

# Haringx의 전단변형 이론을 고려한 부분강절 뼈대구조의 비탄성 좌굴해석

민병철\*

인덕대학교 토목환경설계과  
(2014. 4. 3. 접수 / 2014. 6. 3. 채택)

## Inelastic Buckling Analysis of Semi-rigid Frames with Shear Deformations by Haringx's Theories

Byoung-Cheol Min\*

Department of Civil & Environmental Engineering, Induk University  
(Received April 3, 2014 / Accepted, June 3, 2014)

**Abstract** : The generalized tangential stiffness matrix of semi-rigid frame element with shear deformations based on Haringx's shear theory is newly derived and compared with the previous study based on Engesser's shear theory. Also, linearized elastic and geometric stiffness matrices are newly presented from the exact tangential stiffness matrix. In order to obtain the inelastic system buckling load of shear flexible semi-rigid frame structure, the Ef method by tangential modulus theory is adopted and the FE analysis programs are developed. Finally, the shear and semi-rigid effects of system buckling are investigated by two numerical examples.

**Key Words** : inelastic, shear deformation, buckling, semi-rigid, stability function, tangent stiffness matrix

### 1. 서론

강 뼈대 구조물의 극한 내하력을 파악하고 효과적인 안정성 설계를 위해서는 구조물의 기하학적 형상과 재료적 특성을 정확히 고려하여야 한다. 실제 구조물은 구성 부재의 유효세장비에 따라 전단변형 효과가 다르게 나타나며 파괴 상태에 도달할 때 부재 간의 연결에서 힌지와 강절 사이의 부분강절 특성을 갖게 되므로 실무 설계자에게 의미 있는 설계기법을 제시하기 위해서는 이에 대한 종합해석이 가능한 해석이론과 관련 매개변수에 대한 다양한 연구결과가 제공되어야 한다. 본 연구와 관련된 현재까지의 연구내용을 요약하면 다음과 같다.

Chen<sup>1)</sup>, Goto<sup>2)</sup> 그리고 Kishi<sup>3)</sup>는 횡지지조건에 따른 부분강절 뼈대구조물의 유효길이계수를 조사하였고 Cheong<sup>4)</sup>은 개별 부재가 아닌 구조 시스템 전체에 대한 좌굴강성 및 브레이싱된 뼈대구조의 K-factor를 조사하였다. Mageirou<sup>5)</sup>는 다양한 형태의 부분강절 및 경계조건에 대하여 등가의 부분강절 계수를 유도하고 이를 다시

개별 부재에 적용함으로써 근사적인 안정성 해석을 수행하였고 Sekulovic<sup>6)</sup>은 부분강절 뼈대구조의 연결부위에서 회전강성과 편심효과를 연구하였으며 Raftoyannis<sup>7)</sup>는 연립미분방정식을 이용하여 횡방향 지지 및 비지지 조건을 갖는 뼈대구조의 안정성해석을 수행하였다. 그러나, 이러한 노력에도 불구하고 대표적인 두 전단변형 이론인 Engesser<sup>8)</sup>와 Haringx<sup>9)</sup>의 전단변형론에 기초한 부분강절 뼈대구조의 엄밀한 비선형 점선강도행렬과 선형 탄성강도행렬 및 기하학적강도행렬이 아직까지 비교하여 제시되지 못하였다. 여기서 Engesser는 축력이 처짐곡선의 점선과 일치한다고 가정한 이론이며 Haringx은 부재의 축력이 부재 단면에 수직하다고 취급한 것으로 그 정확성에 대해서는 현재까지 많은 연구자들에 의해 조사되고 있다.

본 연구에서는 Haringx의 전단변형이론을 적용하여 부분강절 뼈대구조의 점선강도행렬과 탄성 및 기하학적 강도행렬을 새롭게 유도하고 Engesser의 전단변형이론을 적용한 이전의 연구<sup>10)</sup>와 비교하여 그 차이점을 파악하고 좌굴특성을 제시하였으며 Ef법을 이용하여

\* Corresponding Author : Byoung Cheol Min, Tel : +82-2-950-7566, E-mail : msilver@induk.ac.kr  
Department of Civil & Environmental Engineering, Induk University, 12, Choansan-ro, Nowon-Gu, Seoul 139-749, Korea

비탄성 좌굴해석을 수행하고자 한다. 이를 위하여, 보-기둥의 좌굴조건을 만족시키는 처짐함수로부터 Haringx의 전단변형 이론을 토대로 한 안정함수를 유도하고 횡변위를 고려한 힘-변위 관계와 적합조건을 고려하여 엄밀한 접선강도행렬을 새롭게 유도하였고 이를 다시 탄성 및 기하학적 강도행렬로 분리함으로써 비선형 및 선형 고유치 해석기법을 제시하였다. 한편, 도로교설계기준의 내하력곡선식으로 부터 유효세장비에 대응하는 탄소성좌굴응력과 새로운 탄성계수를 결정하는 Ef법(Iwasaki<sup>11</sup>)을 적용하여 비탄성 좌굴해석을 수행하였다. 또한, 접선탄성계수와 탄성 및 기하학적 강도행렬을 바탕으로 Fortran 언어를 이용한 유한요소 해석 프로그램을 개발하였으며 다양한 수치해석예제를 통해 두 전단이론이 부분강철 뼈대구조의 탄성 및 비탄성 좌굴에 나타나는 특성을 제시하였다.

## 2. 강절로 연결된 뼈대구조의 접선강도행렬

본 장에서는 Haringx의 전단변형 이론을 적용하여 양단이 강절로 연결된 뼈대구조 요소의 접선강도행렬을 제시하고 Engesser의 전단이론과 비교한다.

Fig. 1은 초기하중  $P$ 를 받고 길이가  $L$ 인 뼈대요소의 절점력과 절점변위를 나타낸 것으로  $F_1, F_2, M, U, V, \omega$ 는 각각 축력, 전단력, 모멘트, 축방향 변위, 수직 변위, 전단변형이 포함되지 않은 회전변위이며  $p$ 와  $q$ 는 요소의 양단을 나타내는 것으로 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{F}_e = \{F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q\}^T \quad (1a)$$

$$\mathbf{U}_e = \{U^p, V^p, \omega^p, U^q, V^q, \omega^q\}^T \quad (1b)$$

여기서

$$\begin{aligned} U^p &= U_x(0), & U^q &= U_x(L) \\ V^p &= U_y(0), & V^q &= U_y(L) \\ \omega^p &= \omega(0), & \omega^q &= \omega(L) \end{aligned} \quad (2)$$

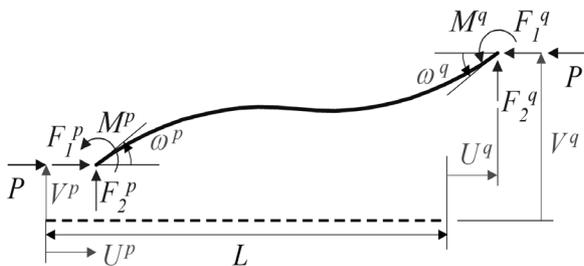


Fig. 1. Frame element with rigid connections

그리고

$$\begin{aligned} F_1^p &= -F_1(0), & F_1^q &= F_1(L) \\ F_2^p &= -F_2(0) + F_1 U_y'(0), & F_2^q &= F_2(L) - F_1 U_y'(L) \\ M^p &= -M(0), & M^q &= M(L) \end{aligned} \quad (3)$$

위에서  $U_x$ 는 부재 축방향 변위이고  $U_y$ 는 변형전 부재축에 수직인 횡변위를 나타낸 것으로 하중-변위 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_1 = EA U_x' \quad (4)$$

$$M = -EI \omega' \quad (5)$$

$$F_2 = GA_s (U_y' - \omega) \quad (6)$$

여기서  $E, G, A, I, A_s$ 는 탄성계수, 전단탄성계수, 단면적, 단면2차모멘트, 유효전단면적을 나타낸다.

### 2.1 총포텐셜에너지

축력 및 힘에 의한 축방향 거동을 모두 포함하는 뼈대요소의 총포텐셜에너지는 Engesser와 Haringx의 이론에 대해 각각  $\Pi_{en}$ 와  $\Pi_{ha}$ 로 정의하고  $\Pi_{en}$ 는 이전의 연구<sup>10</sup>에서 제시된 바 있으며 본 연구의  $\Pi_{ha}$ 와 비교를 위해 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{en} &= \frac{1}{2} \int_0^L \{EI \omega'^2 + GA_s (U_y' - \omega)^2 \\ &\quad - F_1 U_y'^2\} dx - \mathbf{F}_e^T \mathbf{U}_e \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)에 대하여 변분을 실시하고 식(2)와 식(3)의 조건을 적용하여 얻어진 연립 지배방정식은 다음과 같다.

$$EI \omega'' + GA_s (U_y' - \omega) = 0 \quad (8a)$$

$$GA_s (U_y' - \omega)' - F_1 U_y'' = 0 \quad (8b)$$

한편, 본 연구에서 제시한 Haringx의 전단이론에 의한 뼈대요소의 총포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{ha} &= \frac{1}{2} \int_0^L [EA U_x'^2 + EI \omega'^2 + GA_s (U_y' - \omega)^2 \\ &\quad - F_1 \{U_y'^2 - (U_y' - \omega)^2\}] dx - \mathbf{F}_e^T \mathbf{U}_e \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에 대하여 변분을 취하고 평형방정식과 경계조건식을 각각 식(10) 및 식(11)과 같이 얻을 수 있다.

$$EI \omega'' + (GA_s + F_1)(U_y' - \omega) = 0 \quad (10a)$$

$$(GA_s + F_1)(U_y' - \omega)' - F_1 U_y'' = 0 \quad (10b)$$

그리고

$$\begin{aligned} F_2^p &= -(GA_s + F_1)\{U_y'(0) - \omega(0)\} + F_1 U_y'(0) \\ M^p &= -EI\omega'(0) \\ F_2^q &= (GA_s + F_1)\{U_y'(L) - \omega(L)\} - F_1 U_y'(L) \\ M^q &= EI\omega'(L) \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.2 강절 뼈대구조의 접선강도행렬

식(8)과 식(10)에서 절점회전각  $\omega$ 를 소거하면 Engesser와 Haringx에 의한 4계 미분방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$U_y'''' + k^2 U_y'' = 0 \quad (12)$$

식(12)에서  $k$ 는 유효좌굴계수로서 Engesser와 Haringx에 대해 각각  $k_{en}$  및  $k_{ha}$ 라 정의한다. 그리고 전단변형의 영향을 효과적으로 취급하기 위해 다음과 같은 무차원 계수  $S$ 를 이용한다.

$$k_{en} = \sqrt{\frac{F_1}{EI f_s^{en}}} = \frac{\beta}{L} \quad (13)$$

$$S = \frac{EI}{GA_s L^2} = \frac{EA}{GA_s \lambda} \quad (14)$$

$$f_s^{en} = 1 - \frac{F_1}{GA_s} = 1 - F_s \quad (15)$$

여기서  $EI$ ,  $GA_s$ ,  $EA$ ,  $\lambda$ 는 각각 휨강성, 전단강성, 축강성, 세장비를 나타내고  $F_s = F_1/GA_s$ 라 치환하면  $\beta$ 와  $S$ 의 관계를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\beta^2 = \frac{F_1 L^2}{EI f_s^{en}} = \frac{1}{S} \frac{F_1}{GA_s} \frac{1}{f_s} = \frac{1}{S} \frac{F_s}{f_s^{en}} \quad (16)$$

또한, 압축을 받는 부재에 대해서 식(15)와 함께  $f_s^{en}$ 과  $\beta$ 의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f_s^{en} = \frac{1}{1 + S\beta^2} \quad (17)$$

그리고, 부재가 인장을 받는 경우에 식(15)와 식(17)은 다음과 같다.

$$f_s^{en} = 1 + \frac{F_1}{GA_s} = \frac{1}{1 - S\beta^2} \quad (18)$$

한편, Haringx의 경우에  $k$ 는 다음과 같다.

$$k_{ha} = \sqrt{\frac{F_1}{EI f_s^{ha}}} = \sqrt{\frac{F_1}{EI} \left(1 + \frac{F_1}{GA_s}\right)} = \frac{\beta}{L} \quad (19)$$

식(14)와 식(19)로부터,  $\beta$ 와  $f_s^{ha}$ 는 부재가 압축을 받는 경우 다음과 같이 얻어진다.

$$\beta^2 = \frac{F_s}{S} (1 + F_s) \quad (20)$$

$$f_s^{ha} = \frac{1}{1 + F_s} = 1 - \frac{F_1}{GA_s + F_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4S\beta^2}} \quad (21)$$

식(16)의  $f_s^{ha}$ 는 순수 전단에 의해 좌굴이 발생하는 경우 소거되며 다음의 관계를 만족시킨다.

$$F_{1,cr} = GA_s \quad (22a)$$

$$U_y = x, \quad \omega = 1 \quad (22b)$$

부재가 압축을 받는 경우, 식(11)을 적용하면 식(12)의 일반해는 다음과 같이 유도된다.

$$U_y = A \cos k_{ha} x + B \sin k_{ha} x + Cx + D \quad (23)$$

여기서

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\phi_c^{ha}} \left\{ (1 - \cos\beta)(V^p - V^q) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\sin\beta}{k_{ha} f_s^{ha}} - L \cos\beta \right) \omega^p - \left( \frac{\sin\beta}{k_{ha} f_s^{ha}} - L \right) \omega^q \right\} \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{\phi_c^{ha}} \left\{ \sin\beta(V^p - V^q) \right. \\ &\quad \left. + \left( L \sin\beta - \frac{1 - \cos\beta}{k_{ha} f_s^{ha}} \right) \omega^p + \frac{1 - \cos\beta}{k_{ha} f_s^{ha}} \omega^q \right\} \end{aligned} \quad (24b)$$

$$C = \frac{1}{\phi_c^{ha}} \left\{ k_{ha} \sin\beta f_s^{ha} (V^p - V^q) + (1 - \cos\beta)(\omega^p - \omega^q) \right\} \quad (24c)$$

$$D = V^p - A \quad (24d)$$

그리고

$$\phi_c^{ha} = 2 - 2\cos\beta - f_s^{ha} \beta \sin\beta \quad (25)$$

결국, 식(23)을 식(9)에 적용하면 부재 간의 연결이 강절이고 전단변형이 고려된 비선형 접선강도행렬  $k_R$ 이 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$F_e = k_R \cdot U_e \quad (26)$$

여기서

$$k_R = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b & c & \cdot & -b & c \\ & & d & \cdot & -c & e \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ sym. & & & & b & -c \\ & & & & & d \end{bmatrix} \quad (27)$$

요소강도행렬  $k_R$ 에서 Haringx의 전단 이론을 적용한 행렬 구성 성분은 Engesser의 전단 이론을 적용한 이전의 연구<sup>10)</sup>와 비교될 수 있으며 그 내용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a &= EA/L, & \cdot &= 0 \\ b &= 12\phi_1^{ha} EI/L^3, & c &= 6\phi_2^{ha} EI/L^2, \\ d &= 4\phi_3^{ha} EI/L, & e &= 2\phi_4^{ha} EI/L \end{aligned} \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi_1^{ha} &= \frac{(f_s^{ha})^2 \beta^3 \sin\beta}{12\phi_c^{ha}}, & \phi_2^{ha} &= \frac{f_s^{ha} \beta^2 (1 - \cos\beta)}{6\phi_c^{ha}}, \\ \phi_3^{ha} &= \frac{\beta(\sin\beta - f_s^{ha} \beta \cos\beta)}{4\phi_c^{ha}}, & \phi_4^{ha} &= \frac{\beta(f_s^{ha} \beta - \sin\beta)}{2\phi_c^{ha}} \end{aligned} \quad (29)$$

한편, 부재가 인장을 받는 경우, 처짐함수의 일반해는 초월함수형태가 되어 식(21), 식(25), 식(29)는 각각 다음과 같이 얻어진다.

$$f_s^{ha} = \frac{1}{1 - F_s} = 1 + \frac{F_1}{GA_s - F_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4S\beta^2}} \quad (30)$$

$$\phi_t^{ha} = 2 - 2\cosh\beta + f_s^{ha} \beta \sinh\beta \quad (31)$$

$$\phi_1^{ha} = \frac{(f_s^{ha})^2 \beta^3 \sinh\beta}{12\phi_t^{ha}}, \quad \phi_2^{ha} = \frac{f_s^{ha} \beta^2 (\cosh\beta - 1)}{6\phi_t^{ha}},$$

$$\phi_3^{ha} = \frac{\beta(f_s^{ha} \beta \cosh\beta - \sinh\beta)}{4\phi_t^{ha}}, \quad \phi_4^{ha} = \frac{\beta(\sinh\beta - f_s^{ha} \beta)}{2\phi_t^{ha}} \quad (32)$$

### 3. 부분강절로 연결된 뼈대구조

Fig. 2는 부분강절 뼈대구조의 단면력 및 절점변위를 나타낸 것으로  $\theta^p$ 와  $\theta^q$ 는 각각  $p$ 단과  $q$ 단에서 회전

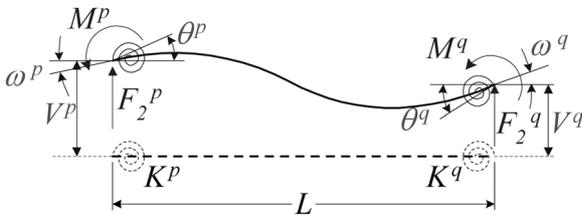


Fig. 2. Frame element with semi-rigid connections

스프링  $K^p$ 와  $K^q$ 가 적용된 경우의 회전변위를 의미한다. Haringx 전단변형 이론을 적용한 부분강절 뼈대구조의 접선강도행렬  $k_{SR}^{ha}$ 는 다음과 같다.

$$k_{SR}^{ha} = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b & c_1 & \cdot & -b & c_2 \\ & & d_1 & \cdot & -c_1 & e \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ sym. & & & & b & -c_2 \\ & & & & & d_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

여기서

$$\begin{aligned} a &= EA/L \\ b &= \frac{12EI}{L^3} \left\{ \phi_1^{ha} - \frac{3(\phi_2^{ha})^2 (R_p + R_q + 8\phi_3^{ha} - 4\phi_4^{ha})}{D^{ha}} \right\} \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{6EI}{L^2} \frac{\phi_2^{ha} R_p (R_q + 4\phi_3^{ha} - 2\phi_4^{ha})}{D^{ha}}$$

$$c_2 = \frac{6EI}{L^2} \frac{\phi_2^{ha} R_q (R_p + 4\phi_3^{ha} - 2\phi_4^{ha})}{D^{ha}}$$

$$d_1 = \frac{4EI}{L} \frac{R_p \{ 3\phi_2^{ha} (2\phi_3^{ha} - \phi_4^{ha}) + \phi_3^{ha} R_q \}}{D^{en}}$$

$$d_2 = \frac{4EI}{L} \frac{R_q \{ 3\phi_2^{ha} (2\phi_3^{ha} - \phi_4^{ha}) + \phi_3^{ha} R_p \}}{D^{ha}}$$

$$e = \frac{2EI}{L} \frac{\phi_4^{ha} R_p R_q}{D^{ha}}$$

$$D^{ha} = R_p R_q + 4\phi_3^{ha} (R_p + R_q) + (4\phi_3^{ha})^2 - (2\phi_4^{ha})^2 \quad (34)$$

$$R_p = \frac{K^p L}{EI}, \quad R_q = \frac{K^q L}{EI} \quad (35)$$

한편, 부분강절 뼈대구조의 비선형 접선강도행렬  $k_{SR}$ 에 대하여 안정함수  $\phi_i^{ha}$ 를 Taylor series의 네 번째 항까지 고려하고 선형화 하면  $m = 1 + 12S$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{m} \mp \frac{\beta^2}{10} \frac{1 + 20S}{m^2}, & \phi_2 &= \frac{1}{m} \mp \frac{\beta^2}{60} \frac{1 - 720S^2}{m^2} \\ \phi_3 &= \frac{1 + 3S}{m} \mp \frac{\beta^2}{30} \frac{1 + 15S - 180S^2}{m^2} \\ \phi_4 &= \frac{1 - 6S}{m} \pm \frac{\beta^2}{60} \frac{1 + 60S + 1440S^2}{m^2} \end{aligned} \quad (36)$$

식(36)에서 우측항의 상부 연산자는 압축을 받는 경우이며 하부 연산자는 인장을 받는 경우이다. 결국, 식(36)을 식(33)에 대입함으로서 선형 탄성강도행렬  $k_E$ 와 기하학적강도행렬  $k_G$ 로 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$k_{SR}^{ha} \cong k_E - F_1 k_G^{ha} \quad (37)$$

여기서

$$k_E = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & \hat{b} & \hat{c}_1 & \cdot & -\hat{b} & \hat{c}_2 \\ & & \hat{d}_1 & \cdot & -\hat{c}_1 & \hat{e} \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ & & & & \hat{b} & -\hat{c}_2 \\ sym. & & & & & \hat{d}_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$k_G^{ha} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \tilde{b} & \tilde{c}_1 & \cdot & -\tilde{b} & \tilde{c}_2 \\ & & \tilde{d}_1 & \cdot & -\tilde{c}_1 & \tilde{e} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \tilde{b} & -\tilde{c}_2 \\ sym. & & & & & \tilde{d}_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} a &= EA/L, & \hat{b} &= \frac{12EI}{L^3} \frac{Q_G}{D_M}, \\ \hat{c}_1 &= \frac{6EI}{L^2} \frac{R_p(2+R_q)}{D_M}, & \hat{c}_2 &= \frac{6EI}{L^2} \frac{R_q(2+R_p)}{D_M}, \\ \hat{d}_1 &= \frac{4EI}{L} \frac{R_p(3+R_q+3SR_q)}{D_M}, \\ \hat{d}_2 &= \frac{4EI}{L} \frac{R_q(3+R_p+3SR_p)}{D_M}, & \hat{e} &= \frac{2EI}{L} \frac{R_p R_q}{D_M} \\ \tilde{b} &= \frac{6}{5LD_M^2} \{120 + 16Q_S(Q_S + 5) \\ & \quad + Q_T(10 + 7Q_S + Q_T) + 20SQ_G Q_K\} \\ \tilde{c}_1 &= \frac{1}{10D_M^2} [32R_p^2 + Q_T\{Q_T + 4(2R_p - R_q - 7)\} \\ & \quad + 60SQ_G R_p \{Q_T - R_q^2 - 12S(2 + R_q)\}] \\ \tilde{c}_2 &= \frac{1}{10D_M^2} [32R_q^2 + Q_T\{Q_T + 4(2R_q - R_p - 7)\} \\ & \quad + 60SQ_G R_q \{Q_T - R_p^2 - 12S(2 + R_p)\}] \\ \tilde{d}_1 &= \frac{2L}{15D_M^2} [R_p^2(R_q^2 + 9R_q + 24) \\ & \quad + 15SR_p^2\{6R_q + R_q^2 - 12S(6 + 6R_q + R_q^2)\}] \\ \tilde{d}_2 &= \frac{2L}{15D_M^2} [R_q^2(R_p^2 + 9R_p + 24) \\ & \quad + 15SR_q^2\{6R_p + R_p^2 - 12S(6 + 6R_p + R_p^2)\}] \\ \tilde{e} &= -\frac{LQ_T}{30D_M^2} [Q_T + 12Q_S + 84 \\ & \quad + 60S\{3Q_S + Q_T + \frac{12S(6 + 3Q_S + 2Q_T)}{3}\}] \\ Q_S &= R_p + R_q, & Q_T &= R_p \times R_q, & Q_G &= Q_S + Q_T, \\ D_K &= 12 + 4Q_S + Q_T, & D_M &= D_K + 12SQ_G \end{aligned} \quad (40)$$

식(37)에서 탄성강도행렬  $k_E$ 는 Haringx와 Engesser의 식이 식(38)과 같이 서로 동일하게 얻어지고 기하학적 강도행렬  $k_G^{ha}$ 는 이전의 연구<sup>10)</sup>에서 제시된  $k_G^{ha}$ 와 비교하여 차이점을 식(40)에 밑줄로 표시하였다.

#### 4. Ef법에 의한 비탄성해석

본 연구에서는 구조물의 제작 및 시공오차, 초기결함, 용접잔류응력 등에 의한 내하력의 감소를 고려하는 도로교설계기준의 내하력곡선으로부터 좌굴응력  $f_{cr}$ 과 항복응력  $f_y$  그리고 두 응력이 같아지는 한계세장비  $\lambda_o$ 를 계산하여 비탄성 좌굴하중을 산정하는 Ef법을 적용하였다. 도로교 설계기준에 제시된 부재  $i$ 의 극한강도  $f_{u,i}$  이용한 극한내하력은 다음과 같다.

$$\bar{f} = \frac{f_{u,i}}{f_y} = 1.0 \quad ; \quad \bar{\lambda} \leq 0.2 \quad (41a)$$

$$\bar{f} = 1.109 - 0.545\lambda \quad ; \quad 0.2 < \bar{\lambda} \leq 1.0 \quad (41b)$$

$$\bar{f} = 1.0 / (0.773 + \lambda^2) \quad ; \quad \bar{\lambda} > 1.0 \quad (41c)$$

여기서

$$\bar{f} = f_{cr} / f_y \quad (42)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_o} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \cdot \left( \frac{L_{e,i}}{r} \right) \quad (43)$$

식(43)에서  $L_e$ 와  $r$ 은 유효좌굴길이와 단면회전반경을 나타낸 것으로 수렴의 판정은 전 단계 탄성계수  $E_{t,i}^{(n)}$ 와 다음 단계  $E_{t,i}^{(n+1)}$ 가 허용치  $\epsilon$  이내로 들도록 아래와 같이 정의한다.

$$\left| \frac{E_{t,i}^{(n+1)} - E_{t,i}^{(n)}}{E_{t,i}^{(n)}} \right| < \epsilon \quad (44)$$

여기서

$$E_{t,i}^{(n+1)} = \frac{f_{u,i}}{f_{cr,i}^{(n)}} E_{t,i}^{(n)} \quad (45)$$

또한, 각 부재의 비탄성 좌굴을 고려한 유효좌굴길이  $L_{e,i}^{(n)}$  및 유효세장비  $\lambda_c^{(n)}$ 는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$L_{e,i}^{(n)} = \pi \sqrt{E_{t,i}^{(n)} I_i / P_{cr,i}^{(n)}} \quad (46)$$

$$\lambda_c^{(n)} = \pi \sqrt{E_{t,i}^{(n)} / f_{cr}} \quad (47)$$

### 5. 수치해석

전단변형을 고려한 부분강절 뼈대구조의 비탄성좌굴 해석을 수행하기 위하여 부분강절 뼈대구조의 비선형 접선강도행렬  $k_{SR}$ 를 이용한 해석방법과 탄성강도행렬  $k_E$  및 기하학적 강도행렬  $k_G$ 를 이용한 선형해석 방법으로 크게 구분할 수 있으며 그 형태를 요약하면 다음과 같다.

$$F = k_{SR}(F_1) U \cong (k_E - F_1 k_G) U \quad (48)$$

본 연구에서는 식(48)로부터 Fortran언어를 이용하여 여섯 개의 비탄성좌굴 해석프로그램을 개발하였다. 우선, 비선형 해석기법으로서 전단변형이 무시되고 접선강도행렬을 이용한 해석방법을  $M_T$ , 접선강도행렬에 대해 Engesser의 전단변형이론이 적용된 해석방법을  $M_T^{en}$ , Haringx의 전단변형이론을 적용한 방법을  $M_T^{ha}$  (식(33)의  $k_{SR}^{ha}$  적용)이라 정의한다. 한편, 전단변형을 무시하고 선형해석방법인 탄성 및 기하학적 강도행렬을 이용한 해석방법을  $M_L$ , Engesser와 Haringx의 전단변형이론이 적용된 선형해석방법을 각각  $M_L^{en}$ 과  $M_L^{ha}$ 라 정의 하였다. 여기서  $M_T$ ,  $M_T^{en}$  및  $M_T^{ha}$ 는 비선형 안정함수를 갖고 있기 때문에 부재 하나 당 1개의 요소만으로 정확한 고유치를 계산할 수 있으며 Penalty method<sup>12)</sup>를 적용하면 좌굴모드도 함께 얻어질 수 있다. 한편,  $M_L$ ,  $M_L^{en}$  및  $M_L^{ha}$ 는 선형해석 기법이므로 정확한 해석을 위해 부재 당 10개의 요소를 사용하였다.

#### 5.1 다양한 경계조건을 갖는 표준기둥

Fig. 3은 축방향 하중을 받는 고정-자유(C-F), 힌지-힌지(P-P), 고정-고정(C-C), 고정-롤러(C-S) 그리고 고정-힌지(C-P) 경계조건의 표준기둥을 나타낸 것으로 전단변형이 고려된 좌굴하중  $P_s$ 와 전단변형을 무시한 좌굴하중  $P_e$ 를 비교하여  $S$ 와  $P_s$ 의 관계를 조사하였다. Table 1은 유효전단면적이  $A_s = 2.6 \text{ cm}^2 (S = 0.01)$ 인 경우로서 비선형 해석기법인  $M_T^{en}$ 과  $M_T^{ha}$ 의 해석결과가

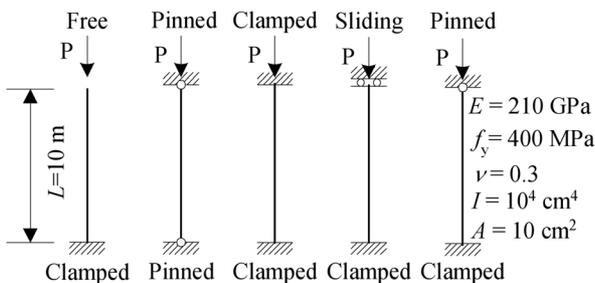


Fig. 3. Columns Under Vertical Loads

Table 1. Buckling Loads(kN) of Column

B.C.	$P_e$ without Shear Deform.		$P_s$ with Shear Deform.			
	$M_T$	$M_L$	Engesser		Haringx	
			$M_T^{en}$	$M_L^{en}$	$M_T^{ha}$	$M_L^{ha}$
C-F	518.15	518.15	505.68	505.73	505.96	506.01
P-P	2072.6	2072.6	1886.4	1887.8	1900.6	1902.0
C-C	8290.5	8292.2	5943.9	5984.3	6362.7	6412.0
C-S	2072.6	2072.6	1886.4	1887.8	1900.6	1902.0
C-P	4240.1	4240.3	3470.3	3478.3	3564.2	3573.0

선형해석방법  $M_L^{en}$  및  $M_L^{ha}$ 의 결과와 서로 잘 일치하였고 P-P조건의 좌굴하중은 모든 경우에 대하여 C-S조건과 동일한 결과가 얻어졌다.

한편, Fig. 4는 다양한 경계조건에 대하여 유효전단면적  $A_s$ 를 변화시키며 전단매개변수  $S$ 와 전단변형을 고려한 좌굴하중  $P_s$ 의 관계를 나타낸 것으로 전단변형을 고려하지 않은 좌굴하중  $P_e$ 는 Fig. 4의 좌측 상단에 제시하였다. C-S 경계조건의 좌굴하중은 P-P 조건과 동일한 결과가 얻어져 생략하였고 Engesser에 의한 좌굴하중은 Haringx의 전단변형이론에 의한 좌굴하중보다 일반적으로 작게 나타나며, 두 이론에 의한 좌굴하중의 차이는 C-C, C-P, P-P, C-F 경계조건 순으로 작게 나타남을 알 수 있다. 또한, 실무에서 사용되는 강구조 부재에서  $S$ 의 범위가 0.01이내 임을 감안하면 두 전단변형 이론의 차이는 거의 없는 것으로 판단된다.

#### 5.2 고정지지된 부분강절 라멘

Fig. 5는 지점이 구속되고 수평과 수직부재의 연결은 회전스프링  $K_\theta$ 로 연결된 뼈대구조를 나타낸다. 모든 부재의 전단매개변수는  $S=0.01$ 이며  $R$ (식(35))의 변화에 따른 좌굴해석을 수행하였다. 여기서,  $R=0$ 은 활

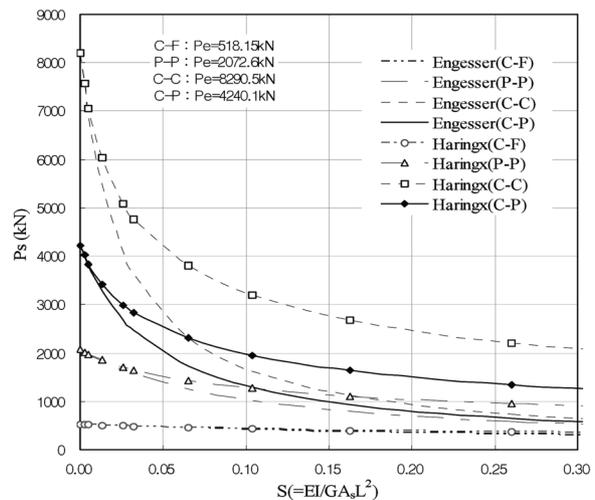


Fig. 4. Shear Parameter S & Buckling Loads

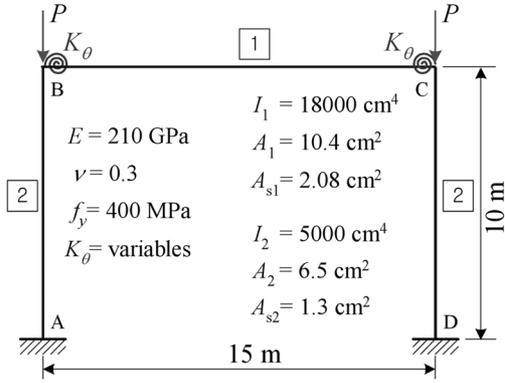


Fig. 5. Semi-Rigid Portal Frame under Vertical Loads

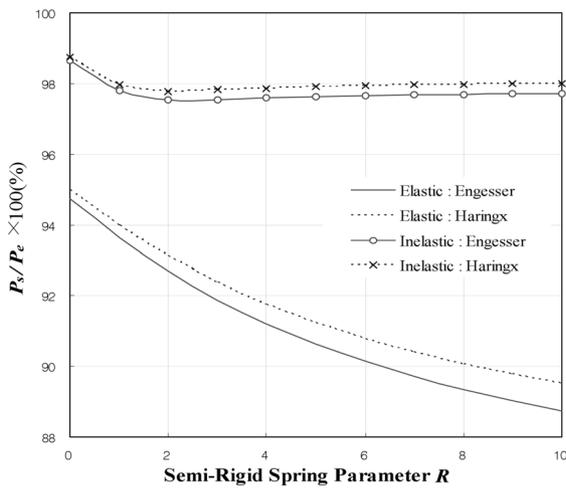


Fig. 6. Relations of Semi-Rigid Parameter & Buckling Load Ratio

절,  $R = \infty$ 는 강절 연결을 의미한다. 비탄성 좌굴하중은 탄성좌굴에 비해  $R$ 의 변화에 따른 좌굴하중의 변동 폭이 작으며 전반적으로 Engesser의 전단이 Haringx의 전단에 비해 좌굴하중이 작게 나타나 보수적인 설계에 적합한 것으로 판단된다. Fig. 6는 스프링 강성과  $P_e$ 에 대한  $P_s$ 의 비(ratio)를 나타낸 것으로  $R$ 의 증가에 따라 비(ratio)는 단조 감소하였고 비탄성 좌굴에서

Table 2. Buckling Loads(kN) of Portal Frame

$R$	Elastic Buckling			Inelastic Buckling		
	$M_T$	$M_T^{e,n}$	$M_T^{h,a}$	$M_T$	$M_T^{e,n}$	$M_T^{h,a}$
0	932.68	883.62	885.96	309.93	305.78	305.99
2	1267.0	1174.4	1179.8	364.83	355.84	356.70
4	1486.5	1355.7	1363.9	374.77	365.73	366.76
6	1640.6	1478.8	1489.4	377.92	369.03	370.12
8	1754.3	1567.5	1580.2	379.42	370.63	371.74
10	1851.5	1634.4	1648.7	380.29	371.57	372.70
$\infty$	2488.3	2102.8	2132.8	383.56	375.13	376.30

는 감소 후 다시 증가·수렴하는 특성을 나타냈다.

### 5.3 경사진 기둥을 갖는 부분강절 뼈대구조

Fig 7은 부재 연결부에 수직하중  $P$ 가 작용하는 부분강절 라멘구조물을 나타낸 것으로 기둥과 보의 길이는  $\theta$ 와 관계없이 각각 기둥 10m와 보 20m로 일정하다. 모든 부재의 전단매개변수가 일정( $S=0.01$ )할 때 다양한 각도를 갖는 라멘의 좌굴하중을 Table 3에 제시하였다.

Fig. 8(a)는 수직 단위하중  $P$ 를 작용시켰을 때 경사각  $\theta$ 의 변화에 따른 시스템 좌굴하중을 나타낸 것으로 탄성 및 비탄성좌굴은 경사각  $\theta$ 가 각각  $61^\circ$ 와  $68^\circ$ 인 근에서 최대값을 보였으며 전단변형의 영향은 탄성좌굴에서 크게 나타남을 알 수 있다. 또한, Fig. 8(b)는 시스템 좌굴이 아닌 기둥 부재만의 좌굴하중을 나타낸 것으로 기둥의 축력  $F_1$ 과 시스템좌굴하중  $P_{cr}$ 의 곱으로 식(49)과 같이 정의된다.

$$F_{1cr} = F_1 \times P_{cr} \quad (49)$$

기둥부재가 경사진 경우에 기둥의 좌굴하중  $F_{1cr}$ 은 작용하중  $P$ 가 기둥과 보에 나누어 분배되면서 시스템좌굴하중에 비해 큰 강도를 나타내며, 경사각이  $\theta = 90^\circ$ 인 경우는 기둥의  $F_{1cr}$ 과 구조물 시스템 좌굴하중  $P_{cr}$ 이 동일해 짐을 Fig. 6(a)와 Fig. 6(b)를 통해 알 수 있다.

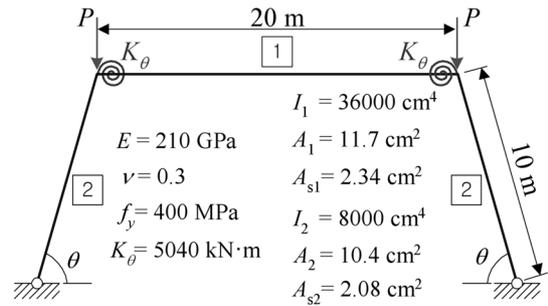


Fig. 7. Inclined Portal Frame

Table 3. Buckling Load of Inclined Portal Frame(kN)

$\theta$	Elastic Buckling			Inelastic Buckling		
	$M_T$	$M_T^{e,n}$	$M_T^{h,a}$	$M_T$	$M_T^{e,n}$	$M_T^{h,a}$
90	216.98	211.92	211.95	174.76	171.57	171.60
75	317.78	310.51	310.60	224.31	220.77	220.83
60	357.75	349.60	349.74	224.22	221.59	221.65
45	312.18	305.05	305.19	187.63	185.48	185.53
30	217.56	212.59	212.70	131.72	130.14	130.18
15	110.82	108.26	108.32	68.241	67.365	67.388
4	38.434	37.454	37.473	23.827	23.456	23.464

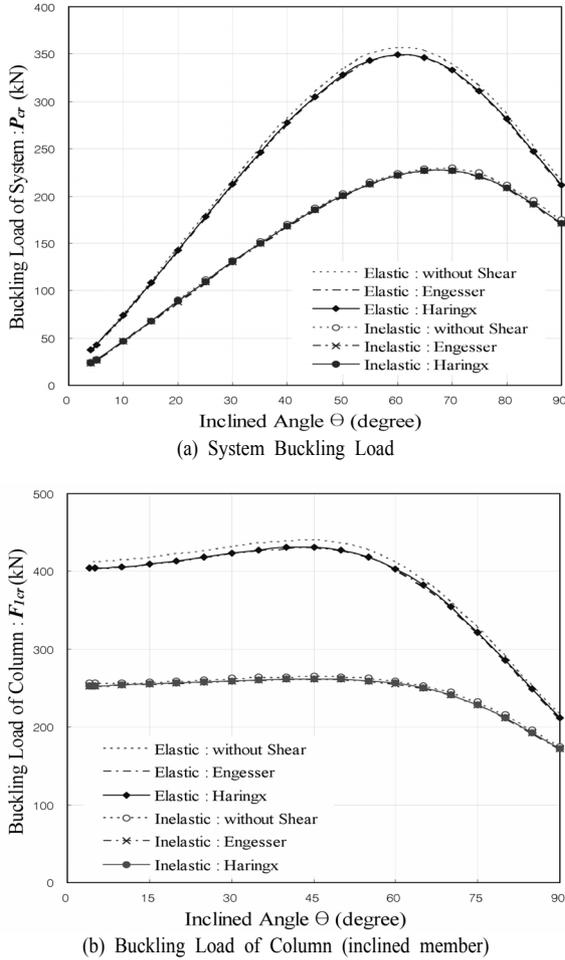


Fig. 8. Buckling of Inclined Portal Frame

### 6. 결론 및 고찰

본 연구에서는 전단변형효과를 고려한 부분강절 뼈대구조의 탄성 및 비탄성 좌굴해석을 수행하였으며 핵심내용을 요약하면 다음과 같다.

1) Haringx의 전단변형 이론을 적용하여 안정함수를 이용한 부분강절 뼈대구조의 비선형 접선강도행렬  $k_{eff}^{ns}$ 를 새롭게 유도하였다.

2) Haringx의 전단변형 이론을 적용한 선형 탄성강도행렬  $k_E$ 와 기하학적강도행렬  $k_G^{ns}$ 로 새롭게 분리·유도하여 선형 좌굴해석을 수행할 수 있도록 하였다.

3) Ef법을 적용하여 도로교설계기준에서 제시하는 내하력곡선으로 부터 유효좌굴세장비에 대응하는 탄소성 좌굴응력을 결정하고, 이에 대응하는 새로운 접선탄성계수를 산출하여 비탄성 좌굴해석을 수행하였다.

4) Fortran을 이용하여 Haringx의 전단변형 효과와 비탄성좌굴해석이 가능한 다양한 해석프로그램을 새롭게 개발하였다.

5) 두 전단변형 이론을 적용한 결과, 탄성 및 비탄성 좌굴 영역 전반에서 Haringx의 이론이 Engesser의 이론보다 다소 큰 좌굴하중이 얻어졌으며, 전단변형 효과는 활절 보다는 강절, 비탄성 보다는 탄성좌굴에서 크게 나타났다. 따라서 Engesser의 전단이론은 안전측 좌굴설계에 적합하나, 세장비가 큰 일반적인 강구조 부재의 경우에 Haringx의 전단이론이 과다설계를 방지할 수 있을 것으로 판단된다.

### References

- 1) W. F. Chen, "Structural Stability : from theory to Practice", Engineering Structures, 22, pp.116~122, 2000.
- 2) Y. Goto, S. Suzuki, and W. F. Chen, "Stability Behavior of Semi-rigid Sway Frames, Engineering Structures", 15, pp.209~219, 1993.
- 3) N. Kishi, W. F. Chen and Y. Goto, "Effective Length Factor of Columns in Flexibly Jointed and Braced Frames", Engineering Structures, 15, pp.209~219, 1998.
- 4) F. Cheong-Siat-Moy, "An improved [bold K][bold-factor formula]", Journal of Structural Engineering, 125, pp.169, 1999.
- 5) G. Mageirou, and C. Gantes, "Buckling Strength of Multi-story Sway, Non-sway and Partially-sway Frames with Semi-rigid Connections", Journal of Constructional Steel Research, 62, pp.893~905, 2006.
- 6) M. Sekulovic and R. Salatic, "Nonlinear Analysis of Frames with Flexible Connections", Computer & Structures, 79, pp.1097~1107, 2001.
- 7) I. G. Raftoyiannis, "The Effect of Semi-rigid Joints and an Elastic Bracing System on the Buckling Load of Simple Rectangular Steel Frames", Journal of Constructional Steel Research, 61, pp.1205~ 1225, 2005.
- 8) F. Engesser, "Die Knickfestigkeit Gerader st be", Zentralblatt des Bauverwaltung, 11, pp.483, 1891.
- 9) J. A. Haringx, "On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and their Application for Vibration-free Mountings", 3, Phillips Research Report, Eindhoven, pp.206~220, 1949.
- 10) B. C. Min, D. J. Min, M. R. Jung and M. Y. Kim, "Stability Analysis of Shear-flexible and Semi-rigid Frames", KSCE, Vol.31, 1A, pp.9~18(in Korean), 2011.
- 11) H. Iwasaki, K. Nogami and M. Nagai, "Precision of Ef Method for Evaluating Load-Carrying of Long-Span Cable-Stayed Bridges and Its Ultimate Strength Check", IABSE Reports, IABSE Conference 2001.
- 12) K. Bathe, "Finite Element Methods", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp.110~113, 1993.