韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2014.28.3.367
제 28집 제 3호, 2014. 5. 367-374

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 28, No. 3, May. 2014. 367-374

거문고 괘율에 관한 군론적 근사화 모형 개발 연구1)

신 현 용 (한국교원대학교)

최근 거문고 괘율에 관한 수학적 모형이 제안되었다. 이 수학적 모형은 군론으로 기술할 수 있다. 이 논문은 수학과 거문고를 주제로 하는 학문 간의 연계로서 거문고 괘율에 관한 이론을 군론으로 설명한다.

Ⅰ. 서론

근래에 학문 간의 연계를 강조하고, 이를 구현하는 다양한 방안이 제시되고 있다. 군론(群論, group theory)은 현대 수학의 주요 영역 중 하나로서 음악이나 미술 등의 연구에 효과적으로 적용될 수 있는데, 특히 대칭에 관한 성질이 유용하다.

이 논문에서는 거문고 괘율에 관한 이론을 군론적(group theoretical)으로 재해석하여 수학과 음악(특히 국악)의 관계를 드러낸다. 실제로, 거문고 괘율에 관한 군론적 근사화 모형을 제시하는데, 거문고에 관련된 제반 이론을 수학적 접근을 통하여 보다 체계적으로 설명하는 것은 의미가 있을 것이다. 이러한 연계는 학교 교실에서 학문의 연계를 시도하는 데 참고가 될 것이다. 이 논문에서는 다음과 같은 문제를 살펴보고자 한다.

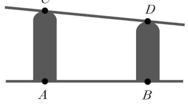
첫째, 조선 후기(19세기 후반부) 또는 조선 중기의 거문고 괘율에 관한 수학모형을 군론으로 어떻게 설명할 수 있나?

둘째, 현대의 거문고 괘율에 관한 수학모형을 군론으로 어떻게 설명할 수 있나?

Ⅱ. 이론적 배경 및 선행연구

1. 괘율

괘간거리는 <그림1>에서와 같이 각 괘 두께의 중간에서 중간까지의 거리를 뜻하는 것으로서 선분 AB의 길이이다.



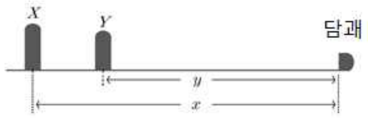
<그림1>

1) 이 논문은 한국교원대학교 2014년도 KNUE 학술연구비 지원을 받아 수행하였음.

* 접수일(2014년 6월 25일), 심사(수정)일(1차: 2014년 7월 17일, 2차: 2014년 8월 4일), 게재 확정일(2014년 8월 24일)
* ZDM 분류 : D44, N84, N85, U54
* MSC2000 분류 : 97B40, 97C20, 97C80, 97U50, 97U70
* 주제어 : 거문고 괘율, 군작용, 근사화 모형

특정한 두 괘의 괘간거리와 그에 해당하는 현의 길이(선분 CD의 길이)는 엄밀한 의미에서는 같지 않다. 현은 약간의 각도만큼 기울어진 상태로 괘 위에 걸리기 때문이다. 그러나 괘 위에 놓여 있는 세 개의 현(유현, 대현, 괘상청) 모두의 경우에, 기운 각도가 크지 않음으로 특정한 두 괘의 괘간거리와 그 경우에 해당하는 현의 길이는 같다고 가정할 수 있다.

특정한 두 괘 X, Y에 대하여, X에서 담괘까지의 거리를 x라고 하고 Y에서 담괘까지의 거리를 y라고 하라 할 때, 그 두 거리의 비율(比率) $\frac{y}{x}$를 두 괘 X, Y의 "괘율"이라고 한다(<그림2>).



<그림2>

여기서 담괘는 거문고 위 부분(봉두)에서 모든 현의 마지막 부분을 고정시키는 괘를 말한다.

2. 선행연구

거문고는 우리나라의 대표적인 전통악기 중 하나라고 할 수 있고, 괘는 거문고의 중요한 특징이다. 일반적으로 거문고 괘에 관한 수학적 접근은 용이하지 않다. 괘의 간격이나 괘율이 수학적 원리에 기초하지 않기 때문이다. 따라서 괘율에 관한 수학적 접근은 전무한 실정이지만 근래에 괘율을 수학적으로 근사화 할 수 있는 모형이 제안되었다([1]).

3. 군작용

군론에서 중요하게 활용되는 개념으로서 잘 알려져 있지만 여기서 간략히 설명하면 다음과 같다. 군 G 와 집합 $X(\neq\emptyset)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $G\times X\rightarrow X$ 를 "군 G 의 집합 X 로의 작용(action)"이라고 한다. 여기서 gx 는 (g, x) 의 함수 값을 나타낸다.

- $ex=x$
- $(gh)x=g(hx)$

군 G 의 집합 X 로의 작용과 $x\in X$ 에 대하여 다음과 같이 정의되는 집합을 G 에 의한 x 의 궤도(orbit)라고 한다.

$$O(x)=\{gx|\ g\in G\}$$

4. (m, k)-평균율

현대 서양 음악의 대표적 조율체계인 평균율(equal temperament)에서는 기본음의 주파수를 1이라고 할 때, 기본음보다 반음(단2도) 높은 음의 주파수는 r이다. 여기서 r는 2의 12제곱근으로서 $\sqrt[12]{2}$이다. 예를 들어, 기타(guitar)의 프렛(fret)은 다음과 같은 간격으로 배치된다.

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{r},\ \frac{1}{r^2},\ \frac{1}{r^3},\ \cdots,\ \frac{1}{r^{11}},\ \frac{1}{r^{12}} = \frac{1}{2}$$

이 논문에서 이러한 모형을 $(12, 1)$-평균율이라고 한다. 평균율에 의해 음의 높이를 온음(장2도)씩 높아지게 하기 위해서는 현의 길이를 $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^4}$, $\frac{1}{r^6}$, $\cdots$과 같이 하여야 한다. 원래 평균율에서는 $r = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$을 기본 척도로 사용하지만 이 경우에는 $r^2 = (\sqrt[12]{2})^2 = 2^{\frac{2}{12}}$을 기본척도로 사용하는 것이다. 이러한 평균율을 $(12, 2)$-평균율이라고 부른다.

이 글에서 활용하는 $(13, 2)$-평균율, $(14, 2)$-평균율, 그리고 $(16, 2)$-평균율도 같은 방법으로 정의된다. 즉, $(13, 2)$-평균율에서는 $s^2 = (\sqrt[13]{2})^2 = 2^{\frac{2}{13}}$, $(14, 2)$-평균율에서는 $t^2 = (\sqrt[14]{2})^2 = 2^{\frac{2}{14}}$, 그리고 $(16, 2)$-평균율에서는 $v^2 = (\sqrt[16]{2})^2 = 2^{\frac{2}{16}}$을 기본척도로 사용한다.

Ⅲ. 연구 방법

선행연구([1])에서 제시된 거문고 괘율 분석을 위한 수학모형은 순환군(cyclic group), 상군(factor group), 그리고 군작용(group action) 등과 같은 군론으로 표현한다.

1. 조선 후기의 거문고 괘율로 제안된 $(14, 2)$-평균율 수학모형을 군론으로 설명한다. 이를 위해 위수가 14인 순환군 $\mathbb{Z}_{14}$와 $\mathbb{Z}_{14}$의 부분군으로서 위수가 7인 순환군을 활용한다. 이와 함께, 조선 중기에 해당하는 고산 윤선도 당시의 거문고 괘율을 위해 제시된 $(16, 2)$-평균율 수학모형도 위수가 16인 순환군 $\mathbb{Z}_{16}$과 $\mathbb{Z}_{16}$의 부분군으로서 위수가 8인 순환군을 활용하여 소개한다.

2. 현대의 거문고 괘율로 제안된 $(13, 2)$-평균율 수학모형을 군론으로 설명한다. 이를 위해 위수가 13인 순환군 $\mathbb{Z}_{13}$의 특별한 생성자(genearator)를 택하여 설명한다.

Ⅳ. 연구 결과

먼저, 다음을 주목한다.

· 0이 아닌 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$는 곱셈에 관하여 군이다. 실수 $r = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$, $s = \sqrt[13]{2} = 2^{\frac{1}{13}}$, $t = \sqrt[14]{2} = 2^{\frac{1}{14}}$, 그리고 $v = \sqrt[16]{2} = 2^{\frac{1}{16}}$에 대하여 $G_r = \langle r \rangle$, $G_s = \langle s \rangle$, $G_t = \langle t \rangle$, 그리고 $G_v = \langle v \rangle$는 모두 $\mathbb{R}^*$의 부분군이고,

$G_{r^2} = \langle r^2 \rangle$, $G_{s^2} = \langle s^2 \rangle$, $G_{t^2} = \langle t^2 \rangle$, 그리고 $G_{v^2} = \langle v^2 \rangle$는 각각 G_r, G_s, G_t, 그리고 G_v의 부분군이다. 또, $G_{r^{12}} = \langle r^{12} \rangle$, $G_{s^{13}} = \langle s^{13} \rangle$, $G_{t^{14}} = \langle t^{14} \rangle$, 그리고 $G_{v^{16}} = \langle v^{16} \rangle$도 각각 G_r, G_s, G_t, 그리고 G_v의 부분군이다. 이제, $F_x\ (x = r, s, t, v)$를 G_x의 $G_{x^{x_k}}\ (x_k = 12, 13, 14, 16)$ 각각에 의한 상군 (factor group)이라고 하면 F_r, F_s, F_t, 그리고 F_v 각각은 위수(order)가 12, 13, 14, 16인 순환군이다. 실제로, 다음과 같다.

$$F_r = \langle rG_{r^{12}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{12}$$
$$F_s = \langle sG_{s^{13}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{13}$$
$$F_t = \langle tG_{t^{14}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{14}$$
$$F_v = \langle vG_{v^{16}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{16}$$

· F_r의 부분군 $\langle r^2 G_{r^{12}} \rangle$의 위수는 6이고, F_s의 부분군 $\langle s^2 G_{s^{13}} \rangle$의 위수는 13으로서 F_s와 같으며, F_t의 부분군 $\langle t^2 G_{t^{14}} \rangle$의 위수는 7이고, F_v의 부분군 $\langle v^2 G_{v^{16}} \rangle$의 위수는 8이다. 실제로, 다음과 같다.

$$\langle r^2 G_{r^{12}} \rangle \cong \mathbb{Z}_6$$
$$\langle s^2 G_{s^{13}} \rangle = \langle sG_{s^{13}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{13}$$
$$\langle t^2 G_{t^{14}} \rangle \cong \mathbb{Z}_7$$
$$\langle v^2 G_{v^{16}} \rangle \cong \mathbb{Z}_8$$

이제, 연구문제를 해결한다.

첫째. 신현용은 [1]에서 조선후기 거문고 괘율에 대하여 $(14, 2)$-평균율 수학모형을 제시하였다. 이에 따른 괘율은 다음과 같다.

<표1>

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}
1	0.91	0.82	0.74	0.67	0.61	0.55	0.50	0.45	0.41	0.37	0.34	0.30	0.28	0.25	0.23

이제, 이 괘율을 나타내는 $(14,2)$-모형을 군론을 사용하여 다음과 같이 설명할 수 있다.

다음과 같이 함수를 정의하자.

$$G_{t^2}\times(0,1] \to (0,1]$$
$$(t^{2k},\lambda) \quad \to \quad \frac{\lambda}{t^{2k}}$$

이 함수는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(1,\lambda) \to \lambda$$
$$(t^{2k_1},(t^{2k_2},\lambda)) \to \frac{\lambda}{t^{2k_1}t^{2k_2}}$$

따라서 이 함수는 군 $G_{t^2}=\langle t^2\rangle$의 집합 $(0,1]$에서의 작용이다. 여기서, $1\in(0,1]$의 괘도(orbit)는 $\{1,\frac{1}{t^2},\frac{1}{t^4},\cdots,\frac{1}{t^{16}},\frac{1}{t^{18}},\cdots\}$이다.

한편, $\frac{1}{t^{14}}=\frac{1}{2}$이고 현의 길이가 $\frac{1}{2}$이 되면 음이 한 옥타브 높아진다는 것을 유념하여 다음 함수를 생각하자.

$$G_{t^2}/G_{t^{14}}\times(0,1] \to (0,1]$$
$$(t^{2k}G_{t^{14}},\lambda) \quad \to \quad \frac{\lambda}{t^{2k}}$$

앞에서와 같은 방법으로 이 함수는 군 의 $(0,1]$ 위에서의 작용이라는 것을 알 수 있다. $k=7$ 또는 $k=14$이면 $\frac{1}{t^{2k}}$은 각각 $\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{4}$이므로 음(音)이 8(=7+1)괘에서 한 옥타브 높아지고, 15(=14+1)괘에서 두 옥타브 높아진다는 것을 알 수 있다(<표1>). 실제로, 이 군작용에 의한 $1\in(0,1]$의 괘도는 $\{1,\frac{1}{t^2},\frac{1}{t^4},\cdots,\frac{1}{t^{10}},\frac{1}{t^{12}}\}$이다. 따라서 $(14,2)$-모형에 의한 괘율은 일곱 개의 다른 음을 낼 수 있다는 것을 알 수 있다.

한편, “아양”으로 대표되는 고산 윤선도(1587~1671) 당시의 거문고 괘율은 $(16,2)$-평균율 모형으로 근사화된다. 다음은 $(16,2)$-평균율 모형에 의한 괘율이다([1]).

<표2>

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}
1	0.92	0.84	0.77	0.71	0.65	0.59	0.55	0.50	0.46	0.42	0.39	0.35	0.32	0.30	0.27

이제, 이 괘율을 나타내는 $(16,2)$-모형을 군론을 사용하여 설명한다.

먼저 다음과 같이 함수를 정의하자.

$$G_{v^2}\times(0,1] \to (0,1]$$
$$(v^{2k},\lambda) \to \frac{\lambda}{v^{2k}}$$

이 함수는 군 $G_{v^2}=\langle v^2\rangle$의 집합 $(0,1]$에서의 작용이다. 이제, $1\in(0,1]$의 괘도는 $\{1,\frac{1}{v^2},\frac{1}{v^4},\cdots,\frac{1}{v^{16}},\frac{1}{v^{18}},\cdots\}$이다.

한편, $\frac{1}{v^{16}}=\frac{1}{2}$이고 현의 길이가 $\frac{1}{2}$이 되면 음이 한 옥타브 높아진다는 것을 유념하며 다음 함수를 생각하자.

$$G_{v^2}/G_{v^{16}}\times(0,1] \to (0,1]$$
$$(v^{2k}G_{v^{16}},\lambda) \to \frac{\lambda}{v^{2k}}$$

이 함수는 군 $G_{v^2}/G_{v^{16}}$ 의 $(0,1]$ 위에서의 작용이다. $k=8$이면 $\frac{1}{v^{2k}}$는 $\frac{1}{2}$이므로 음(音)이 9(=8+1)괘에서 한 옥타브 높아진다는 것을 알 수 있다(<표2>). 실제로, 이 군작용에 의한 $1\in(0,1]$의 괘도는 $\{1,\frac{1}{v^2},\frac{1}{v^4},\cdots,\frac{1}{v^{12}},\frac{1}{v^{14}}\}$이다. 따라서 $(16,2)$-모형에 의한 괘율은 일곱 개의 다른 음을 낼 수 있다는 것을 알 수 있다.

둘째, 현대의 거문고 괘율에 대해 제시된 모형은 $(13,2)$-평균율 수학모형이다. 다음은 $(13,2)$-평균율에 의한 괘율을 나타낸다.

<표3>

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
1	0.90	0.81	0.73	0.65	0.59	0.53	0.47	0.43	0.38	0.34	0.31	0.28	0.25	0.22	0.20

이 괘율을 나타내는 $(13,2)$-모형을 군론을 사용하여 설명한다.

다음과 같은 함수를 정의하자.

$$G_{s^2} \times (0,1] \rightarrow (0,1]$$
$$(s^{2k}, \lambda) \quad \rightarrow \frac{\lambda}{s^{2k}}$$

이 함수는 군 $G_{s^2} = \langle s^2 \rangle$의 집합 $(0,1]$에서의 작용이다. 이제, $1 \in (0,1]$의 괘도는 $\{1, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^4}, \cdots, \frac{1}{s^{16}}, \frac{1}{s^{18}}, \cdots\}$이다.

한편, $\frac{1}{s^{26}} = \frac{1}{2}$이고 현의 길이가 $\frac{1}{2}$이 되면 음이 한 옥타브 높아진다는 것을 유념하여 다음 함수를 생각하자.

$$G_{s^2}/G_{s^{26}} \times (0,1] \rightarrow (0,1]$$
$$(s^{2k} G_{s^{26}}, \lambda) \quad \rightarrow \frac{\lambda}{s^{2k}}$$

이 함수는 군 $G_{s^2}/G_{s^{26}}$ 의 $(0,1]$ 위에서의 작용임을 쉽게 알 수 있다. $k=13$이면 $\frac{1}{s^{2k}}$는 $\frac{1}{4}$이므로 음(音)이 14(=13+1)괘에서 두 옥타브 높아진다는 것을 알 수 있다. 실제로, 이 군작용에 의한 $1 \in (0,1]$의 괘도는 $\{1, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^4}, \cdots, \frac{1}{s^{22}}, \frac{1}{s^{24}}\}$이다. 따라서 $(13,2)$-모형에 의한 괘율은 열 세 개의 다른 음을 낼 수 있다는 것을 알 수 있다(<표3>).

Ⅴ. 결론

서양음악 이론은 출발부터 수학적으로 정립되었기 때문에 제반 음악 이론은 수학으로 잘 설명된다. 국악의 경우는 이와 사뭇 다르다([2], [3]). 그러나 6세기에 걸쳐 지금까지 전해지고 있는 거문고의 괘율을 조사하면 적절한 수학모형을 발견할 수 있다.

이 연구에서는 거문고 괘율에 관한 기존의 수학모형을 군론적으로 설명하여 우리나라 전통악기와 현대수학의 접목을 시도하였다. 이 논문이 제시하는 자료는 학교 현장에 그대로 적용하기는 어렵다. 그러나 이러한 자료는 학문융합을 시도하는 교사에게 여러 가지 시사점이나 방향을 제시할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

신현용 (2014). 거문고 괘율에 관한 조사 및 괘율 분석을 위한 수학적 모형 개발, 한국음악연구 제55집, 한국국악학회.
신현용·신혜선 나준영·신기철 (2014). 수학 IN 음악, 한국수학교육학회 수학교사시리즈 12, 교우사.
이종상 (1994), 거문고의 괘율 연구 : 『악학궤범』 소재 거문고 산형을 중심으로, 한국학중앙연구원 석사논문.

A Study on Group Theoretic Approximation Model for Gwaeyul of Geomungo

Hyunyong Shin
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education
E-mail : shin@knue.ac.kr

Recently, interdisciplinary relation is emphasized on and various models are proposed. Since group theory is one of the important areas of modern mathematics, all the mathematics teachers for secondary school are familiar with it. Group theory, the theory of symmetries, are effectively applied to music or arts.

In this paper, we understand the approximation model for gwaeyul of geomungo group theoretically to show the relation between mathematics and music(Korean music, in particular). This paper, in fact, proposes a group theoretic approximation model for gwaeyul of geomungo. The materials like this will be of help to teachers who try to integrate mathematics to other areas.

* ZDM 분류 : D44, N84, N85, U54
* MSC2000 분류 : 97B40, 97C20, 97C80, 97U50, 97U70
* Key Words : gwaeyul of geomungo, group action, approximation model