{a} 가 \mathbf{R}_x^{-1} 의 최소 고유치에 대응하는 고유벡터일 때이고 이 고유벡터는 \mathbf{a}_1 과 같다. 따라서 $M \|\mathbf{E}_K^H \mathbf{a}_1\|^2 / \|\mathbf{a}_1\|^2 \leq \beta$ 이면 \mathbf{a}_1 은 Ω_p 의 원소이고 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1$ 에서 $f(\mathbf{a})$ 의 최소값을 가진다.

참고문헌 [6]의 결과를 이용하여, 다음 사실을 보일 수 있다. 유일해와 관련해서는 스킨라 인자의 차이를 가지는 해들은 같은 해로 간주한다.

- 1) 원문제가 해를 가지면 근사문제도 해를 가진다.
- 2) 원문제가 유일해를 가지면 근사문제도 유일해를

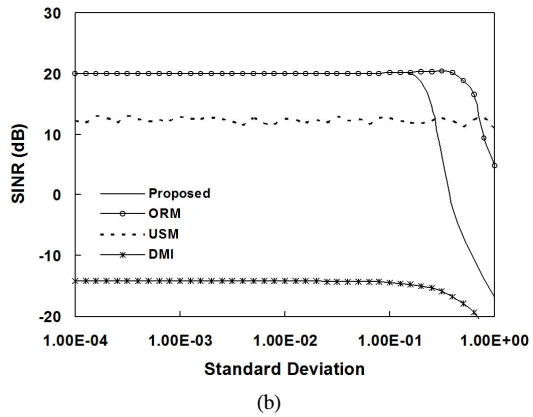
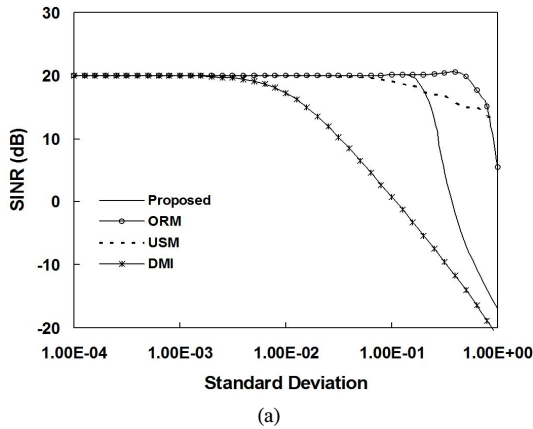


그림 2. 간섭신호가 없을 때 σ_a 에 따른 성능 (a) $\theta_1 = 0^\circ$ (b) $\theta_1 = 3^\circ$
 Fig. 2. performance as functions of σ_a in the absence of interference (a) $\theta_1 = 0^\circ$ (b) $\theta_1 = 3^\circ$

가진다.

3) 근사문제의 해 \mathbf{Z}_s 가 랭크 L 이라면 Hermitian 행렬 \mathbf{Z}_s 는 $\mathbf{Z}_s = \Psi\Psi^H$ 와 같이 쓸 수 있고, Ψ 는 $M \times L$ 행렬이다. $L=1$ 이라면 원문제의 해는 Ψ 와 같고, $L > 1$ 인 경우 원문제의 해는 $\Psi\boldsymbol{\kappa}$ 와 같은 형태로 주어지고 L 차원 벡터 $\boldsymbol{\kappa}$ 의 가능한 하나는 식 (36)에 주어진 $L \times L$ 행렬 \mathbf{B} 의 고유벡터 함으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{M} \Psi^H \Psi - \frac{\Psi^H \mathbf{E}_K \mathbf{E}_K^H \Psi}{\text{tr}(\Psi^H \mathbf{E}_K \mathbf{E}_K^H \Psi)} \quad (36)$$

제안방식과 참고문헌 [6]의 방식간의 차이는 (12)의 최소화에서 \mathbf{a} 에 대한 제한조건에 사용되는 행렬에 있다. 참고문헌 [6]에서는 (37)처럼 주어지는 행렬

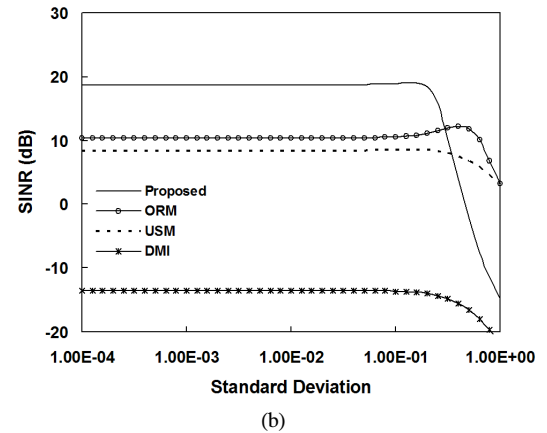
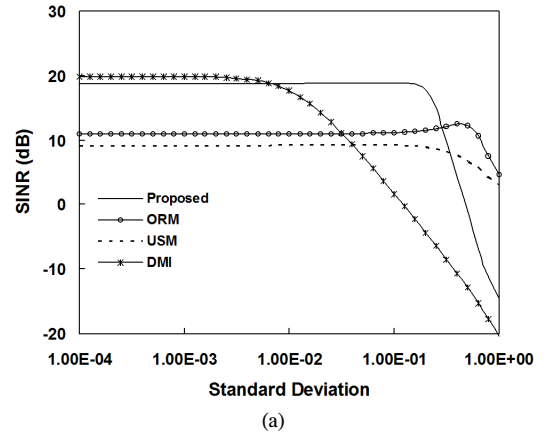


그림 3. 2개의 간섭신호 존재할 때 σ_a 에 따른 성능 (a) $\theta_1 = 0^\circ$ (b) $\theta_1 = 3^\circ$
 Fig. 3. performance as functions of σ_a in the presence of two interferences (a) $\theta_1 = 0^\circ$ (b) $\theta_1 = 3^\circ$

$C(\bar{\Phi}_{ds})$ 를 이용하여

$$C(\bar{\Phi}_{ds}) = \int_{\bar{\Phi}_{ds}} \ddot{\mathbf{a}}(\theta) \ddot{\mathbf{a}}^H(\theta) d\theta \quad (37)$$

다음 제한조건을 적용한다.

$$\mathbf{a}^H C(\bar{\Phi}_{ds}) \mathbf{a} \leq \beta \quad (38)$$

여기서 $\bar{\Phi}_{ds}$ 는 도래각 전체집합에서 Φ_{ds} 를 뺀 차집합이고

$$\beta' = \max_{\theta \in \bar{\Phi}_{ds}} g_o(\theta) \quad (39)$$

$$g_o(\theta) = \frac{M \ddot{\mathbf{a}}^H(\theta) C(\bar{\Phi}_{ds}) \ddot{\mathbf{a}}(\theta)}{\|\ddot{\mathbf{a}}(\theta)\|^2} \quad (40)$$

이다. 참고문헌 [6]의 방식을 ORM(outside-range based method)이라 부른다. ORM에서는 $\bar{\Phi}_{ds}$ 영역에서 적분을 통해 $M \times M$ 행렬을 (37)에 따라 구해야 함에 따라 계산이 매우 복잡하나, 반면에 제안방식에서는 $\bar{\Phi}_{ds}$ 보다 훨씬 좁은 범위를 가지는 Φ_{ds} 에서 구하므로 그 계산이 간단하다.

IV. 수치계산

수치계산을 통한 SINR 성능분석을 위해, 10개의 센서가 반파장 간격으로 놓인 ULA(uniform linear array) 어레이를 사용하였다. 달리 지정하지 않으면 원하는 신호의 SNR(signal to noise ratio)은 10 dB이다. 간섭신호는 존재하는 경우, $\theta_2 = -20^\circ$, $\theta_3 = 37^\circ$ 방향으로부터 도래하고 각 간섭신호의 INR(interference to noise ratio)은 20 dB로 같다. 제안방식의 성능을 ORM, USM, DMI(direct matrix inversion)^[1] 방식과 비교하였다. 제안방식과 ORM에서 3.2절 표 1에서와 같이 $\Phi_{ds} = [-4^\circ, 6^\circ]$ 로 하였고, USM에서 불확실 한계치를 참고문헌 [4], [6]에서 사용한 $\epsilon = 9$ 로 하였다 (참고문헌 [4], [6]에서는 $\epsilon^{1/2}$ 값을 나타냄). 표 1에 보인 바와 같이, 주어진 Φ_{ds} 에서 $\ddot{\mathbf{a}}(\theta)$ 는 \mathbf{E}_2 의 각 고유벡터와 상관이 매우 크다. K 에 대한 성능을 비교하는 그림 1을 제외하고, 제안방식에

서 $K=2$ 로 선택한다. θ_1 의 추정 $\hat{\theta}_1$ 은 $\hat{\theta}_1 = 0^\circ$ 로 초기에 주어진 조향벡터는

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \ddot{\mathbf{a}}(\hat{\theta}_1) = [1, \dots, 1]^T$$

와 같다. 여기서 $\ddot{\mathbf{a}}(\theta)$ 는 θ 방향에 대한 ULA 어레이의 응답벡터이다. 랜덤에러를 고려하여, 실제 원하는 신호에 대한 방향벡터는

$$\mathbf{a}_1 = \ddot{\mathbf{a}}(\theta_1) + \delta \mathbf{a}_1$$

와 같이 주어진다. 여기서 $\delta \mathbf{a}_1$ 는 Gaussian 랜덤변수 벡터로 $E[\delta \mathbf{a}_1] = \mathbf{0}$, $E[\delta \mathbf{a}_1 \delta \mathbf{a}_1^H] = \sigma_a^2 \mathbf{I}$ 이고, σ_a 는 $\delta \mathbf{a}_1$ 각 요소의 표준편차이다^[2]. 그림 1 ~ 3에서는 정확한 상관행렬 \mathbf{R}_x 를, 그림 4에서는 이의 추정을 사용하였다. 100번의 독립적인 모의실험을 통해 SINR 평균을 계산하였다.

그림 1은 간섭신호가 없고 $\theta_1 = 3^\circ$ 일 때, K 에 대한 제안방식의 성능을 σ_a 의 함수로 나타낸다. 3.3 절에서 설명한 바와 같이, $M \|\mathbf{E}_2^H \mathbf{a}_1\|^2 / \|\mathbf{a}_1\|^2 \leq \beta$ 의 조건이 만족되면 제안 방식은 정확한 조향벡터를 구해낸다. K 가 3이하에서 K 가 클수록 이 조건은 강화되며(다시 말하면, 식 (26)을 만족하는 집합 Ω_p 의 크기가 작아지며), 따라서 간섭이 없을 때 K 가 큰 경우, 작은 K 에 비해 상대적으로 정확한 조향벡터 구할 가능성이 감소된다. 이러한 이유로 성능이 감소하기 시작하는 σ_a 의 값이, 그림에서 보듯이, K 가 클수록 작아진다.

그림 2에서는 간섭이 없을 때, 제안방식을 ORM, USM, DMI 방식과 비교한다. 제안방식에서 $K=2$ 를 사용한다. 그림 2(a), 2(b)에서 각각 $\theta_1 = 0^\circ, 3^\circ$ 이다. 도래각 에러가 없는 $\hat{\theta}_1 = \theta_1$ 인 경우 σ_a 가 매우 작으면 제안방식, ORM, USM, DMI 방식 모두 최대 SNR인 20 dB를 보인다. σ_a 가 대략 5×10^{-3} 보다 크면 DMI 방식은 σ_a 가 증가함에 따라 SINR이 감소한다. 반면에 USM, 제안방식, ORM에서는 각각 대략 $8 \times 10^{-2}, 1.6 \times 10^{-1}, 4 \times 10^{-1}$ 에서 감소하기 시작한다. 도래각 에러가 있는 경우인 그림 1(b)를 살펴보면, DMI, USM 방식은 σ_a 가 매우 작더라도 성능이 크게 저하되고, 특히 조향에러에 대한 아무런 대책을 가지고 있지 않은 DMI 방식에서의 그 저하가 매우 심하

다. 한편 제안방식에서는 도래각 에러가 있더라도 앞에서 설명한 바와 같이 $M\|E_K^H a_1\|^2/\|a_1\|^2 \leq \beta$ 이면 a_1 과 동일한 조향벡터를 구할 수 있어 σ_a 가 작으면 랜덤에러에 대한 성능저하가 거의 없음을 보인다. ORM 방식에서도 $a_1^H C(\bar{\Phi}_{ds}) a_1/\|a_1\|^2 \leq \beta'/M$ 이면 a_1 과 동일한 조향벡터를 구할 수 있어 σ_a 가 작으면 랜덤에러로 인한 성능저하가 거의 없다. 제안방식과 비교하여 ORM이 상대적으로 큰 σ_a 에서 성능이 저하되기 시작한다.

그림 3은 2개의 간섭신호가 있을 때의 성능을 예시한다. 그림 3(a), 3(b)는 각각 $\theta_1 = 0^\circ, 3^\circ$ 인 경우이다. 그림 3(a), 3(b)를 비교하면, 제안방식, ORM, USM은 σ_a 에 대해 비슷한 성능 특성을 보여 도래각 에러에 둔감함을 나타낸다. DMI에서는 도래각 에러에 매우 민감하여 도래각 에러가 있는 경우, σ_a 가 매우 작아도

SINR이 크게 감소한다. 한편 ORM에서는 간섭이 없을 때, σ_a 가 매우 작더라도 간섭이 없는 경우와 비교하여 9 dB 이상의 큰 SINR 감소를 보이지만, 제안방식에서는 1.3 dB의 작은 감소를 나타낸다. 그림에 따르면, σ_a 가 3×10^{-1} 보다 크지 않으면 제안방식은 ORM보다 우수한 성능을 보인다.

그림 1 ~ 3의 결과를 종합 분석하면, 제안방식에서 E_2 를 구성하는 고유벡터는 $\ddot{a}(\theta)$ (여기서 $\theta \in \Phi_{ds}$)들과 큰 상관을 가지며, $E_2^H \ddot{a} \|^2 \leq \beta$ (여기서 β 는 0.32)를 만족하는 Ω_p 의 요소는 $\ddot{a}(\theta)$ 들과 이들 벡터와 가까이 있는 벡터들일 것이다. 따라서 σ_a 가 크지 않아 a_1 의 E_2 열공간 성분은 큰 값을 가져 $a_1/\|a_1\|$ 이 Ω_p 에 놓여 있을 확률이 실질적으로 1이면 거의 최적 SINR을 가지게 된다. 그러나 σ_a 가 커짐에 따라 $a_1/\|a_1\|$ 이 Ω_p 밖에 놓일 확률이 증가하고 성능이 저하하게 된다.

그림 4에서는 R_x 의 추정 $R_x(N)$ 을 이용하여 추정에 사용한 샘플의 수 N 의 함수로 SINR을 보여준다. 샘플행렬 $R_x(N)$ 은

$$R_x(N) = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N x(n)x^H(n) + \zeta \right)$$

와 같이 구하며, 여기서 $\zeta = 10^{-5} \text{tr} R_x$ 이고, $N < M$ 이어도 $R_x(N)$ 의 역행렬을 구할 수 있도록 ζ 를 더하였다. 그림에서 $\sigma_a = 8 \times 10^{-2}$ 이고, 이외 다른 시뮬레이션 사나리오는 그림 3과 같다. 그림 4(a), 4(b)는 각각 $\theta_1 = 0^\circ, 3^\circ$ 인 경우이다. N 이 매우 크면, 각 방식의 성능은 정상상태(steady-state)로 수렴하여 그림 3(a), 3(b)에서 $\sigma_a = 8 \times 10^{-2}$ 일 때의 SINR과 거의 같은 값을 가진다. 예를 들어 $N = 5000$ 일 때 제안방식은 그림 4(a), 4(b)에서 18.7 dB, 그림 3(a), (b)에서 18.8 dB 값을 가진다. 제안방식은 빠른 속도로 수렴하면서 다른 방식에 비해 우수한 성능을 나타내며, 조향벡터 에러에 강인함을 보여준다.

V. 결론

제안 방식에서는 원하는 신호의 도래각 추정보다는 원하는 신호가 도래할 것으로 예상되는 방향범위 Φ_{ds} 를 이용함으로써 도래각 추정에러를 포함한 조향벡터 에러에 잘 대응하도록 하고 있다. 제안방식과 ORM과

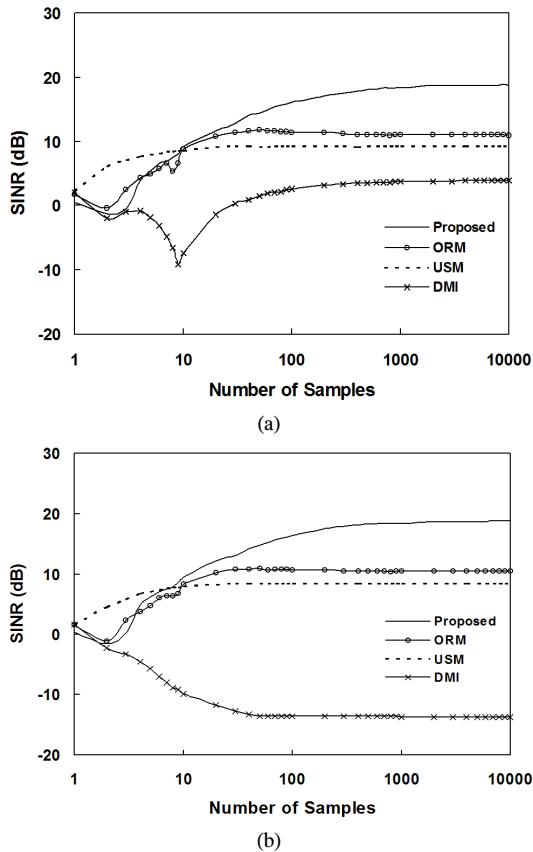


그림 4. 2개의 간섭신호 존재할 때 N에 따른 성능 (a) $\theta_1 = 0^\circ$ (b) $\theta_1 = 3^\circ$
 Fig. 4. Performance as functions of N in the presence of two interferences (a) $\theta_1 = 0^\circ$ (b) $\theta_1 = 3^\circ$

비교하면, ORM에서는 Φ_{ds} 의 외부인 $\bar{\Phi}_{ds}$ 에서 행렬 $C(\bar{\Phi}_{ds})$ 를 적분을 통해 구해야 함에 따라 Φ_{ds} 에서 적분을 하는 제안방식에 비해 계산이 복잡하다. 또한 시뮬레이션에서 보인 것처럼 조향벡터의 랜덤에러가 매우 크지 않으면 제안방식은 ORM보다 우수한 성능을 보인다. 간섭신호가 없는 경우, 제안방식은 도래각 에러에 관계없이 정확한 조향벡터를 구할 수 있으나 불확실 집합에 기초한 USM에서는 구하지 못한다.

[9] B. Noble and J. Daniel, *Applied Linear Algebra*, New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

최 양 호 (Yang-Ho Choi)

제36권 4호(무선통신), 2011년 4월호 참조

References

- [1] R. A. Monzingo and T. A. Miller, *Introduction to Adaptive Arrays*, NY: Wiley, 1980.
- [2] M. Wax and Y. Anu, "Performance analysis of the minimum variance beamformer in the presence of steering vector errors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, no. 4, pp. 938-947, Apr. 1996.
- [3] J. Li, P. Stoica, and Z. Wang, "On robust Capon beamforming and diagonal loading," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 51, no. 7, pp. 1702 - 1715, Jul. 2003.
- [4] S. A. Vorobyov, A. B. Gershman, and Z.-Q. Luo, "Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 51, no. 2, pp. 313-324, Feb. 2003.
- [5] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, 1st Ed., U.K.: Cambridge Univ. Press, 2004.
- [6] A. Khabbazibasmenj, S. A. Vorobyov, and A. Hassani, "Robust adaptive beamforming based on steering vector estimation with as little as possible prior information," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 6, pp. 2974-2987, Jun. 2012.
- [7] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones," *Optim. Meth. Softw.*, vol. 11-12, pp. 625-653, Aug. 1999.
- [8] M. Grant and S. Boyd, CVX Users' Guide for CVX version 1.22. <http://cvxr.com/cvx/>, Aug. 2012.