

Sage를 활용한 수학 3D 프린팅 웹 도구 개발 - 대학 수학교육을 중심으로 -

이 재 윤 (성균관대학교)
임 영 준 (성균관대학교)
박 경 은 (성균관대학교)
이 상 구 (성균관대학교)†

본 원고는 대학에서 배우는 수학적 지식이 사회가 필요로 하는 인력이 갖추어야 할 지식 및 능력과 어떤 관계가 있는지를 구체적으로 확인해 주는 대학 수학교육 논문이다. 최근 3D 프린팅의 상용화가 가속화되면서, 각 분야에 적용할 수 있는 3D 프린팅의 고급 기술개발이 중요한 과제로 떠오르고 있다. 이 과정에서, 수학적 지식의 적절한 활용은 필수적이다. 따라서 본 연구는 대학에서 배우는 수학적 지식을 바탕으로, 시간과 장소에 구애받지 않고 누구나 무료로 3D 프린팅 기술을 활용할 수 있도록 하는 클라우드 컴퓨팅 환경을 제공하고, 그를 활용하여 얻은 성과를 공유하는데 그 목적이 있다. 이러한 목적을 달성하기 위하여 한국에 맞게 자체적으로 개선한 오픈소스 소프트웨어 “Sage” 기반의 서버를 이용하여, 3D 프린팅에 필요한 STL 도면 파일을 생성하는 프로그램과 웹(Web) 도구를 개발하였다. 본 논문에서는 새롭게 혁신적인 3D 프린팅 환경을 바탕으로, 수학적 모델링의 기초지식인 미적분학과 선형대수학을 중심으로 우리가 형상화한 다양한 3D 객체(Object)들의 개발 과정을 공유하며, 이 과정을 같이 경험하는 수학전공자들이 대학에서 배운 전문 지식을 활용하여 3D 프린팅의 다양한 관련 분야로 진출하여 그 역량을 발휘 할 수 있는 비전을 제시한다. 특히 수학을 전공한 인력이 3D프린터를 보다 창의적이고 혁신적으로 활용할 수 있는 인력, 그리고 이들을 교육하는 인력으로 성장할 수 있다는 것을 확인한다.

I. 서론

1. 3D 프린팅 기술 활용에 대한 시대적 요구

3D 프린팅 기술이 여러 분야에서 효과적으로 사용됨에 따라, 2013년 세계 경제 포럼(WEF)에서 발표한 10대 유망 기술에 3D 프린팅 기술이 선정되었다¹⁾. 3D 프린팅 기술이란 실제 손으로 만질 수 있는 3차원 물체를 3D 프린터를 통해 만들어내는 기술로, 3D 설계 데이터를 프린터로 전송하면 그 설계도에 맞게 프린터 안에 들어있는 금속, 플라스틱, 고무, 세라믹 가루 등 다양한 재료를 겹겹이 쌓아 올리거나, 깎는 과정을 통해 물체가 만들어진다. 3D 프린팅 기술은 디자인이나 건축뿐만 아니라 의료, 제조, 항공우주, 물리, 수학 등의 다양한 분야에서도 활용이 가능하다. 최근 수학에서 3D 프린팅을 활용하는 여러 가지 방법이 모색되었을 뿐만 아니라 구체적인 시

* 접수일(2014년 6월 8일), 심사(수정)일(2014년 6월 22일), 게재 확정일(2014년 8월 4일)

* ZDM 분류 : M15, N80, U65

* MSC2000 분류 : 97U70

* 주제어 : 3D 프린팅, 3D 모델링, 3D 객체, 웹 도구, Sage, 미분적분학, 선형대수학, 대학 교육

† 교신저자: sglee@skku.edu

1) World Economic Forum, “The top 10 emerging technologies for 2013”, 2013.02.14

도 또한 이루어지고 있다(Slavkovsky, 2012; Aboufadel·Krawczyk·Bennett, 2013). 이와 관련하여, 올해 8월에는 수학과 음악, 미술, 건축, 연극 등의 여러 분야의 연관성에 대해 논의하고 작품을 전시하는 브리지스 컨퍼런스(Bridges Conference)가 서울에서 역대 최대 규모로 열렸다. 특히 이번 학회에서는 독일 Oberwolfach 수학연구소와 한국 국가수리과학연구소(NIMS)가 공동으로 주관하는 Imaginary-ICM 전시회와 함께 3D 프린터를 활용한 수학 작품들을 대거 전시하였다.

립슨(Lipson, 2007)은 시뮬레이션을 이용한 시각화 학습만 하는 것보다, 3D 프린팅 기술을 함께 이용하여 실제적이고 구체적인 경험을 하는 것이, 개념이해에 효과가 월등할 뿐만 아니라 학습장애를 개선하고 성별에 따른 공간인지 능력의 격차를 해소할 수 있다고 하였다. 실제로 영국 교육부에서는 2012년부터 기금을 마련하여 학교에서 3D 프린터를 각 수업에 맞추어 활용하는 프로젝트를 진행하고 있으며 2013년 10월에 이에 대한 지침서를 발간하여, STEM(Science, Technology, Engineering, Mathematics)의 여러 분야들을 연결해주는 고리로 3D 프린팅 기술을 활용하는 방안을 강조하였다(UK-DfE, 2013). 또한, 최근 미국과학교사협회(National Science Teachers Association : NSTA)에서 조사한 바에 따르면 영국은 물론 다른 나라의 많은 학교에서도 3D 프린팅 기술을 활용하여 STEM 교육에 예술(Arts)을 포함시키는 시도를 진행하고 있으며, 미국 버지니아대학교(University of Virginia : UVA)에서는 2010년부터 미국 NSF(National Science Foundation)의 지원을 받아 STEM 교육에 적합한 기능을 갖춘 저렴한 가격의 3D 프린터 설계 및 제작을 최근에 완료하였다. 국내에서는 2012년 교육과학기술부가 발표한 「수학교육 선진화 방안」에서 언급한 바와 같이, 사고력과 창의력을 키우는 수학교육을 강조하고 있다. 이런 방향에 따라 2014년 세계 수학자대회(ICM 2014)가 국내에서 열리는 것을 계기로 2014년 1월 13일 미래창조과학부와 교육부가 공동으로 2014년을 ‘한국 수학의 해’로 선포하고 “수학의 저변확산 및 창의적 수학교육을 강화하는 동시에 창조경제 기반이 되는 수학연구에 박차를 가하기로 결정”하였다. 이처럼 한국 수학교육에 영향을 주는 큰 흐름의 변화에 따라 사고력과 창의력을 키울 수 있는 교육방법의 필요성이 대두되면서, 수학교육에 3D 프린팅 기술을 활용하는 방안과 그 효과에 대한 연구의 필요성이 점차 증가하고 있다.

2. 수학적 개념을 표현 가능한 무료 3D 프린팅 도구 개발

수학의 대수적 개념은 기하학적 이해와 동시에 이루어질 때 정확한 의미전달이 되는 경우가 많다(김덕선·이상구·정경훈, 2007). 역사적인 시각에서 보면, 고대 그리스에서는 수학적 개념을 대중에게 이해시키는데 있어 나무·돌 등으로 만들어진 모형을 사용하였음은 널리 잘 알려진 사실이다. 그리스 에톨리아의 파두아(Padua) 근처에서 발견된, 기원전 500년 이전에 만들어진 정십이면체의 돌도 그러한 예이다(양영오 외 역, 2010). 이와 같이, 수학적 개념이 반영된 모형의 제작은 오래전부터 다루어 왔던 중요한 수학적 문제 중의 하나이다. 시저맨(Segerman, 2012)은 고품질의 물질을 깎거나 덧붙이는 기존의 모형을 제작하는 방법과는 달리 3D 프린팅을 이용함으로써 수학 개념이 반영된 다양한 모형을 수학적으로 가장 이상적인 모형에 근접하게 만들어 낼 수 있다고 하였다. 이러한 3D 프린팅을 활용한 시도는 교수자와 학습자에게 수학적 단순한 수식계산을 통한 분석이나 시뮬레이션을 이용한 시각적 이해를 넘어, 기존의 그 어떤 도구보다도 완성도가 높고 다양한 도형을 실제로 접할 수 있는 기회를 주게 된다. 하버드대학교에서는 2012년 ‘엘슨 가족예술 창의기금’(Elson Family Arts initiative Fund)¹⁾의 지원을 받아 다변수 미적분학을 수강하는 신입생들을 대상으로 그들이 그린 3차원 수학 모형들을 3D 프린팅하는 프로젝트를 진행한 바 있다(Knill & Slavkovsky, 2013). 하지만 하버드대학교를 포함하여 기존의 수학적 모형을 제작하는 시도들은 대개 매스매티카(Mathematica) 또는 메이플(Maple)과 같은 고가의 상업용 소프트웨어를 이용하였다.

¹⁾ The Faculty of Arts and Sciences, Harvard University : <http://artsandhumanities.fas.harvard.edu>

이와 같이 3D 프린팅을 할 때 상업용 소프트웨어를 사용하는 것에 대하여, 할트(Hart, 2008)는 수학적 모형들을 만들 때 매스매티카를 이용함으로써 발생하는 한계를 지적하였으며, 프로그래머가 아닌 사람도 자신의 수학적 아이디어를 표현할 수 있어야 한다고 주장하였다. 상업용 소프트웨어는 사용자에게 비용 부담이 될 뿐만 아니라 설치한 소프트웨어의 유지 및 보수, 프로그래밍 언어 학습 등의 여러 가지 제한점을 가지고 있다. 한국에서도 앞에서 언급된 상업용 소프트웨어들을 이용하여, 수학교육에 적용시킨 교수-학습방법이 제시된 바 있다(김향숙, 2001; 한동승, 2003). 그리고 3D 프린팅을 수학교육에 활용한 사례로는 2012년 8월에 전남교육연수원에서 진행된 “중등수학 창의력 신장 직무연수과정”에서 구글 스케치업(Google SketchUp)이 강의된 것이 확인된 유일한 선행연구였다. 구글 스케치업은 무료라는 장점을 가지고 있지만 수식을 입력하거나 변수를 조작할 수 없으며 수학이 아닌 디자인 도구라는 한계를 가지고 있다. 세계 최고 수준의 모바일 인프라를 이미 갖추고 있는 한국의 경우, 현재의 모바일 인프라를 바탕으로 시간과 장소에 구애받지 않고, 웹 도구를 이용하여 누구나 무료로 3D 프린팅 기술을 활용할 수 있는 잠재력을 이미 갖추고 있다. 따라서 우리는 이런 강점을 활용하여 오픈 소스 소프트웨어 “Sage”를 기반으로 자체적으로 구축한 연산서버를 통해 유료 프로그램의 제한점들을 해결할 수 있다.

Sage를 활용하면 기존의 유료 프로그램을 사용할 수밖에 없었던 수학 연산을, 클라우드 서버를 이용하여 시간과 장소에 구애받지 않고 무료로 할 수 있으며, 웹페이지와 연동하여 사용자에게 수식 입력창과 변수를 조작할 수 있는 스크롤바 등을 제공하여 상호작용하는 도구를 제공할 수 있다. 따라서 프로그램을 설치할 필요 없이 인터넷만 연결되어 있으면 홈페이지에 접속하여 대학에서 배우는 수학적 지식을 바탕으로 누구나 자신의 수학적 아이디어를 표현하고, 이로부터 3D 프린팅에 필요한 STL 도면 파일을 얻을 수 있다. 본 연구에서는 이와 같은 상업용 소프트웨어를 사용함에 있어 발생하는 제한점에 대한 해답을 제공하고, Sage를 통해 3차원 객체와 STL을 생성하는 프린팅 과정을 포함하는 무료 3D 프린팅 웹 도구를 개발하여 그 사용법을 소개한다.

II. 본 론

1. 3D 프린팅과 STL 파일

3D 객체를 출력하기 위해서는, 가장 먼저 3D 프린터가 이해할 수 있는 적절한 순서와 방법을 제공하는 도면이 필요하다. STL(STereo-Lithography) 파일 형식은 미국의 3D Systems사가 개발한 입체 석판인쇄 CAD²⁾ 소프트웨어에서 처음 사용되었다. 그리고 이는 현재 3차원 인쇄술에 사용되기 위한 표준 형식이 되었다. 그 중 3차원 인쇄술에 자주 쓰이는 ASCII STL 형식은 아래와 같은 형식을 갖는다.

²⁾ Computer Aided Design(컴퓨터 지원 설계): 공학자, 건축가 그리고 설계 활동에서 전문적인 설계를 지원하는 컴퓨터 기반 도구의 다양한 영역에서 사용한 체계.

```

solid name
facet normal  $n_i$   $n_j$   $n_k$ 
  outer loop
    vertex  $v1_x$   $v1_y$   $v1_z$ 
    vertex  $v2_x$   $v2_y$   $v2_z$ 
    vertex  $v3_x$   $v3_y$   $v3_z$ 
  endloop
endfacet
...
endsolid name
    
```

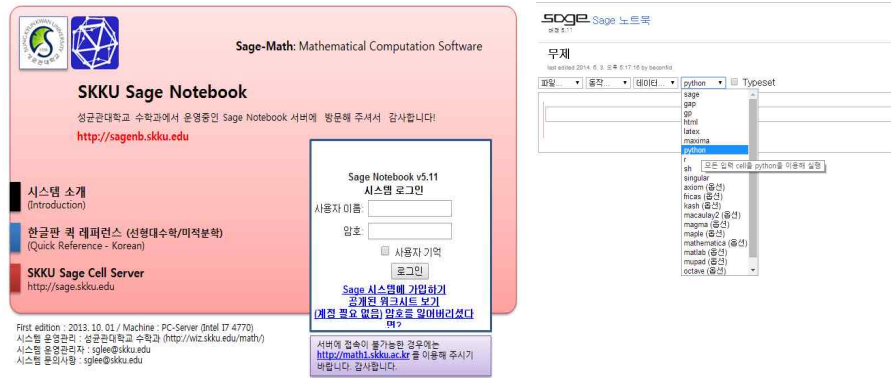
<ASCII STL 형식>

하나의 STL 파일 형식은 도면의 적당한 이름을 주는 ‘solid’ 명령어로 시작하여 ‘endsolid’ 명령어로 끝이 난다. 그 사이에 ‘facet’으로 시작하여 ‘endfacet’으로 끝나는 수많은 연속된 삼각형(Triangle)의 좌표를 제공하여 3차원 입체를 완성시킨다. ‘facet’ 안의 명령어를 살펴보면, n_i n_j n_k 는 수의 소수점의 위치를 움직일 수 있게 함으로써 한정된 비트의 수로 정밀도를 보다 높게 표시하게 하는 ‘부동 소수점 수’(Floating Point Number)³⁾를 의미하고, $v1_x$ $v1_y$ $v1_z$ 는 삼각형을 이루기 위한 하나의 3차원 상의 점(Vertex)의 위치를 결정한다.

2. Sage를 활용한 3D 프린팅 모델링

성균관대학교 선형 및 기하 모델링 연구실에서는 자체서버 <그림 1>를 구축하였으며 한국형 Sage-Math 모델을 개발하고 기본 검토와 실험을 마친 상태이다(고래영 · 김덕선 · 박진영 · 이상구, 2009). 현재 사용가능한 서버와 ID, Password는 아래와 같다.

- Sage cell sever : <http://sage.skku.edu> 및 <http://mathlab.knou.ac.kr:8080/>
- Sage sever : <http://sagenb.skku.edu> 및 <http://sage.knou.ac.kr/> (개인의 계정 및 암호 설정 가능)



<그림 1> 성균관대학교 Sage-Math 서버 (<http://sagenb.skku.edu>)

³⁾ http://en.wikipedia.org/wiki/Floating_point_number

Sage-Math를 이용하기 위해서는 Sage가 요구하는 웹 표준에 최적화 된 구글 크롬(Google Chrome) 또는 파이어폭스(Firefox)⁴⁾의 사용을 권장한다.

먼저, 3D 프린팅을 하기 위해서는 공개 되어 있는 Sage 코드와 수학적 개념을 활용하여 위와 같이 3D 객체를 구현한다. 예를 들어 음함수방정식 $f(x, y, z) = x^{100} + y^{100} + z^{100} - 2$ 을 Sage를 이용하여 3차원 객체로 표현하면 $f(x, y, z) = 0$ 일 때, 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 정육면체(Cube) <그림 2>를 얻을 수 있다.

```
x, y, z = var('x, y, z') # 변수 선언
f(x, y, z) = x^100 + y^100 + z^100 - 2 # 수식 정의
a = implicit_plot3d( f(x, y, z) == 0, (x, -2, 2), (y, -2, 2), (z, -2, 2)) # 3D 객체 생성
show(a) # 3D 객체 보이기
```

< Sage를 이용한 3D 객체 모델링 1 >

이때 Sage에서 3차원 객체를 그리기 위해 사용되는 JMOL⁵⁾은 STL과 같은 형식으로써, 연속되는 삼각형의 조합으로 3차원 객체를 표현한다. 따라서 JMOL을 이용하여 그려지는 3차원 객체의 정보를 STL 형식으로 변환해주는 알고리즘을 구현하면 Sage에서 STL 형식의 파일을 얻을 수 있다.

```
def surface_to_stl(surface): # stl exporting code
    out = "solid mathsurface\n"
    for i in surface.face_list():
        n = (i[1][1]*i[2][2]-i[2][1]*i[1][2], i[1][2]*i[2][0]-i[1][0]*i[2][2], i[1][0]*i[2][1]-i[2][0]*i[1][1])
        abs = (n[0]^2+n[1]^2+n[2]^2)^0.5
        n = (n[0]/abs, n[1]/abs, n[2]/abs)
        out += " facet normal " + repr(n[0]) + " " + repr(n[1]) + " " + repr(n[2])
        out += " outer loop\n"
        out += " vertex " + repr(i[0][0]) + " " + repr(i[0][1]) + " " + repr(i[0][2]) + "\n"
        out += " vertex " + repr(i[1][0]) + " " + repr(i[1][1]) + " " + repr(i[1][2]) + "\n"
        out += " vertex " + repr(i[2][0]) + " " + repr(i[2][1]) + " " + repr(i[2][2]) + "\n"
        out += " endloop\n"
        out += " endfacet\n"
    out += "endsolid mathsurface\n"
    return out
```

< STL Exporting Code >

마지막으로 변환한 STL 형태는 파일로 내보내어지고, 'file name'을 클릭하여 다른 이름으로 저장할 수 있도록 생성된다.

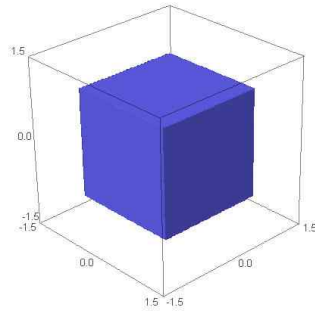
```
f=open("file_name.stl",'w') # 비어있는 STL 형식의 파일을 생성
f.write(surface_to_stl(a)) # file_name.stl 파일에 STL 형식의 3D 객체를 입력
f.close() # 알고리즘 종료
```

< STL 파일 생성 Code >

4) 구글 크롬: <http://www.google.com/chrome>, 파이어폭스: <http://www.mozilla.or.kr/ko/>

5) An open-source Java viewer for chemical structures in 3D: <http://jmol.sourceforge.net>

생성된 3D 파일: file_name.stl



<그림 2> $x^{100} + y^{100} + z^{100} = 2$



<그림 3> 정육면체 (Cube)

이 STL 파일을 3D 프린터로 출력하게 되면 정육면체 <그림 3>을 얻을 수 있다. 이러한 방정식으로 수학적 아이디어를 기본적인 Sage 코드와 만들어진 웹 도구를 활용하여 복잡한 프로그래밍 없이 3D 객체를 확인하고 STL 파일을 얻어 3D 프린팅 할 수 있다.

3. 대학 수학교육과 3D 프린팅

미분적분학, 선형대수학 등 대학 수학에서는 기본적인 도형과 의미 있는 방정식이 등장한다. 앞서 소개한 웹 도구를 활용하여 대학 수학에서 다룰 수 있는 몇 가지 3D 객체를 출력하는 과정을 소개한다.

가. 음함수와 매개변수 방정식 (Implicit Function and Parametric Equation)

미분적분학에서 등장하는 다음과 같은 음함수와 매개변수 방정식은 간단한 Sage 코드를 이용하여 3D 객체를 얻을 수 있다.

• 수식 : $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ (음함수) $\Leftrightarrow \begin{cases} f_x = \cos u \cos v \\ f_y = \cos u \sin v \\ f_z = \frac{\sin u}{\sqrt{2}} \end{cases}, 0 \leq u, v \leq 2\pi$ (매개변수방정식)

• 링크 : <http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/htmls/Ellipsoid.html>

• <그림 4> 와 <그림 5> : 주어진 음함수의 Sage 3D 그래프와 3D 프린팅된 물체

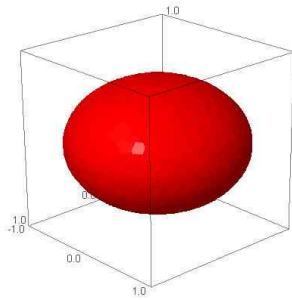
```
x, y, z = var('x, y, z') # 변수 선언
f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2*z^2 - 1 # 수식 정의
a = implicit_plot3d( f(x,y,z) == 0, (x, -1, 1), (y, -1, 1), (z, -1, 1), color='red') # 3D 객체 생성
show (a) # 3D 객체 보이기
```

< 음함수를 이용한 3D 객체 모델링 >

```

u, v = var('u, v') # 변수 선언
f_x = 1*cos(u)*cos(v); f_y = 1*cos(u)*sin(v); f_z = (1/sqrt(2))*sin(u) # 수식 정의
a = parametric_plot3d( [f_x, f_y, f_z], (u, 0, 2*pi), (v, 0, 2*pi), color='red') # 3D 객체 생성
show (a) # 3D 객체 보이기
    
```

< 매개변수 방정식을 이용한 3D 객체 모델링 >



<그림 4> $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$



<그림 5> 타원면 (Ellipsoid)

본 연구진은 이렇게 얻게 된 3D 객체<그림 4>는 STL로 변환 시켜주는 알고리즘을 Sage에 추가 입력하면 STL파일을 얻을 수 있었다. 그리고 얻은 STL파일을 3D 프린터로 출력하여 타원면 <그림 5>를 얻었다.

나. 이차곡면 (Quadratic Surface)

다양한 도형을 표현하는 이차형식(Quadratic Form)은 이차 다항식으로 정의된 대수적 방정식으로 표현된다. 이를 벡터와 행렬로 표현하면

$$\mathbf{x} Q \mathbf{x}^T + P \mathbf{x}^T + R = 0$$

으로 나타낼 수 있다. 이 때 $\mathbf{x} = [x, y, z]$ 라면, 이차형식은 3변수의 2차 음함수 방정식으로 표현된다(이상구, 2012, p. 599). 이를 응용하면 Q, P 그리고 R 의 성분에 따라 다양한 이차곡면을 만들어 낼 수 있다. 한 예로 원주 포물면은 다음과 같은 이차형식으로 표현되며, Sage 코드를 이용해 STL파일을 얻을 수 있다.

주어진 이차형식에 대응하는 행렬이 각각 $Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}$, $R = 0$ 의 조건을 만족 할 때, 이차형

식은 원주포물면 ($a, b > 0$)의 형태를 만들어 낸다.

• 수식 : $x^2 + y^2 - z = 0 \Leftrightarrow [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 = 0$

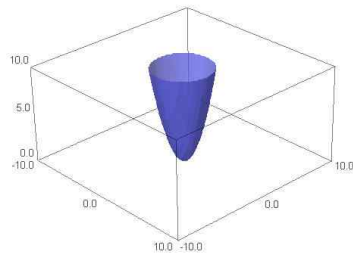
- 링크 : <http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/3D-102-Paraboloid.htm>
- <그림 6> 와 <그림 7> : 주어진 이차형식의 Sage 3D 그래프와 3D 프린팅된 물체

```

var('x, y, z') # 변수 선언
Q=matrix(QQ,[[1,0,0],[0,1,0],[0,0,0]]); P=matrix(1,3,[0,0,-1]); R=0 # 행렬 및 벡터 생성
a1=matrix(1,3,[x, y, z]); q=a1*Q*(transpose(a1))+P*(transpose(a1))+R # (x, y, z), 이차형식 생성
a=implicit_plot3d(q[0][0]==0, (x,-10, 10), (y,-10, 10), (z,-10, 10), smooth=true) # 3D 객체 생성
print (Q); print (P); print (R); show (q[0][0]==0); show (a) # 행렬, 벡터, 3D 객체 보이기
(...) # STL exporting code
f=open("Quadratic_Surface.stl",'w'); f.write(surface_to_stl(a)); f.close() # STL 파일 생성 code

```

< Sage를 이용한 3D 객체 모델링 2 >



<그림 6> $x^2 + y^2 - z = 0$



<그림 7> 포물면 (Paraboloid)

다. 실생활에 응용 가능한 3D 객체

이미 많은 수학자들은 음함수와 매개변수 방정식으로 표현된 다양하고 의미 있는 물체들을 발견해 왔다. 이러한 수학적 아이디어를 가지고 심장 모형, 계란판면, 보석 모양과 같은 실생활에 있는 물체를 만들 수 있다. 한 예로 계란판면은 다음과 같은 매개변수 방정식으로 표현되며 이를 이용해 STL파일을 얻을 수 있다.

$$\bullet \text{ 수식 : } \begin{cases} f_x = v \\ f_y = u \\ f_z = \sin(u)^4 + \cos(v)^4 \end{cases}, \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi$$

• 링크 : http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/htmls/Egg_carton.html

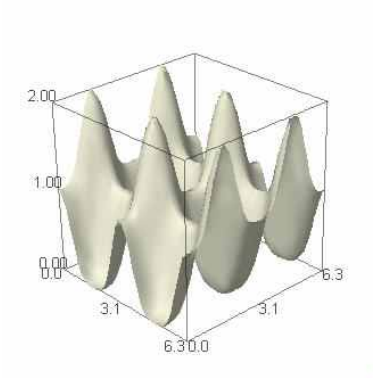
• <그림 8> 와 <그림 10> : 주어진 매개변수 방정식의 Sage 3D 그래프와 3D 프린팅 된 물체

```

u, v = var('u, v') # 변수 선언
f_x = v; f_y = u; f_z = sin(u)^4+cos(v)^4 # 수식 정의
a = parametric_plot3d( [f_x, f_y, f_z], (u, 0, 2*pi), (v, 0, 2*pi), color='beige') # 3D 객체 생성
show (a) # 3D 객체 보이기

```

< Sage를 이용한 3D 객체 모델링 4 >



<그림 8> $(u, v, \sin(u)^4 + \cos(v)^4)$



<그림 9> 계란판면 (Egg Carton)

라. 다양한 수학적 개념을 적용한 3D 객체와 프린팅 도구

<표 1> 는 본 연구를 진행하면서 제작된 3D 객체와 프린팅 도구의 일부이다.

<표 1> 공개된 3D 프린팅 웹 도구 주소

주 제	수 식	공개된 자료
포비우스 띠	$(\cos u(3 + v \cos u), \sin u(3 + v \cos u), v \sin u)$	http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/htmls/Mobius_strip.html
원뿔면체	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/htmls/Conic.html
심장 모형	$(4\sqrt{-v^2 + 1} \sin u ^{ u } \cos u, 4\sqrt{-v^2 + 1} \sin u ^{ u } \sin u, v)$	http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/htmls/Heart.html
스프링	$((\sin v + 2)\cos u, (\sin v + 2)\sin u, u + \cos v)$	http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/htmls/Spring.html

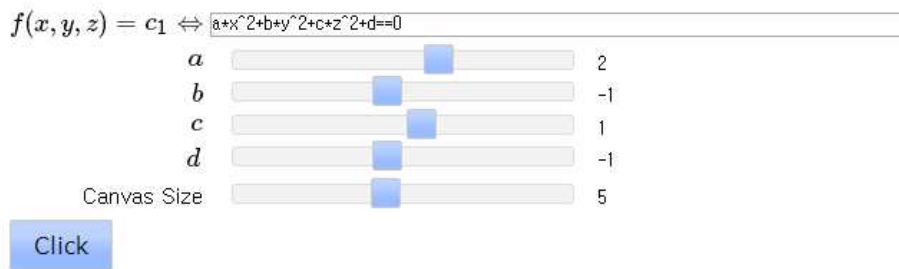
4. 3D 프린팅을 위한 웹(Web) 도구

한국어 | English



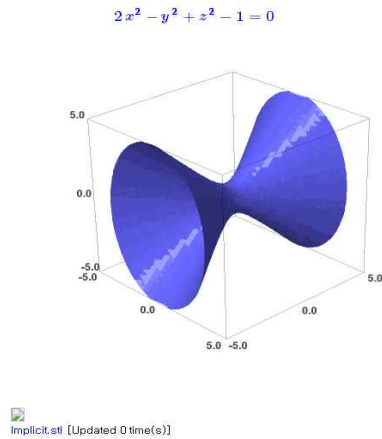
<그림 10> <http://matrix.skku.ac.kr/3d-print/sage-stl.htm>

본 연구를 진행하면서 개발된 3D 수학 코드와 모형 및 응용 내용을 모아 콘텐츠와 웹 도구 <그림 10>로 제작하였다. 웹 도구를 통해 3D 프린터에 대한 간단한 설명과 사용방법 및 Sage를 이용한 STL파일의 출력 원리에 대한 정보를 얻을 수 있다. 또한 음함수, 매개함수 이외에 다양한 수학적 의미와 아이디어를 담은 3D 모델링을 시도해볼 수 있는 도구를 제공하고 있고, 더불어 3D 객체에 해당하는 STL 파일을 얻을 수 있도록 제공하고 있다. 이 도구는 웹을 통해 공개되어 있기 때문에 인터넷만 연결되어 있다면 누구나 제한 없이 무료로 사용이 가능하다.



<그림 11> STL 파일 생성 웹 도구 (음함수)

다양한 웹 도구 중에서, 음함수를 통해 STL 파일을 생성하는 웹 도구 <그림 11>을 살펴보면 수식 입력창과 변수를 조작할 수 있는 스크롤바 등을 제공하였으며, 이를 통해 사용자는 복잡한 프로그래밍 언어를 배우지 않고도 3D 객체를 확인하고 STL 파일을 생성할 수 있으며, 자신의 수학적 아이디어를 표현한 물체를 3D 프린터로 제작할 수 있다.



<그림 12> 출력 화면 및 STL 파일



<그림 13> 뿔면 (Cone)

III. 요약 및 결론

본 연구는 대학에서 배우는 수학적 지식이 사회가 필요로 하는 인력이 갖추어야 할 지식 및 능력과 어떤 관계가 있는지를 구체적으로 확인해 주는데 그 첫 번째 목적이 있다. 2014년 6월 18일 대한민국 미래창조과학부와 산업통상자원부는 제1회 3D프린팅산업 발전협의회를 개최, 3D프린터를 보다 창의적이고 혁신적으로 활용할 수 있는 ‘창의 메이커(Makers) 1천만명 양성계획, 제조혁신센터 구축·운영계획’을 확정해 발표했다⁶⁾. 계획안에 따르면 정부는 수준별, 분야별로 세분화한 교육과정을 개발하고 이와 관련된 수준별 강사를 총 1만2천여명(전문 강사 5천100명, 일반강사 7천600명) 양성해 교육기관이나 산업 현장 등에 투입할 예정이다(ROK, MSIP and MOTIE, 2014). 본 연구의 구체적인 다음 목적은 수학을 전공한 인력이 3D프린터를 보다 창의적이고 혁신적으로 활용할 수 있는 인력 또 이들을 교육하는 인력에 가장 적합하다는 것을 확인해 주는 것이다. 이 목적을 달성하기 위하여 한국에 맞게 자체적으로 개선한 “Sage”라는 오픈소스 소프트웨어 서버를 구축하여, 그동안 3D 프린팅에 필요한 STL 도면 파일을 Sage를 통한 클라우드 컴퓨팅으로 언제 어디서나 무료로 생성하는 웹 도구 개발과 이를 통하여 확보한 경험과 개발한 콘텐츠 및 노하우를 공개함으로 대학에서 수학을 배운 학생들이 새로운 인력 수요가 생기는 분야의 개척자가 되도록 하는 것이다. 특히 수학전공자의 일부가 3D프린터 관련 수준별 강사들의 리더가 되게 하는 것이다.

본 연구진이 개발한 도구는 수학 3D 프린팅에 기존의 상업용 소프트웨어를 사용할 때 제기되는 문제점들을 해결할 수 있도록 제작되었다. 프로그램을 구입할 필요 없이 홈페이지를 통해 접속하여 시간과 공간에 구애받지 않고 무료로 사용할 수 있을 뿐 아니라, 미적분학과 선형대수학에 나오는 수식을 입력하거나 스크롤바의 조작을 통해서 3D 모형을 생성할 수 있도록 하였다. 이러한 이점들로 미루어 볼 때 본 연구진이 개발한 도구는, 기존의 프로그래밍 언어를 기반으로 하는 상업용 도구가 가진 제한점을 해결하는 중요한 모델이 될 수 있다고 본다.

이번 연구를 통해 새롭고 혁신적인 3D 프린팅 환경을 제공하였으며, 이를 바탕으로 대학에서 배운 수학적 지

6) 정부-보도자료, 2014년 6월 18일, <http://www.etnews.com/20140618000272>

식을 활용하여 자신의 수학적 아이디어를 표현하는 다양한 3D 객체들을 생성할 수 있다. 이와 같은 수학 3D 프린팅 기술은 수학 및 교육에 3D 프린팅 기술을 활용하는 세계적인 추세와 부합할 뿐만 아니라, 프로그래밍 언어를 학습하는 데 쏟는 시간을 줄임으로서 수학적 개념을 학습하는 시간이 상대적으로 늘어나게 되어 학생들이 수학에 대한 이해력을 높이는데 적절한 환경도 제공할 수 있다. 특히, 다양한 산업체로 진출이 용이한 수학전공자들이 3D 프린팅 기술을 대학 수학교육을 통해 경험하고 그 역량을 산업체에서 발휘할 수 있을 것으로 기대한다.

성균관대학교에서는 21세기 대학 수학교육에서 공학적 도구의 필요성에 답하여, 2010년부터 1학점의 미분적분학 실습강좌를 개설하여 Sage, 매스매티카, 메이플을 기반으로 하는 다양한 도구들을 교육현장에서 활용하고 있다. 특히 최근 도입하기 시작한 Sage와 3D 프린팅 기술을 활용한 대학 수학교육과정은 예컨대, 미적분학의 이차곡면 등에 적용된 3D 프린팅 관련 교육 내용을, 중등학교에서 배우는 내용에 바로 연관시켜 자연스럽게 중등 수학교육으로 확장되어 적용할 수 있다. Sage를 활용한 수학 3D 프린팅 웹 도구는 사용자에게 낮은 진입장벽을 요구할 뿐만 아니라, 이를 기반으로 변형 및 재창조 등 학습자가 자유롭게 다룰 수 있는 확장성과 편의성을 제공한다. 현재 교수·학생들의 적극적인 참여로, 교육현장에 활용될 수 있는 다양한 학습 자료들이 축적되고 있다. 이를 통하여 사용자들은 수학의 개념들을 직접적으로 이해하여 이를 바탕으로 3D 프린팅을 더욱 편리하게 활용할 수 있을 뿐만 아니라 3D 프린터의 고급 기술개발에 스스로 기여할 기회를 창출할 수 있을 것이다. 이와 관련된 후속연구에서는 대학 수학교육을 통하여 사회에서 원하는 산업인력을 배출하는데 필요한 경험을 제공할 수 있는 대학의 다양한 전공과목에서의 콘텐츠와 교수-학습방법이 개발되고, 이어서 이런 연구결과가 중등수학교육으로 자연스럽게 확산되어야 할 것이다.



<그림 14> 클라인 병 (Klein's bottle)



<그림 15> 출력한 3D 객체

참 고 문 헌

- 김덕선 · 이상구 · 정경훈 (2007). 시각화를 이용한 선형대수학 교수학습모델, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **21(4)**, 621-646.
- 고래영 · 김덕선 · 박진영 · 이상구 (2009). 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **23(4)**, 1023-1041.
- 김향숙 (2001). 평면변환기하에 있어서 Mathematica를 이용한 교수-학습방법, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **40(1)**, 93-102.
- 이상구 (2012). 현대 선형대수학 with Sage. 서울: 경문사.
- 한동승 (2003). Maple을 이용한 미적분학 교수-학습 방법. 한국학교수학회논문집, **6(2)**, 71-85.
- Aboufadel, E., Krawczyk, V, S., Sherman-Bennett, M. (2013, August). *3D Printing for Math Professors and Their Students*. Cornell University arXiv:1308.3420v1
- Carl B. Boyer & Uta C. Merzbach (1968). *A History of Mathematics*. 양영오, 조윤동 역(2010), 수학의 역사상, 서울: 경문사. 81-82.
- Hart, W, G. (2008). Procedural Generation of Sculptural Forms. John Sullivan(Chair). *Proceedings of the 11th Bridges Conference*, session 1. July 24, Leeuwarden: Stenden University, Netherlands.
- Knill, O., & Slavkovsky, A, E. (2013, June). *Illustrating Mathematics Using 3D Printers*. Cornell University arXiv:1306.5599v1.
- Lipson, H. (2007, October). *Printable 3D Models for Customized Hands-on Education*. Proceedings of Mass Customization and Personalization (MCPC). Cambridge, Massachusetts, USA.
- National Science Teachers Association Reports (2013). *Teaching STEM in 3D*. **25(2)**. 3-8. Retrieved from <http://www.nsta.org/docs/2013SeptemberReports.pdf>
- Segerman, H. (2012). 3D Printing for Mathematical Visualisation, *The Mathematical Intelligencer*, **34(4)**, 56-62.
- Slavkovsky, A, E. (2012). *Feasibility Study For Teaching Geometry and Other Topics Using Three-Dimensional Printers*. Master of Arts, Harvard University, Massachusetts, USA.
- ROK. Ministry of Science, ICT and Future Planning (약칭 : 미래부, MSIP) and Ministry of Trade, Industry and Energy (약칭 : 산업부, MOTIE) (2014). Korea will produce 10Million man power for 3D printing before 2020 (3D 프린터 활용인력 2020년까지 1000만명 양성)- Retrieved from http://www.zdnet.co.kr/news/news_view.asp?article_id=20140626151227
- UK. Department for Education. (2013). *3D printers in schools: uses in the curriculum*. Retrieved from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/251439/3D_printers_in_schools.pdf

Development of Mathematics 3D-Printing Tools with Sage - For College Education -

Jae-Yoon Lee

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : crases@skku.edu

Yeong-Jun Lim

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : beconfid@skku.edu

Kyung-Eun Park

Department of Mathematics Education, Sungkyunkwan University, Sungkyunkwan-ro 25-2, Jongno-gu, Seoul, Korea
E-mail : postmedu@skku.edu

Sang-Gu Lee[†]

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : sglee@skku.edu

Recently, the widespread usage of 3D-Printing has grown rapidly in popularity and development of a high level technology for 3D-Printing has become more necessary. Given these circumstances, effectively using mathematical knowledge is required. So, we have developed free web tools for 3D-Printing with Sage, for mathematical 3D modeling and have utilized them in college education, and everybody may access and utilize online anywhere at any time. In this paper, we introduce the development of our innovative 3D-Printing environment based on Calculus, Linear Algebra, which form the basis for mathematical modeling, and various 3D objects representing mathematical concept. By this process, our tools show the potential of solving real world problems using what students learn in university mathematics courses.

* ZDM Classification : M15, N80, U65

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70

* Key Words : 3D Printing, 3D Modeling, 3D Object, Web tool, Sage, Calculus, Linear algebra, College Education

† Corresponding author