韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2014.28.3.339
제 28집 제 3호, 2014. 9. 339-352

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 28, No. 3, Sep. 2014. 339-352

미분방정식 지도에 대한 소고

박 제 남 (인하대학교)†
장 동 숙 (인하대학교 대학원)

본 연구에서는 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 도입한 미분방정식 지도를 위한 수학적 모델링을 소개한다. 2014년에 1개 출판사만으로 출간된 '고급수학 II'의 교과서는 이계미분방정식 $y'' + y = 0$의 풀이를 거듭제곱 급수 방법을 사용하고 있다. 이에 따른 문제점을 알아보고 그 대안을 제시한다. 또한, 고급수학 II 교과서는 기계적 시스템을 다루고 있지만 전기적 시스템은 다루지 않고 있다. 따라서 교과서에서 다루는 일계미분방정식을 전기회로로 지도하는 방안을 제시한다. 끝으로 미분방정식 지도와 관련된 용어를 제시한다.

I. 서론

교수요목기(1946-1954) 이후 처음으로 '2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정'(이하 2009 개정 교육과정)에서 미분방정식을 도입하였다. 학습내용 성취 기준은 다음과 같다(교육과학기술부, 2011, p. 121).

① 미분방정식의 뜻을 알고, 간단한 미분방정식의 해를 구할 수 있다.
② $y' = ky$, $y'' = -y$꼴의 미분방정식의 해의 성질을 이해한다.

교수·학습상의 유의점으로 미분방정식은 상황의 이해에 중점을 두어 다루고, 그 풀이는 $y' = ky$, $y'' = -y$와 같이 간단한 경우만 다룬다(교육과학기술부, 2011).

'고급수학 II'의 교과서는 한 출판사만으로 2014년에 출간되었으며 교과서는

$$y' = ky,\ y' = ay + b,\ y' = ky(1-y/K),\ y'' = -y$$

등 네 가지 형태의 미분방정식을 상황의 이해, 즉, 자연현상의 이해와 풀이를 중심으로 다루고 있다(류희찬 외, 2014). 상황의 이해는 수학적 모델링의 첫 단계이며 미분방정식 지도를 위한 수학적 모델링에 대한 정의가 필요하다.

2009 개정 교육과정은 저항이 없는 용수철 진자 $y'' = -y$의 풀이를 요구하므로 교과서에서는 거듭제곱 급수법으로 풀이를 제공하고 있다. 그러나 거듭제곱 급수 해법의 경우 용어 '거듭제곱 급수'를 도입해야하고, 두 거듭제곱 급수의 상등관계 및 거듭제곱 급수의 항별미분법을 추가적으로 제공해야하며 특히, sine과 cosine 함수의 테일러 급수를 구하고 주어진 함수와 같다는 것을 보여야한다. 따라서 거듭제곱 급수방법으로 저항이 없는 용수철진자의 일반적인 미분방정식 $my'' = -ky$(여기서 m은 추의 질량, k는 용수철 상수)의 해를 지도하는 것

* 접수일(2014년 4월 22일), 심사(수정)일(2014년 5월 22일), 게재 확정일(2014년 5월 29일)
* ZDM 분류 : U24
* MSC2000 분류 : 97-01, 97C90
* 주제어 : 수학적 모델링(mathematical modeling), 미분방정식(differential equation)
† 교신저자 : jnpark@inha.ac.kr

은 매우 어렵다. 계산 과정을 보면 거듭제곱 급수 $y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$을 식 $my''=-ky$에 대입하여 $\sin(\sqrt{k/m}\,x)$와 $\cos(\sqrt{k/m}\,x)$의 테일러 급수의 선형합이 되도록 계수를 정돈해야하는데 현 교과과정에서는 쉽지 않다. 이에 따라 물리적 해석을 충분히 다룰 수 없으며 이런 이유로 멱급수방법 이외의 새로운 미분방정식의 풀이법이 요구된다.

한편, 교과서는 이계미분방정식 $y''=-y$을 기계적 시스템으로 다루고 있으며 일계미분방정식은 개체수와 뉴턴의 냉각법칙 등의 수학적 모델링 과정을 다루고 있다. 공학적인 측면에서 역학의 기본인 ‘기계적 시스템(mechanical system)’과 ‘전기적 시스템(electrical system)’ 모두를 다루는 것이 바람직하므로 본 연구에서는 전기회로를 주제로 한 일계미분방정식에 대한 교수방법을 제시하고자 한다.

끝으로 2009 개정 교육과정에서 제시한 미분방정식 관련 용어는 ‘미분방정식’ 뿐인데(한국과학창의 재단, 2011) 류희찬 외(2014)는 용어 ‘초깃값 문제’와 ‘지수증가모형’ 그리고 ‘뉴턴의 냉각법칙’을 사용하고 있다. 향후 새 교과서를 사용하여 교사가 학생을 지도하고 STEAM 또는 RME 관련 연구보고서나 논문을 작성할 때, 일치된 용어의 사용이 필요하므로 이에 대한 대안을 수정 제시한다.

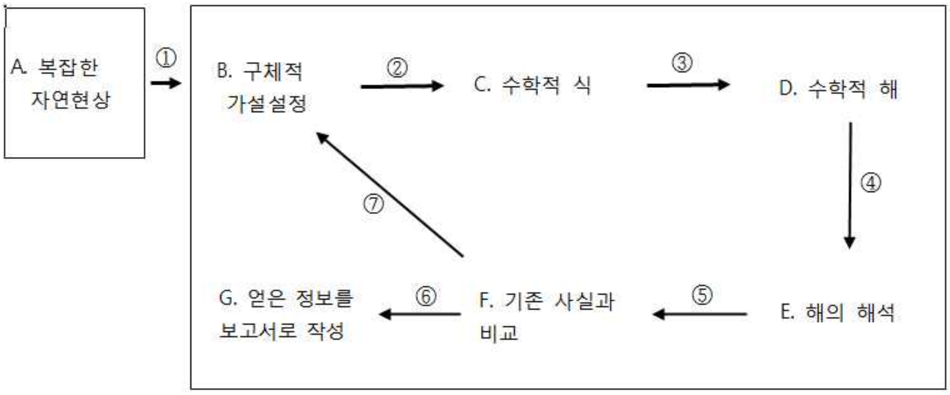
II. 미분방정식 지도

2009 개정 교육과정에서 미분방정식을 도입하였고 이에 따라 새 교과서가 2014년에 출간되었다. 우리는 교과서의 미분방정식 지도를 위하여 적합한 세 가지 수학적 모델링 과정을 제시하였고 교과서(류희찬 외, 2014)가 다루고 있는 미분방정식의 형태와 그 상황의 이해를 알아보았다. 새 교과서가 제시한 미분방정식 풀이 방법의 문제점을 알아보자.

1. 수학적 모델링(Mathematical Modeling)

용어 ‘모델링(modeling)’은 라틴어 modellus에서 유래했으며 ‘현실성 있게 복사하는 전형적인 인간의 방법’을 의미한다. 수학적 모델링의 사용은 기원전 2000년 경에 바빌론, 이집트, 인도 등에서 시작되었으며 수학은 주로 구체적인 문제해결을 위한 알고리즘방법에 사용되었다(Schichl, 2004). 최근 중등수학의 모델링 수업 연구는 Blanchard(1994), Ang(2001), Stillman et al.(2007), Charpin, O'Hara & Mackey(2013)를 참고해 보자. Arzarello et al.(2012)는 모션 센서와 GeoGebra를 활용하여 이차곡선을 지도한다. Blanchard (1994), Stillman et al.(2007), Warwick(2007), Zill & Wright(2012, p. 102)가 제시하는 수학적 모델링은 교과서에서 사용하는 인구와 같은 개체군 역학(population dynamics) 지도에 유용하게 활용할 수 있다.

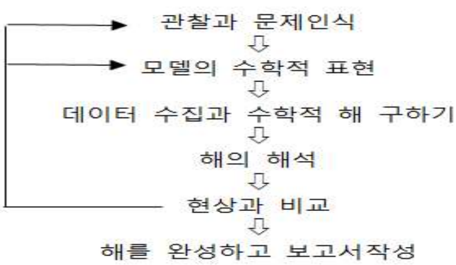
Stillman et al.(2007)은 수학적 모델링을 다음과 같은 과정으로 설명한다. 복잡하게 얽힌 자연현상을 단순화하여 구체적 자연현상으로 서술, 수학적 식으로 표현, 수학적 해를 구하고, 그리고 구한 해로 자연현상을 해석하고 해의 유용성을 판단한다. 이때 기존 사실과 비교하여 만족할만한 해로 판단되면 보고서를 작성하며 그렇지 않을 경우 좀 더 기존 사실과 가까운 상황을 설정하여 과정을 반복한다. 각 단계에서 사용하는 용어를 중등수학에서 용이하게 사용할 수 있도록 보완하여 표로 나타내면 다음과 같다.



<그림 II-1> 수학적 모델링1(Stillman·Galbraith Brown·Edwards, 2007)

① 자연현상을 과학적으로 이해, 단순구조화하여 해석한다.
② 가설을 설정하고 이를 수식, 변수, 함수 등 수학적 식으로 나타낸다.
③ 해를 수학적으로 구한다.
④ 구한 해를 해석한다.
⑤ 해의 유용성을 확인한다.
⑥ 기존의 사실과 비교하여 만족할 만한 해로 판단되면 이로부터 얻은 여러 정보를 정돈한다.
⑦ 기존의 사실과 비교하여 해의 신뢰에 문제가 있어 보다 정교한 해를 원할 경우 가설을 다시 설정하여 과정을 밟아나간다.

Warwick(2007)은 자연현상을 관찰하고 문제의식을 갖고 이를 해결하기 위하여 현상을 수학적 식으로 표현한다. 그리고 나타난 상수들을 구하기 위하여 데이터를 수집하고 해를 보완하는 과정을 보여준다.



<그림 II-2> 수학적 모델링2(Warwick, 2007)

류희찬 외(2014)가 사용한 개체군 역학의 예를 Stillman et al.(2007)이 제시한 모형으로 재구성해 보자. 교과서가 다루는 인구문제(류희찬 외, 2014, p. 64)를 어느 호수의 물고기 수 문제로 생각해 보자. 수학적 모델링의 과정은 B: '개체수의 변화율은 개체수에 비례한다'는 생물학적 현상을 가설로 설정, 이로부터 C: 식 $y' = ky$를 세우고, D: $\int y'/y\,dx$꼴의 적분을 통하여 해를 구한다. E: 구한 해(예를 들어, $y = 40e^{3x}$, x의 단위는 년)를 통하여 가까운 시기와 먼 시기의 개체수를 예측한다. F: 예측한 계체수를 검증한다. 이때, 향후 10년 후처럼 초깃값에 사용되는 통계자료를 만든 시기와 너무 멀리 떨어지면 물고기수를 예측하는데 설정한 가설에 문제가 있다는 것을 학생이 인식하고 보다 정교한 가설을 다시 설정하고 단계를 진행한다. 교과서에서 다루는 예(류희찬 외, 2014, p. 67)처럼 가설을 호수의 환경을 고려하여 B: 물고기가 최대 K마리 정도 존재할 수 있다는 가정으로 재설정하면 C: 수학적 식을 $y' = ky(1-y/K)$로 하고 D: 수학적 해는 예를 들면, $y = \dfrac{168}{1+(16/5)(1/8)^x}$ 등으로 구할 수 있다. 한편, 본 결과에 대하여 좀 더 구체적인 상황을 반영할 수 있다. 예를 들어 호수에서 주기적으로 적당한 비율로 물고기를 잡는다는 가설을 추가하면 수학적 식은 $y' = ky(1-y/K) - Ey$로 설정할 수 있다. 물론 더 정교한 결과를 얻을 수 있지만 수학적 풀이가 그만큼 복잡해진다. 따라서 Stillman et al.(2007)와 Warwick(2007)가 제시한 모형은 해에 대한 검증과 그에 대한 보완을 하는 과정을 보여주는데, 이에 따라 수학적 식이 복잡해지면서 중등과정에서 그 해를 구할 수 없는 경우가 생긴다. 이때 우리는 유사이산식(discrete analogue)(Ang, 2001), 기울기장(slope field), 위상선(phase line), Solver tool 등(Rasmussen, 2001; Kwon, 2002; Lomen & Lovelock, 1999; Zill & Wright, 2012)을 사용하여 지도할 수 있다.

공학교육에서 수학적 모델링은 '질량(m), 감쇠상수(c), 용수철 계수(k)'를 사용한 기계적 시스템과 '인덕턴스(L), 저항(R), 축전용량의 역수($1/C$)'를 사용한 전기적 시스템으로 나누어 적용하는데(Kreyszig, 2011; Zill & Wright, 2012; Boyce & DiPrima, 2010)) 상황의 이해와 해석은 물리이론을 필요로 한다. 이 경우 Stillman et al.(2007)이 제시한 모형에서 해의 유용성 판단은 중등과정에서 무의미하다. 따라서 '운동과 에너지' 또는 '전기'에 관한 물리이론을 사용할 때는 이에 적합한 과정이 필요하다. Kreyszig(2011, p. 2)는 수학적 모델링을 자연현상의 이해로부터 수식, 변수, 함수 등으로 수학적 식을 세우고 수학적으로 문제를 풀고, 그 결과를 물리적 또는 다른 시각에서 해석하는 과정으로 정의한다. 이를 그림으로 제시하면 다음과 같다.

① 자연현상의 이해 (상황의 이해)	⇨	② 수학적 식	⇨	③ 수학적 풀이	⇨	④ 자연현상의 해석

<그림 Ⅱ-3, 수학적 모델링3>

류희찬 외(2014)가 사용한 이계미분방정식 $y'' = -y$는 저항을 고려하지 않은 용수철 진자(undamped mass-spring system)이며 방정식 $y'' = -y$의 수학적 모델링의 과정은 다음과 같다.

① 저항을 고려하지 않은 용수철 진자에서 탄성력과 뉴턴의 운동방정식의 물리적 현상의 이해

② 이로부터 수학적 식 $y'' = -y$를 만들고

③ 초기조건과 거듭제곱 급수 해법을 사용하여 수학적 해를 구한다.

④ 해 $y = a\sin x + b\cos x$를 통하여 시간에 따른 용수철의 운동(주기, 폭 등)을 해석한다.

그러나 교과서는 구성상 거듭제곱 급수 해법을 이용하므로 추의 무게와 용수철 상수를 고려한 식 $my'' = -ky$의 풀이는 너무 복잡하여 이를 지도하기가 어렵다. 따라서 단진동할 때, 주기 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$를 질량 m과 용수철 상수 k와의 관계(곽성일 외, 2011b, p. 53) 등으로 해석할 수 없다.

교과서는 자연현상의 이해와 해석을 위하여 물리 II의 '힘과 운동'의 지식을 필요로 하는 기계적 시스템만 다루고 있는데 이와 같은 모델링 입장에서 볼 때 교과서는 기존 교육과정 틀에서 지도 가능한 '전기적 시스템'도 다루는 것이 필요하다고 본다.

2. 2009 개정 교육과정 교과서(류희찬 외, 2014)가 다루는 미분방정식과 상황의 이해

교수요목기(1946-1954)에 중학교 학제는 초급중학교 3년제와 고급중학교 3년제로 제정되어 이에 따른 교과서가 나오면서 수학교육도 어느 정도 정상화되기 시작하였다. 이 시기의 수학교과의 목표는 여러 가지 사물 현상을 분석, 처리하는 능력을 통하여 수리적 정신, 수학적 사고능력을 기르도록 하고 있다. 고급중학교 3학년 미적분학 내용영역에서 Taylor 정리, 중적분, 미분방정식 등을 취급하면서 수학과 내용은 수준이 매우 높았다. 미분방정식을 포함한 이들 주제는 제1차 교과과정기(1954-1963)가 도입되면서 삭제되었고(문교부, 1988), 이후 2009 개정 교육과정 이전에는 미분방정식을 다루지 않았었다. 그러나 미분방정식이란 용어의 사용만 없을 뿐 미분법 지도에 미분방정식 내용을 사용하고 있다. 예를 들면, 양승갑 외(1995)는 '수학 II'에서 "$y=\cos kx+\sin kx$일 때, $y''=-k^2y$임을 보여라"(p. 239) 또는 우정호 외(2009)는 '수학 II'에서 여러 가지 미분법을 다룰 때, "함수 $y=e^{-x}\cos x$에 대하여 $y''+2y'+2y=0$임을 보여라"(p. 168)와 같이 미분을 통하여 미분방정식의 해를 확인 하도록 한다. 마찬가지로 2009 개정교과서 '미적분 II'에서 우정호 외(2014, p. 143)는 "함수 $y=e^{2x}$에 대하여 $y''=4y$임을 보여라"를 다루고 있는데 이와 같은 예는 미분법의 교수방법으로 제시된 것이다. 또한, 2009 개정 교육과정 '미적분 II'에서 삼각함수를 지도할 때 용수철 사진을 제공하고 용수철이 늘어난 길이를 삼각함수 $f(t)=-5\cos t$로 제시한다(정상권 외, 2014, p. 95). 이때 용수철 사진 자체가 미분방정식 $my''=-ky$를 의미하며 연이어 제시한 그래프는 방정식의 해이다. 그림에서 천장에 매단 용수철을 사용하는데 이는 '외부 기전력(external force)'이 없는 단순조화진동(harmonic oscillation)을 말하며, 설명 없이 사용하는 설정은 다음 다섯 가지이다.

- 추가 정지한 위치에서 수평 축은 원점을 포함하는 시간(t) 축이고 아랫방향이 (+)이다.
- 진동하는 추의 저항은 무시한다.
- 용수철의 무게는 무시한다.
- 추에 작용하는 중력은 무시한다. 즉, 질량이 작아서 다른 힘에 비해 중력을 무시할 수 있다.
- 외부 기전력은 없다.

또한 정상권 외(2014)는 반감기(p. 22), 베버의 법칙(p. 34), 뉴턴의 냉각법칙(p. 43, 48, 166), 포식자 모형(p. 104), 인구성장 모델(p. 126), 용수철계(p. 156) 등의 상황의 이해를 다룬다.

2009 개정 교육과정에서 미분방정식의 개념과 풀이법이 도입되었다. 미분방정식의 학습 내용과 성취 기준은 다음과 같다. "① 미분방정식의 뜻을 알고, 간단한 미분방정식의 해를 구할 수 있다. ② $y'=ky, y''=-y$꼴의 미분방정식의 해의 성질을 이해한다"(교육과학기술부, 2011, p. 121). 또한 교수 학습상의 유의점으로 미분방정식은 상황의 이해에 중점을 두어 다루고, 그 풀이는 $y'=ky$, $y''=-y$와 같이 간단한 경우만 다룬다(교육과학기술부, 2011, p. 122).

류희찬 외(2014)는 상황의 이해를 일계인 경우는 주로 개체군 역학 그리고 이계인 경우는 용수철진자(spring-mass-system)를 다루고 있는데 일계미분방정식

$$y'=ky \tag{1}$$

는 '개체수의 변화율은 개체수에 비례한다'는 개체군 역학에서 만들어진 간단한 수학적 식이다. 식(1)은 개체

가 속한 환경 등을 고려하지 않았는데, 예를 들어, 어느 양어장의 규모나 환경을 고려하고 물고기의 개체수를 최대 K(환경의 수용력, carrying capacity)마리로 설정하면 로지스틱 방정식(logistic equation)

$$y' = ky(1-y/K) \tag{2}$$

으로 변형된다(류희찬 외, 2014, 문제01, p. 67). 한편, $y' = ky$의 해의 성질은 $k>0, k<0$에 따른 지수함수 그래프의 성질을 따르게 된다. 교과서는 개체 수 이외의 예로 방사성 연대측정방법, 그리고 수면 아래 빛의 세기 등을 다룬다(류희찬 외, 2014, p. 65).

또한 교과서는 상황의 이해로 뉴턴의 냉각법칙(Newton's law of cooling)을 다루는데(류희찬 외, 2014, p. 66), 뜨거운 커피의 온도를 $T(t)$라 하고 실내 주위온도를 A라 할 때, 뉴턴의 냉각법칙에 의하여 "커피의 온도 변화율은 주위 온도 차이에 비례한다"는 명제는 다음의 방정식으로 표현된다.

$$T'(t) = k\,(T(t) - A). \tag{3}$$

따라서 교과서가 다루는 일계미분방정식은 로지스틱 방정식과 뉴턴의 냉각법칙을 포함하여 식(1), 식(2), 식(3) :

$$y' = ky, \qquad y' = ky(1-y/K), \qquad y' = ay + b \tag{4}$$

모두 세 가지이며 학생들은 식(4)를 어느 정도 상식적인 수준에서 이해할 수 있다.

이계미분방정식의 경우를 살펴보자. 교과서는 용수철진자의 수학적 식

$$y'' = -y \tag{5}$$

을 다룬다(류희찬 외, 2014, p. 66). 따라서 상황의 이해는 물리이론을 필요로 하는데 식(5)와 관련된 상황의 이해를 물리 교과서에서 알아보자. 후크의 법칙 $F = -ky$로 주어지는 힘을 받는 물체는 단순조화진동을 한다. 탄성력은 '중학교 과학 ①'(힘과 운동)에서 학생들이 처음 접하고 '물리 II'에서 힘과 운동(단진동)에서 다시 접하는데 특히 용수철 상수가 k이고 질량이 m인 매달린 추의 단진동에서 $my'' = -ky$를 다룬다(곽성일 외, 2011b, p. 53). 즉, 이계미분방정식

$$my'' = -ky$$

은 뉴턴의 운동방정식 $F = ma$에 나오는 힘 F에 탄성력 $F = -ky$를 대입하여 얻은 것이다. 식(5)는 물체에 작용하는 마찰력을 고려하지 않고 물체에는 오직 탄성력만 작용한다는 가정 하에 만들어진 형태이다. 즉, 추에 작용하는 마찰이나 공기저항이 없고, 용수철의 무게도 무시한 것이다. 저항을 고려하면 식(5)는 $y'' = -2y' - 2y$ 등으로 변형되며 고급수학 II의 범위를 벗어나 이는 이 공계대학교육과정에서 다룬다.

3. 대학 교육과정에서의 미분방정식 지도 개요

대학 미분방정식 과정에서는 식(4), 식(5)를 포함하여 여러 가지 형태를 모델링과 MacMath, CAS, Maple, Mathematica 등의 테크놀로지를 활용하여 다루도록 하고 있다(Hubbard, 1994; Kreyszig, 2011; Zill & Wright, 2012). 수학적 식은 주로 지수함수 $y = e^{-3t}$, 삼각함수 $y = \cos t + \sin t$, 그리고 이들의 곱 $y = e^{-3t}(\cos t + \sin t)$의 형태가 주류를 이룬다. 지수함수의 기본형태는 일계미분방정식 $y' = cy$에서 오지만 삼각함수는 일계미분방정식으로 이루어진 수열에서 온다. 즉, 양방향 무한 수열 $\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots$에 대하여 $f_k{}' = f_{k+1}$ 이고 유계 $|f_k(x)| \le M$ 일 때, $f_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (여기서 c_1과 c_2는 상수)이다(Roe, 1980).

2009 개정 교육과정에서 다루는 단순조화진동을 나타내는 이계미분방정식 $y'' = -y$의 풀이를 대학 교육과정에서 간단히 살펴보자. '선형대수학'에서 이계선형미분방정식 $y'' = -y$의 풀이는 벡터공간 $\{y \mid y'' + y = 0\}$이 이차원이라는 것을 보이고(Friedberg, Inse, & Spence, 2003, Theorem 2.33) 이를 근거로 복소지수함수

$y = e^{\lambda x}$를 이용하여 서로 독립인 두 원소를 찾아 이들의 선형결합으로 일반해를 구하는 것이다. 이와 같은 접근은 선형변환의 핵(kernel)과 상(image)의 차원이론과 복소지수함수의 미분법을 선수지식으로 요구하기 때문에 중등 교육과정에서는 이러한 방법을 다루기 힘들다.

대학 수학전공이나 물리학전공을 위한 미분방정식 교재의 경우 Boyce & DiPrima(2010)는 일계미분방정식 $y' + p(x)y = g(x)$의 일반해를 적분인자를 사용하여 구한 후 이를 바탕으로 미분방정식 $y'' + ay' + by = 0$의 해를 복소지수함수 $y = e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$로 유추하여 제시한다. 또한 공과대학의 미분방정식 지도에서 해를 제시하는 방법 역시 직관적인 풀이에 의존하는데 Kreyszig(2011, p. 53)는 일계미분방정식 $y' + ky = 0$의 해 $y = ce^{-kx}$를 지도하고 이를 토대로 이계미분방정식 $y'' + ay' + by = 0$의 해를 복소지수함수 $y = e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$로 유추하여 접근한다. 그러나 두 저서는 학생들이 복소해석학을 배운 것을 가정할 수 없으므로 복소미분법이나 복소벡터공간 등의 이론을 공식처럼 제시하여 논란을 피해간다. 그러나 '고급수학 II'에서 복소지수함수의 정의나 그의 미분법은 교육과정 밖의 내용이므로 이공계 대학 교재의 방법을 사용할 수 없다.

4. 2009 개정 교육과정 교과서(류희찬 외, 2014)에 나타난 미분방정식 풀이

교과서(류희찬 외, 2014)가 다루는 일계미분방정식의 풀이를 살펴보자. 식(1)은 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$꼴, 식(3)은 $\int \frac{f'(x)}{f(x)-c}\,dx$꼴의 치환적분법과 그리고 식(2)는 $\int \frac{1}{y(1-y/K)}\,dy$ 꼴의 부분분수법을 사용하여 해 $y = 40e^{3x}$, $y = 22 + 78(63/78)^{x/3}$, $y = \dfrac{168}{1+(16/5)(1/8)^x}$ 등의 지수함수를 구한다.

이계미분방정식 $y'' = -y$의 풀이 방법에 대하여 알아보자. '고급수학 II'에서는 테일러 급수에 관한 이론을 충분히 다루는데 급수를 위한 함수는 $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$ 등과 같이 간단한 것만 다룬다(한국과학창의재단, 2011, p. 252). 이때 교과서는 이들의 테일러 급수를 구하고 주어진 함수와 같다는 것을 지도하고 있다(류희찬 외, 2014, p. 54). 예를 들면, $f(x) = \sin x$에 대하여 $f^{(n+1)}(x) = \pm\sin x$ 또는 $\pm\cos x$이므로 $|f^{(n+1)}(x)| \le 1$이다. 따라서 테일러 정리에서 $|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$이다. 그러므로 함수 $f(x) = \sin x$는 실수 구간에서 그것의 테일러 급수와 같다. 따라서 $y'' = -y$의 풀이는 해를 거듭제곱 급수 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ 라 하고 급수의 항별미분법(류희찬 외, 2014, p. 54)을 사용하여

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots\right)$$

이로부터 $y = a_0\cos x + a_1\sin x$를 얻는다.

식(5)의 풀이 과정은 매우 복잡하지만 거듭제곱 급수 해법을 택함으로서 벡터공간의 차원 결정, 그리고 복소지수함수의 미분법 등을 사용하지 않고 교육과정 틀 안에서 이루어졌다. 물론 이와 같은 거듭제곱 급수를 사용한 방법이 가능한 것은 '고급수학 II'에서 테일러 급수를 미분방정식 소개 이전에 충분히 다루기 때문이다. 그러나 거듭제곱 급수 $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$을 $my'' = -ky$에 대입하여 그 결과가 $\cos\sqrt{k/m}\,x$와 $\sin\sqrt{k/m}\,x$의 테일러 급수의 선형결합과 같다고 보이는 것은 너무 복잡하다. 그러므로 교과서는 단순한 미분방정식

$y'' = -y$ 만을 다룰 수밖에 없다. 이로 인하여 수학적 모델링 과정에서 다루는 물리적 해석은 추의 위치를 찾는 것에 국한되며 단진동할 때, 주기 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ 가 질량 m 과 용수철 상수 k 와 어떤 관계가 있는지 알아보는 것은 불가능하다(곽성일 외, 2011b, p. 53). 따라서 미분방정식 $my'' = -ky$ 의 간단한 풀이가 학생들에게 제공되어 수학적 모델링 과정에서 물리적 해석이 다양하게 이루어져야한다.

III. 미분방정식 지도의 대안

우리는 교육과정에서 말하는 상황의 이해를 포함하여 수학적 모델링 과정을 정의하였고 분야를 기계적 시스템과 전기적 시스템으로 나누어 소개하였다. 멱급수해법은 교과서의 전개에는 무리가 없지만 일반화 $my'' = -ky$ 지도에는 문제가 있다. 이로 인하여 물리적 해석이 쇠공의 위치를 구하는 것으로 한정된다. 한편, 일계미분방정식 $y' = ay + b$ 을 전기회로의 예로 사용하는 것이 바람직하다. 따라서 우리는 이계미분방정식 $my'' = -ky$ 의 단순한 풀이법과 물리적 해석을 제시하고 또한, 교육과정 안에서 일계미분방정식의 전기적 모델링을 교수방안으로 제시하고자 한다. 마지막으로 미분방정식 관련 단원에 사용된 용어에 대한 의견을 제시한다.

1. 이계미분방정식 $my'' = -ky$ 의 지도의 요점

교과서(류희찬 외, 2014)와 다른 풀이 방법을 제시하는데 필요한 수학이론은 '미적분 I'에서 다루고 있는 '도함수가 0인 함수는 상수함수'이다(신향균 외, 2014, p. 114).

먼저 식(1) $y' = ky$ 의 풀이를 살펴보자. 학생들은 경험적으로 지수함수 e^{kx} 가 식(1)을 만족한다는 것을 알고 있다. $y(x)$ 를 미분방정식 $y' = ky$ 의 임의의 해라 하자. 즉, $y'(x) = ky(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. 이제

$$z(x) = e^{-kx}y(x) \tag{6}$$

로 정의하자. 이때 $z'(x) = -ke^{-kx}y(x) + e^{-kx}y'(x)$ 이므로

$$z'(x) = -ke^{-kx}y(x) + e^{-kx}(ky(x)) = 0$$

따라서 $z(x) = c$ (c는 상수). 식(6)에서 $y(x) = ce^{kx}$ 를 얻는다(Friedberg, Inse & Spence, 2003). 즉, 일차원벡터공간 $\{y \mid y' - ky = 0\}$ 의 일반해 $y = ce^{kx}$ 를 구한 것이다.

이계도함수의 경우 $y'' = -y$ 를 먼저 살펴보자. $y'' = -y$ 을 만족하는 함수의 예로, 학생들은 $\sin x$, $\cos x$ 를 경험적으로 알고 있다. $y'' = -y$ 를 만족하는 임의의 함수를 y 라 하고 Brenner(1988)의 방법으로

$$\begin{cases} c_1 = y\cos x - y'\sin x \\ c_2 = y\sin x + y'\cos x \end{cases} \tag{7}$$

를 정의하자. 여기서 c_1과 c_2는 x에 관한 함수인데

$$c_1{}' = (y'\cos x - y\sin x) - (y''\sin x + y'\cos x) = 0$$

이고 마찬가지로 $c_2{}' = 0$ 이다. 그러므로 c_1 과 c_2 은 상수이다. 따라서 식(7)에서 y' 을 소거하면 일반해

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x$$

를 얻는다. 일반적인 경우 $my'' = -ky$ 또는 $y'' = -w^2 y$ $(w = \sqrt{k/m} > 0)$ 의 풀이도 생각해보자. 연립방정식

$$\begin{cases} c_1 = y\cos wx - y'\sin wx \\ c_2 = y\sin wx + y'\cos wx \end{cases} \tag{8}$$

에서 $c_1{}' = 0, c_2{}' = 0$임을 보일 수 있고, 따라서 c_1, c_2가 상수이다. 식(8)에서 y'을 소거하면 일반해 $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$를 얻으며, 또한 삼각함수의 덧셈정리로부터 일반해는

$$y(x) = C\cos(wx - \theta),\ C = \sqrt{c_1^2 + c_2{}^2},\ \tan\theta = c_2/c_1,\ w = \sqrt{k/m} \tag{9}$$

으로 변형된다. 결과적으로 연립방정식을 이용하여 이차원벡터공간 $\{y \mid my'' + ky = 0\}$의 일반해 식(9)를 구한 것이다.

류희찬 외(2014)는 수학적 모델링 과정을 기계적 시스템에서 수학적 식 $y'' = -y$ (여기서 $m = 1$은 추의 질량, $k = 1$는 용수철 상수)을 도입하고 거듭제곱 급수 해를 얻은 후, 3초 후 추의 위치 $y(3)$을 구하는 것으로 하고 있다. 이는 거듭제곱 급수 해법으로 $my'' = -ky$의 해를 구하는 것이 매우 어렵기 때문에 간단한 식 $y'' = -y$를 다룰 수 밖에 없으며, 따라서 자연현상의 해석을 추의 위치 정도로 다루었다고 본다. 그러므로 식(8)과 식(9)를 교과서나 학생지도에서 사용하는 것이 바람직하다. 식(9)에서 추의 진폭과 주기 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ 등을 구할 수 있고, 용수철 진자의 주기는 추의 질량 m과 용수철 상수 k에 어떻게 의존하는지 학생들은 확인할 수 있다. 곽성일 외(2011b, p. 53)가 언급한 “추의 질량이 클수록 주기가 커져 천천히 진동하고 용수철 상수가 클수록 주기가 작아져 빠르게 진동한다는 것”을 수학적으로 정확히 알 수 있다.

2009 개정 교육과정은 미분방정식 $y'' = -y$의 상황의 이해와 풀이를 요구하고 있는데 이는 교수·학습에서 과학 교과서(물리 II)의 활용을 전재로 한 것이라고 볼 수 있다.

2. 전기회로 도입과 물리적 해석

류희찬 외(2014)가 다루는 일계미분방정식은 생물학적 개체수, 로지스틱 방정식과 뉴턴의 냉각법칙을 포함하여 $y' = ky$, $y' = ky(1 - y/K)$, $y' = ay + b$ 모두 세 가지이며, 수학적 모델링의 과정 즉, 모델링, 풀이, 그리고 해석을 다루고 있다. 또한 이계미분방정식에서는 자연현상의 이해로서 용수철 진자를 다루고 있으므로 기존 교과서에서 사용하고 있는 식(3)을 RL-회로와 연계하여 지도하면 역학지도의 두 축인 기계적 시스템과 전기적 시스템을 다루게 되어 바람직하다고 본다. ‘물리 I’(곽성일 외, 2011a, p. 206)과 ‘물리 II’(곽성일 외, 2011b, p. 167)는 RLC-회로, RL-회로, 그리고 LC-회로를 각각 다룬다. 차이점은 ‘물리 I’(전기 신호의 조절)은 수식의 사용보다는 용어를 사용하여 개념을 지도하며, ‘물리 II’는 수학적 식(곽성일 외, 2011b, p. 167)

$$LI' + RI = E(t) \tag{10}$$

를 사용하고 있다. 예를 들어, $0.1I' + 11I = 48$은 $L = 0.1H(henrys)$, $R = 11\Omega(ohms)$, $E = 48V(volts)$인 RL-직렬회로의 수학적 식이다. 이는 교과서가 다루고 있는 뉴턴의 냉각법칙에 따른 식(3)과 같은 형태로 초깃값을 $I(0) = 0$으로 하면 수학적 해 $I(t) = 48/11 - (48/11)e^{-110t}$를 얻으며 극한을 사용하여 물리적으로 해석할 수 있다. $t \to \infty$로 하면 $-(48/11)e^{-110t}$는 0으로 수렴하는데 이런 항을 과도항(transient term)이라하며 잔류하는 항을 해의 정상상태(steady-state current)라 부른다. 따라서 시간이 경과하면 회로의 전류는 단순히 옴의 법칙($E = IR$)을 따르는 것을 지도할 수 있다.

$y' + ay = b$는 베루누이 방정식으로 불리는 비선형미분방정식으로 ‘적분인자(integral factor)’를 찾는 방법으로 지도할 수 있다(Kreyszig, 2011, p. 27). 치환적분법 대신 ‘두 함수의 곱에 대한 미분법’을 사용할 수 있으며 특히, 상수 a, b를 함수로 확장하여 지도할 수 있는 장점이 있다. 먼저, 두 함수의 곱의 미분법 입장에서 학생지도방법을 살펴보자.

‘미적분 I’에서 다루는 곱의 미분법 $(fg)' = f'g + fg'$에서 함수 f만을 주목하면 f'과 f가 이어서 나오

는 것을 알 수 있다. 한편, 식 $y' + ay = b$의 왼쪽에는 y'과 y가 있으므로 양변에 함수 z를 곱하여 곱의 미분형태로 접근하자. 이제

$$y'z + ayz = bz \tag{11}$$

이고 $(yz)' = y'z + yz'$ 이므로 $y'z + ayz = (yz)' = y'z + yz'$ 로 접근하면 $ayz = yz'$ 또는 $y \neq 0$ 이므로 $z' = az$이다. 즉, $z = e^{ax}$를 하나 얻는다. $z = e^{ax}$로 택하면 식(11)은 단순히 $(ye^{ax})' = be^{ax}$로 변형되므로

$$ye^{ax} = b\int e^{ax}\,dx + C \text{ 또는 } y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax} \quad (\text{여기서 } C\text{는 상수}) \tag{12}$$

를 얻는다. 앞에서 RL-직렬회로로 예를 든 $0.1I' + 11I = 48$은 식(12)에 의하여 초기조건을 $I(0) = 0$로 하면 수학적 해 $I(t) = 48/11 - (48/11)e^{-110t}$을 얻는다. 앞에서 언급한대로 곱의 미분법을 사용하면 상수 a, b를 함수로 한 미분방정식을 지도할 수 있다. 예를 들어, RL-회로 $4I' + 12I = 60\sin 30t$, $I(0) = 0$에서 식(11)과 식(12)의 과정을 거치면 방정식의 해 $I(t) = (5/101)(\sin 30t - 10\cos 230t) + (50/101)e^{-3t}$를 얻으며 극한($t \to \infty$)의 정상상태를 포함한 물리적 해석이 가능하다.

또한, 소금물의 농도와 같은 어렵지 않은 상황의 이해를 사용할 수 있다. 시간 t에서 소금의 양을 $Q(t)$라 할 때, 시간에 대한 변화율은

$$\frac{dQ}{dt} = (\text{유입율}) - (\text{유출율})$$

로 나타나며 일계미분방정식 $y' = b - ay$ (여기서 a, b는 상수)의 형태를 얻는다. 수학적 해는 $Q(t) = 25 + 25e^{-0.03t}$ 등으로 나타난다(Boyce & DiPrima, 2010, p. 52). 여기서 극한값(즉, $t \to \infty$) 등을 설명으로 요구할 수 있다.

곱의 미분법을 사용하기 위하여 미분방정식 $y' + ay = b$ 양변에 곱한 e^{ax}의 역할을 학생들은 미분방정식의 해와 그 그래프를 통하여 확인할 수 있다. $a > 0$일 때, x(주로 단위는 초)가 증가하면 Ce^{-ax}는 0으로 수렴하므로 $y = b/a + Ce^{-ax}$의 그래프는 $y = b/a$로 급격히 수렴함을 알 수 있다. 이런 이유로 수학적 모델링을 충분히 활용할 수 있는 일계미분방정식이라고 판단한다.

3. 일계미분방정식 $y' = f(y)$의 지도

류희찬 외(2014)가 다루는 일계미분방정식은 식(4)에서 언급한 $y' = ky$, $y' = ky(1 - y/K)$, $y' = ay + b$ 형태이다. 이를 $y' = f(y)$로 나타낼 때, 교과서는 일차와 이차함수로 $f(y)$를 다루고 있다. $f(y)$의 그래프와 방정식 $f(y) = 0$을 활용한 지도가 이루어져야한다(Rasmussen, 2001; Kwon, 2002; Kreyszig, 2011, p. 33). 방정식 $f(y) = 0$으로부터 $y' = 0$이므로 $y = (\text{상수})$를 얻으며 이를 평형해(equilibrium solution)라 한다. 개체군 역학에서 $y' = ky(1 - y/K)$의 평형해는 교과서가 말하는 '한계 수용 능력'을, RL-회로에서 $LI' + RI = E$의 평형해는 시간이 경과하면 회로의 전류는 단순히 옴의 법칙($E = IR$)을 따르는 것을 보여준다. 개체군 역학 지도에서

$$y' = -4y(1 - y/3)(1 - y/6) \tag{13}$$

를 사용할 때, 그래프 $f(y) = -4y(1 - y/3)(1 - y/6)$를 그리고 평형해와 여러 초깃값 $y(0) = 2$, $y(0) = 3$, $y(0) = 4$, $y(0) = 7$을 주고 식(13)의 수학적 풀이 없이 개체수의 극한지도를 할 수 있다(Rasmussen, 2001; Kwon, 2002). 실제 기울기장(slope field), 방향장(direction field), 위상선(phase line) 등을 이용하여 미분방정식을 풀지 않고도 미분방정식의 해곡선의 많은 것을 알 수 있다(Lomen & Lovelock, 1999; Zill

& Wright, 2012).

4. 용어의 도입

2009 개정 교육과정에서 제시한 미분방정식 관련 용어는 ‘미분방정식’ 뿐이다(교육과학기술부, 2011). 류희찬 외(2014)는 미분방정식 풀이에서 용어 ‘거듭제곱 급수’, ‘항별미분법’, ‘특수해’, ‘초깃값 문제’를 그리고 모델링에서 용어 ‘지수증가모형’, 한계 수용 능력‘, 그리고 ‘뉴턴의 냉각법칙’을 사용하고 있다. 교사가 새 교과서(류희찬 외, 2014)를 사용하여 STEAM(Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics) 또는 RME(realistic mathematics education)관련 지도를 할 때, 일치된 용어의 사용이 필요하다.

새 교과서에서 사용하고 있는 미분방정식에서 자연스럽게 일계미분방정식, 이계미분방정식, 그리고 식(2)인 로지스틱 방정식의 용어 사용이 필요하다. 또한 식(2)에서 교과서(p. 140)가 사용하고 있는 용어 ‘한계 수용 능력’을 ‘환경의 수용력(carrying capacity)’으로 사용하는 것이 바람직하다. 한편 식(5)에서 상황의 이해나 물리적 해석에 필요한 용어는 과학교과서(물리 I, II)에서 사용하는 용어를 따라야 한다. 예를 들어, 교과서는 ‘쇠공’ 보다는 ‘추’를 사용하는 것이 바람직하다. 한편, 식(10)에서 알아본 전기회로를 일계미분방정식 모델링으로 사용할 때 역시 과학교과서 ‘물리 I, II’의 용어를 따르고 풀이방법에서 사용한 용어 ‘적분인자(integral factor)’의 사용이 필요하다고 본다. 식(13)과 같은 개체군 역학지도에서는 지수함수의 극한과 관련된 ‘평형해(equilibrium solution)’ 또는 ‘위상선(phase line)’을 정의하여 사용하는 것도 고려해볼만하다.

한편, 실생활 중심의 미분방정식을 지도할 때 다양한 모델링을 사용할 수 있으며 이에 따라 많은 용어가 사용되는데 적합한 내용이나 용어 사용을 위하여 Zill & Wright(2012) 또는 Kreyzig(2011)의 번역서나 Lomen & Lovelock(1999)을 교사들이 참고서적으로 사용하는 것이 필요하다고 본다. Zill & Wright(2012, p. 102)와 Blanchard(1994)가 제시한 예를 교과서 범위 내에서 Warwick(2007)의 모델링으로 지도하는 방안을 살펴보자. 1935년 사탕수수를 해충으로부터 보호하기 위하여 호주 퀸즈랜드에 들어온 케인토트(독 두꺼비)의 서식지의 넓이 $P(t)$(단위: km^2)가 어떻게 증가하고 있는가에 대한 문제의식을 갖는다. 지수모형의 수학적 식 $P(t) = ce^{kt}$를 세운다. 상수를 결정하기 위하여 자료를 준비하고 자료를 이용하여 해를 구한다(이때 c, k를 구하기 위하여 2개의 실제 데이터를 이용한다). 얻은 식을 데이터와 비교하여 좀 더 정확한 수학적 식을 추구한다. 예를 들면, 지수모형으로 설정한 좌표 $(t, P(t))$를 자연로그를 취한 좌표 $(t, \ln P(t))$로 변형하고 최소제곱법(least square method)을 이용하여 직선 $\ln P(t) = mt + b$으로 접근하면 $P(t) = e^{mt+b} = e^b e^{mt}$로 더 적합한 지수함수를 얻는다. 해를 완성하고 이로부터 결과보고서를 완성한다. 앞서 데이터에서 만들어진 유한개의 점 $(t, \ln P(t))$을 최소제곱법을 사용하여 직선으로 접근하는 것은 이변수함수의 최솟값을 구하는 문제이고 이는 교과서의 ‘이변수함수의 극값의 판별’에서 해결할 수 있다(류희찬, 2014, p. 126-128). 교과서 범위 내에서 최소제곱법을 지도하고 더욱이 직선화하는 과정에서 상관계수(correlation coefficient)의 식을 도입하고 그 목적을 지도할 수 있다.

IV. 요약 및 결론

우리는 2009 개정 교육과정에서 언급한 상황의 이해를 포함하여 미분방정식 지도의 수학적 모델링 과정을 제시하고 류희찬 외(2014)가 사용한 모든 미분방정식 형태 $y' = ky$, $y' = ay + b$, $y' = ky(1 - y/K)$, $y'' = -y$ 등을 수학적 모델링으로 살펴보았다. 이계미분방정식 $y'' = -y$에서 사용한 거듭제곱 급수 풀이방법을 일반적인 식 $my'' = -ky$에 적용하는데 매우 큰 어려움이 있다는 것을 알아보았다. 이와 같은 이유로 교과서는 모델링 과정에서 수학적 해를 물리적으로 해석하는 방안을 다양하게 제시할 수 없다. 또한 교과서는

전기회로를 다루고 있지 않는 것을 확인할 수 있었다. 이는 수학적 모델링의 주요 공학적 대상인 기계적 시스템과 전기적 시스템에서 후자를 다루지 않는 단점이 있다.

우리는 본 소고에서 교수요목기 이후 교육과정에 처음 도입된 미분방정식의 지도를 위하여 Stillman et al.(2007), Warwick(2007), Kreyszig(2011)가 제시한 수학적 모델링을 소개하였고 Brenner (1988)의 방법인 연립방정식

$$\begin{cases} c_1 = y\cos x - y'\ \sin x \\ c_2 = y\sin x + y'\ \cos x \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} c_1 = y\cos wx - y'\ \sin wx \\ c_2 = y\sin wx + y'\ \cos\ wx \end{cases}$$

을 사용하여 수학적 식 $y'' = -y$ 또는 $y'' = -w^2 y\ (w>0)$의 매우 쉬운 수학적 풀이를 제시하였으며 이를 바탕으로 물리적 해석의 예를 '물리 II'에서 알아보았다. 또한, 류희찬 외(2014)는 일계미분방정식 $y' + ay = b$ (여기서 a, b 는 상수)를 뉴턴의 냉각법칙으로 다루고 있는데 이를 RL-전기회로로 지도하는 방안을 살펴보았다. 상황의 이해와 물리적 해석은 '물리 I'의 내용으로 지도할 수 있다.

우리가 소개한 수학적 모델링의 과정과 예는 교사가 미분방정식을 주제로 수업 내용을 구성할 때, 자연현상의 이해, 수학적 식, 수학적 풀이 그리고 자연현상의 해석 과정을 따라 미분방정식 지도와 평가를 효과적으로 하는데 도움이 된다고 판단한다. 이계미분방정식 $my'' = -ky$의 수학적 풀이를 쉽게 지도하고 이로부터 물리적 해석 지도를 다양하게 할 수 있다. 또한 전기회로를 다루어 학생들은 역학의 기본인 기계적 시스템과 전기적 시스템 모두를 접하는 기회를 갖는다.

'고급수학 II'의 교과서가 2014년 봄학기부터 사용된다. 새 교과서를 바탕으로 우리가 제시한 이계미분방정식 지도방안과 수학적 모델링 과정을 활용한 연구가 일반고에서도 STEAM 또는 RME 교육의 예로 진행될 수 있다고 본다(참고: Kwon, 2003; Ju & Kwon, 2004; 권오남, 2004). 한편, 일반고 미분방정식 지도에 있어 상황의 이해와 물리적 해석이 요구되기 때문에 '물리 I, II' 교과서의 해당지식을 물리교사와 협동지도에 대한 방안과 수학적 모델링의 결과를 보완하는 과정에서 일반고 학생들이 풀 수 없는 미분방정식을 다룰 때, 엑셀의 Solver Tool, Maple, Mathematica 등의 테크놀로지의 활용 방안에 대한 연구가 병행되어야 할 것이다.

끝으로 실생활 중심의 미분방정식을 지도할 때 Ang & Neo(2004)가 교통 흐름을 단순화하여 지도 가능성을 제시했듯이 다양한 분야를 대상으로 모델링을 지도할 수 있다. 이때 많은 용어가 사용되는데 우리는 일부 용어의 사용을 제시하였다. 향후 올바른 참고 내용이나 통일된 용어 사용을 위한 연구 또한 병행되어야 한다.

참 고 문 헌

곽성일·류상호·김대규·안중제·이옥수·김재혁·남경식·김익수 (2011a). 물리 I, 서울: 천재교육.

곽성일·류상호 김대규·안중제 이옥수·김재혁 남경식·김익수 (2011b). 물리 II, 서울: 천재교육.

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정(교육과학 기술부 고시 제 2011-361호 별책8).

권오남 (2004). 미분방정식 교수-학습의 RME 이론 적용 및 효과 분석, 서울: 한국연구재단.

류희찬·조완영·이정례·선우하식·이진호·손홍찬·신보미·조정묵·이병만·김용식·임미선·선미향·유익승· 한명주·박원균·남선주·김명수·정성윤 (2014). 고등학교 고급수학 II. 서울: 천재교과서.

문교부 (1988). 고등학교 수학과 교육과정 해설, 문교부 고시 제88-7호.

신항균·이광연·박세원·신범영 이계세·김정화·박문환·윤정호·박상의·서원호·전제동·이동흔 (2014). 고등학교 미적분 I, 서울: 지학사.

양승갑·이성길·배종숙 (1995). 고등학교 수학 II. 서울: 금성출판사.

우정호·박교식·이종희·박경미·김남희·임재훈·권석일·남진영·김진환·강현영·이형주·박재희·전철·오혜미·김상철·설은선 황수영·김민경 최인선 고현주·이정연 최은자·김기연 윤혜미·천화정 (2014). 미적분 II, 서울: 두산동아.

우정호·박교식 박경미·이경화 김남희·임재훈 최남광·송은영 (2009). 수학 II, 서울: 두산동아.

정상권·이재학 박혜숙·홍진곤 박부성·최홍원 민진원·김호경 (2014). 미적분 II, 서울: 금성출판사.

한국과학창의재단 (2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구.

Ang, K. C. (2001). Teaching mathematical modeling in Singapore schools, The Mathematics Educator, 6(1), 62-74.

Ang, K. C. & Neo, K. S. (2005). Real-life application of a simple continum traffic flow model. *Int. J. of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(8), 913-956.

Arzarello, F., Ferrara, F. & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representation. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 31(1), 20-30.

Blanchard, P. (1994). Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint. *College Math J.* 25, 385-395.

Boyce, W. & DiPrima, R. (2010). *Elementary differential equations and boundary value problems*, 9^{th} ed., New York: Wiley.

Brenner, J. L. (1988). An elementary approach to $y'' = -y$. Amer. Math. Monthly, 95, 344.

Charpin, J., O'Hara, S. & Mackey, S. (2013). Mathematical modeling at secondary school: the MACSI-Clongowes Wood College experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(8), 1175-1190.

Friedberg, S., Inse, A. & Spence. L. (2003). *Linear algebra*, 4^{th} ed. New Jersey: Prentice Hall.

Hubbard, J. H. (1994). What it means to understand a differential equation. College Math. J. 25(5), 372-384.

Ju, M.-K. & Kwon, O. N. (2004). Analysis of students' use of metapher: The case of a RME-based differential equations course. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. D: Research in Mathematical Education*, 8(1), 19-30.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics*, 10th. ed., New York: Wiley.

Kwon, O. N. (2002). Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 6(2), 159 - 170.

Kwon, O. N. (2003). Guided reinvention of Euler algorithm: An analysis of progressive mathematization in RME-based differential equations course. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 42(3), 387-402.

Lomen, D. & Lovelock, D. (1999). *Differential equations: graphics · model · data*, New York: Wiley.

Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations a framework for interpreting students' understanding and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.

Roe, J. (1980). A characterization of the sine function. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87, 69-73.

Schichl, H. (2004). *Models and the history of modeling*. Applied Optimization, 88, 25-36.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modeling in the secondary school. *In J. Watson & K. Beswick* (Eds.), Proc. 30^{th} Annual Conf. of the Mathematics Education Research Group of Australasis (MERGA) (Vol.2, pp.688-690). Adelaide: MERGA.

Warwick, J. (2007). Some reflections on the teaching of mathematical modeling. *The Mathematics Educator*, 17(1), 32-41.

Zill, D. & Wright, W. (2012). *Advanced engineering mathematics*, 5th ed., Boston: Jones & Bartlett Pub.

On a direction in the teaching of differential equations

Park, Jeanam†

Department of mathematics education, Inha University, Incheon Korea

E-mail: jnpark@inha.ac.kr

Jang, Dongsook

Department of mathematics, Inha University, Incheon Korea

E-mail: jds0919@ice.go.kr

In this paper we introduce mathematical modellings in teaching and learning differential equations which were adopted by 2009 revised curriculum. The textbook of 'Advanced Mathematics II' published in 2014 with one publisher includes the content of the second order differential equation $y'' + y = 0$ by the power series method. This paper discusses the issue of the power series and gives an alternative method to explain problems of differential equation. Also, we found that the textbook of 'Advanced Mathematics II' used the mechanical system not electrical system in solving differential equation problems. Thus this paper suggests a method using an electric circuit in teaching and learning the first order differential equation. Finally we suggest some terminologies in the teaching and learning of differential equations.

* ZDM Classification : U24

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97-01, 97C90

* Key Words : mathematical modeling, differential equation

† Corresponding author