

비국부 이론을 이용한 입자 강화 복합재 이중후방응력 소성 구성방정식 모델 및 전단밴드 분석

윤수진** · 김신회* · 박재범* · 정규동*

* 국방과학연구소 4본부 미래추진기술센터-5실

Non-Local Plasticity Constitutive Relation for Particulate Composite Material Using Combined Back-Stress Model and Shear Band Formation

Su-Jin Yun** , Shin Hoe Kim* , Jae-Beom Park* and Gyoo Dong Jung*

* Advanced Propulsion Technology Center, The 4th R&D Institute, Agency for Defense Development,

(Received March 22, 2014 ; Revised July 21, 2014 ; Accepted July 22, 2014)

Key Words: Non-Local Plastic Deformation(비국역적 소성변형), Constitutive Relation(구성방정식), Homogenization(균질화), Rice's Instability Criterion(Rice 불안정성 조건), Shear Band(전단밴드), Kinematic Hardening(이동경화)

초록: 2개의 상으로 구성된 입자 강화 복합재에 대한 균질화와 내부 상태 변수에 대해 2차 미분항이 포함된 비국역적 이론을 적용하여 탄소성 구성 방정식을 제안하였다. 열역학과 소성 포텐셜을 통해 내부 상태 변수에 대한 전개식 또한 본 논문에서 포함되었다. 연속체 결합 모델을 이용, 결합 인자에 따른 물성 저하 현상도 감안되었으며 이중 후방응력이 조합된 전개식 또한 제시하였다. 일부 예에 대한 수치해석 결과, 비국역적 변수의 영향이 증가할수록 전단밴드는 감소하나 반면 특정 후방응력 전개가 지배적일수록 소성변형 집중이 증가함이 관찰되었다. 더욱이 두 개의 강소성 상으로 이루어진 복합재의 경우 강성이 높은 계재물의 비중이 증가함에 따라 전단밴드 형성이 용이한 것으로 나타났다. 그 밖에 제어변수들의 변화에 따른 전단밴드 형성에 대한 분석 결과는 Rice 소성 불안정성 분석결과와 잘 일치함 또한 밝혀졌다.

Abstract: This paper proposes elastic-plastic constitutive relations for a composite material with two phases— inclusion and matrix phases— using a homogenization scheme. A thermodynamic framework is employed to develop non-local plasticity constitutive relations, which are specifically represented in terms of the second-order gradient terms of the internal state variables. A combined two back-stress evolution equation is also established and the degradation of the state and internal variables is expressed by continuum damage mechanics in terms of the damage factor. Then, deformation localization is analyzed; the analysis results show that the proposed model yields a wide range of shear band formation behaviors depending on the evolution of the specific internal state variables. The analysis results also show good agreement with the results of simplified Rice instability analyses.

- 기호설명 -

\bar{A}_{ij} : 유효항(effective: damaged free quantities)
 \widetilde{A}_{ij} : 균질항(homogenized terms)
 \underline{A}_{ij} : 비국역적 변수(non-local quantities)

\dot{A} : A 변수의 시간 분율(time derivative)
 A° : 회전독립 시간분율(co-rotational rate)
 A_1, A_2 : 각 상(phase)의 변수
 $A_{,kk}$: 2차 미분항(secondary derivative)
 A_e : 변수의 등가(equivalent quantities)
 C_I : 비국역적 내부변수항의 2차 미분 계수
(coefficient of Laplacean terms)

* Corresponding Author, yysj148@add.re.kr

© 2014 The Korean Society of Mechanical Engineers

- C_{ijkl}, M_{ijkl} : 탄성, 소성 유연(compliance) 텐서
 D_{ij} : 변형률(rate of deformation) 텐서
 E_{ijkl}, L_{ijkl} : 탄성, 탄젠트 탄소성 모듈러스 텐서
 F_{ij} : 변형 기울기(deformation gradient) 텐서
 f : 상(phase) 1의 부피분율
 I_{ijkl} : identity tensor
 L_{ij} : 속도 기울기(velocity gradient) 텐서
 s_{ij} : 디비아어토릭(deviatoric) 응력
 S_{ijkl} : Eshelby 텐서
 U : 내부 에너지(internal energy)
 W_{ij} : 연속체 스핀(continuum spin) 텐서
 α_{ij} : 후방응력(back stress)
 χ_{ij}, p : 컨주게이트 힘(conjugate force)
 ϵ^e, ϵ^p : 탄성, 소성 변형률
 $d\epsilon_{ij}$: 변형률 증분
 ϕ : 손상 혹은 결함 인자(damage factor)
 ψ : Helmholtz 자유 에너지
 λ : 소성 배수(plasticity multiplier)
 ρ : 지배적인 후방응력 부피분율(혹은 밀도)
 θ, S : 절대 온도, 엔트로피
 σ_{ij} : 현재 상태 응력(Cauchy stress)
 σ_y : 항복응력 상수
 $\Sigma_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij}$: 유효 응력(effective stress)
 Ω_{ij} : 하부구조(sub-structure) 스핀 텐서
 Ω : 목적 함수(objective function)

1. 서론

구조체의 경량화 및 고성능화를 위해 입자 강화 복합재에 대한 적용 폭이 증가하고 있으며 이에 따라 복합재에 대한 현실적인 해석이 요구되고 있다. 보편적인 복합재로는 CC(Ceramic- Ceramic), MMC (Metal Matrix Composite), FRP(Fiber Reinforced Plastic) 등이 포함되며 또한 바인더 매트릭스(Matrix)와 금속 입자로 구성된 고체 로켓 추진제도 입자 강화 복합재의 대표적인 형태이다.

복합재에 대한 구조해석은 탄성영역에서 이루어지는 것이 일반적이나, 제작 공정, 운용, 작동 등의 대변형과 결함이 발생하는 조건 하에서의 변형거동을 이해하기 위해서는 점탄성을 비롯하여 탄소성 소성변형 영역에서의 변형 거동에 대한 분석이 필요하다. 한편 소성영역이 변형해석에 포함되는 경우, 현재까지는 점성과 등방경화

식이 결합된 시컨트 모듈러스(secant modulus)기법이 자주 이용된다.^(1~5) 따라서 현재 적용되거나 향후 적용 예상되는 복합재 소재에 대해서 적용 가능한 소성 구성방정식의 연구가 요구된다.

한편 보편적인 복합재는 상대적으로 연성을 갖는 매트릭스(matrix)와 강성을 증가시키기 위한 계재물(inclusion)로 이뤄진다.⁽⁶⁾ 이에 따라 복합재 물성에 대한 균질화(homogenization scheme)가 요구되며 대체적으로 Mori-Tanaka,^(1,7~9) Self-consistent^(13~15)에 따른 Hashin-Shtrikman^(10~12) 균질화 기법 등이 일반적으로 적용되고 있다.

또한 복합재는 두 개의 상(phase)으로 구성되어 두 개의 상 사이에서의 변형의 차이로 인한 계면 결합을 동반할 수 있으며 결합 현상은 연속체 내에서의 동공(void)^(16~18) 혹은 물성 저하를 포함하는 내부 상태 변수의 하나인 결함요소(damage factor)^(19~22)에 따른 연속체 결함역학(CDM: Continuum Damage Mechanics) 등이 이용될 수 있다. 복합재는 탄성 혹은 소성물체로 구성되어 균질화를 통해 구조해석에 적용하므로 구조해석에는 한계점이 존재하며, 특히 크기와 형상이 서로 상이한 물질로 이루어져 있으므로 이를 극복하기 위해 비구역적(non-local) 이론^(21,23~30)에 근거한 다척도(multi-scale) 해석이 유용하다. 또한 비구역적 모델은 유한요소 혹은 유한변분의 메쉬 밀도의 비의존성을 증가시키기도 한다.

일반적인 구조물들은 소성변형을 겪을 때 등방경화(isotropic) 만으로는 변형집중에 의한 전단밴드에 대한 보다 정확한 예측결과를 얻기 힘든 어려움이 있으며 따라서 기존의 등방경화식 보다는 이동경화(kinematic) 혹은 J_2 변형이론에 의한 코너이론(corner theory)의 적용이 위의 어려움을 극복하는데 유리하게 작용한다.

본 연구에서는 기존의 복합재 해석이론과는 달리 주로 상온에서의 복합재가 변형률 독립(rate independent) 탄소성 변형에 노출되었을 때의 소성변형 거동을 해석하기 위한 구성방정식을 제안하였으며 이와 더불어 소성변형 국부화 현상을 이해하기 위한 수학적 모델을 제시하였다.

2. 구성방정식 전개

2.1 결함인자와 각 변수의 전개

대표적 체적 요소(RVE: Representative Volume Element)의 강도저하는 결함인자로 표시하며, 등

방(isotropic) 결함의 경우, 결함인자(ϕ)는 다음과 같이 정의된다.⁽³¹⁾

$$\phi = (a - \bar{a})/a \quad (1)$$

여기서 상첨자 (' \cdot ')는 상태 변수 혹은 내부 상태 변수들에 대해 가상의 무결함 유효상태에서의 물리적 량을 나타내며 a 와 \bar{a} 는 명목(nominal)과 유효(effective) 표면적이다. 예로 응력(σ_{ij})과 영 모듈러스(E : Modulus of elasticity)에 대해 다음의 관계식을 얻을 수 있다;

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (1 - \phi)\bar{\sigma}_{ij}, \quad \sigma_e = (1 - \phi)\bar{\sigma}_e, \\ E &= \bar{E}(1 - \phi)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

하첨자 ' e '는 등가(equivalent)를 나타낸다. 마찬가지로 변형률(ϵ)의 경우, 명목 변형과 유효 변형과의 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다;

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^e &= \frac{1}{1 - \phi} \bar{\epsilon}_{ij}^e, \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{1 - \phi} d\bar{\epsilon}_{ij}^p, \\ d\epsilon_e^p &= \frac{1}{1 - \phi} d\bar{\epsilon}_e^p, \quad \epsilon_e^p = \int \frac{1}{(1 - \phi)} d\bar{\epsilon}_e^p \end{aligned} \quad (3)$$

상첨자 ' e '와 ' p '는 각각 탄성 및 소성상태를 나타낸다. 비례 하중(proportional loading)조건에서 결함인자의 적분으로 다음을 얻는다.⁽³²⁾

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + (\phi_{cr} - \phi_0) \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\ln(\epsilon^p/\epsilon_{th}^p)}{\ln(\epsilon_{cr}^p/\epsilon_{th}^p)} h \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right)^\alpha \right] \right\}, \\ h \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right) &= \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right)^2, \quad \sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 ϕ_0 , ϕ_{cr} , ϵ_{cr}^p , ϵ_{th}^p , ν 는 각각 초기 결함, 극한 결함, 극한 등가 소성 변형량, 결함 발생 개시의 소성 변형 및 포아송 비를 나타낸다.

2.2 열역학과 내부변수의 전개

등온조건 하에서 Helmholtz 자유에너지 (ψ), 내부 에너지 (U)와 엔트로피 (S)와의 관계는

$$\begin{aligned} \psi &= \sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \psi^e + \psi^p, \\ \psi &= U - S\theta, \quad \dot{\psi} = \dot{U} - \dot{S}\theta \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\dot{S}\theta \equiv \pi = \dot{U} - \dot{\psi}$ (소실 π : dissipation)이다. 2개의 상으로 이루어진 복합재는 탄성과 소성변형에 의한 자유에너지의 시간의 변화율은

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{\psi}^e + \dot{\psi}^p = \dot{\psi}^e + \dot{\psi}^p \\ &= f \left(\dot{\psi}_1^e + \dot{\psi}_1^p \right) + (1 - f) \left(\dot{\psi}_2^e + \dot{\psi}_2^p \right) \end{aligned} \quad (6)$$

자유에너지는 다음 변수의 함수로 정의한다.

$$\tilde{\psi}^e = \tilde{\psi}^e(\epsilon_{ij}^e), \quad \tilde{\psi}^p = \tilde{\psi}^p(\chi_{ij}^p, \chi_{ij,kk}^p, p, p, kk) \quad (7)$$

여기서, χ_{ij} , p 는 각각 이동경화 및 등방경화에 대한 켄쥬게이트 힘(conjugate force)이다. 그럼,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= f \left(\frac{\partial \psi_1^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi_1^p}{\partial \chi_{ij}^p} \dot{\chi}_{ij}^p + \frac{\partial \psi_1^p}{\partial \chi_{ij,kk}^p} \dot{\chi}_{ij,kk}^p \right) \\ &+ (1 - f) \left(\frac{\partial \psi_2^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi_2^p}{\partial \chi_{ij}^p} \dot{\chi}_{ij}^p + \frac{\partial \psi_2^p}{\partial \chi_{ij,kk}^p} \dot{\chi}_{ij,kk}^p + \frac{\partial \psi_2^p}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \psi_2^p}{\partial p, kk} \dot{p}, kk \right) \\ &= f \frac{\partial \psi_1^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^e + (1 - f) \frac{\partial \psi_2^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \chi_{ij}^p} \dot{\chi}_{ij}^p \\ &+ \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \chi_{ij,kk}^p} \dot{\chi}_{ij,kk}^p + \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial p, kk} \dot{p}, kk \end{aligned} \quad (8)$$

위 식에서 소성변형 변수는 균질화된 변수로 정의되었으며 따라서 소실률은

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= f \left(\frac{1}{\rho_1} \sigma_{ij} - \frac{\partial \psi_1^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^e + (1 - f) \left(\frac{1}{\rho_2} \sigma_{ij} - \frac{\partial \psi_2^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^e \\ &+ \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\chi}_{ij}^p - \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \chi_{ij}^p} \dot{\chi}_{ij}^p - \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \chi_{ij,kk}^p} \dot{\chi}_{ij,kk}^p - \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial p} \dot{p} - \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial p, kk} \dot{p}, kk \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

그러므로 탄소성에서의 상태(state) 변수와 내부 상태(internal state) 변수들은 아래와 같다.

$$\tilde{\psi}^e = f\psi_1^e + (1 - f)\psi_2^e, \quad \tilde{\psi}^p = f\psi_1^p + (1 - f)\psi_2^p \quad (10)$$

$$\sigma_{ij} = \rho_1 \frac{\partial \psi_1^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} = \rho_2 \frac{\partial \psi_2^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} = \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} \quad (11)$$

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \chi_{ij}^p}, \quad \tilde{\alpha}_{ij,kk} = \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \chi_{ij,kk}^p},$$

$$\tilde{R} = \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial p}, \quad \tilde{R}, kk = \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial p, kk} \quad (12)$$

그럼, 손실률은 상태변수와 내부 상태 변수 및 기울기 향으로 표현하면

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}\dot{\pi} &= \sigma_{ij} \dot{\chi}_{ij}^p - \tilde{\alpha}_{ij} \dot{\chi}_{ij}^p - \tilde{\alpha}_{ij,kk} \dot{\chi}_{ij,kk}^p - \tilde{R}\dot{p} - \tilde{R}, kk \dot{p}, kk \\ \pi &= \pi(\sigma_{ij}, \tilde{\alpha}_{ij}, \tilde{\alpha}_{ij,kk}, \tilde{R}, \tilde{R}, kk, \tilde{\epsilon}_{ij}^p, \tilde{\chi}_{ij}^p, \tilde{\chi}_{ij,kk}^p, \tilde{p}, \tilde{p}, kk) \end{aligned} \quad (13)$$

자유에너지는 아래와 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}\tilde{\psi}^p &= \frac{1}{2} a_1 \tilde{\chi}_{ij}^p \tilde{\chi}_{ij}^p + \frac{1}{2} a_2 \tilde{\chi}_{ij,kk}^p \tilde{\chi}_{ij,kk}^p + \frac{1}{2} b_1 \tilde{p}^2 + \frac{1}{b_2} \tilde{p}, kk \tilde{p}, kk \\ \tilde{\rho}\tilde{\psi}^e &= \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_{ij}^e \tilde{E}_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}^e \end{aligned} \quad (14)$$

그러므로 상태변수와 내부변수에 대한 각각의 구성방정식은 시간 분율에 대해

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= \tilde{E}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}, \\ \dot{\alpha}_{ij} &= a_1 \dot{\chi}_{ij}, \quad \dot{\alpha}_{ij, kk} = a_2 \dot{\chi}_{ij, kk} \\ \dot{R} &= b_1 \dot{p}, \quad \dot{R}_{, kk} = b_2 \dot{p}_{, kk}\end{aligned}\quad (15)$$

소성 포텐셜함수(F)와 목적 함수(objective function Ω)는 아래와 같이 정의되며 이를 이용하여 각 내부변수들에 대한 구체적인 전개식(evolution)은 다음과 같다.

$$\tilde{F} = \frac{1}{2} (s_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) (s_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) - \frac{1}{3} (\sigma_y + \hat{R})^2 + \frac{1}{2} k_1 \hat{\alpha}_{ij} \hat{\alpha}_{ij} + \frac{1}{2} k_2 \hat{R}^2$$

$$\Omega = \pi - \tilde{\lambda} \tilde{F}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\epsilon}_{ij} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} = \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{ij}} = -\dot{\chi}_{ij} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_{ij}} = 0 \rightarrow \dot{\chi}_{ij} = -\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_{ij}}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{ij, kk}} = -\dot{\chi}_{ij, kk} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_{ij, kk}} = 0 \rightarrow \dot{\chi}_{ij, kk} = -\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_{ij, kk}}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial R} = -\dot{p} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial R} = 0 \rightarrow \dot{p} = -\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial R}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial R_{, kk}} = -\dot{p}_{, kk} - \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial R_{, kk}} = 0 \rightarrow \dot{p}_{, kk} = -\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial R_{, kk}} \quad (17)$$

혹은 복합재의 소성 포텐셜은 또 다른 방법으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\tilde{F} = f F_1 + (1-f) F_2$$

$$\begin{aligned} &= f \left[\frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij|1} \hat{\Sigma}_{ij|1} - \frac{1}{3} (\sigma_{y1} + \hat{R}_1)^2 + \frac{k_1}{2} \hat{\alpha}_{ij|1} \hat{\alpha}_{ij|1} + \frac{k_2}{2} \hat{R}_1^2 \right] + \\ (1-f) & \left[\frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij|2} \hat{\Sigma}_{ij|2} - \frac{1}{3} (\sigma_{y2} + \hat{R}_2)^2 + \frac{k_3}{2} \hat{\alpha}_{ij|2} \hat{\alpha}_{ij|2} + \frac{k_4}{2} \hat{R}_2^2 \right] \quad (18)\end{aligned}$$

2.3 비구역적 변수(Non-local variables)

비구역적 변수는 연속체 Ω 내에서의 물질 지점(material point) 주변에서의 구역적 변수(local variable)에 대한 평균으로 볼 수 있다.⁽³³⁾

$$\bar{F} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \Psi F d\Omega,$$

$$\Psi(y, \bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp \left[-\frac{|\bar{x} - y|^2}{2l^2} \right] \quad (19)$$

여기서 Ψ : 무게 함수(weight function), \bar{y} : $d\Omega$ 에서의 위치 벡터이다. 길이 척도(length scale) 변수 ' l '은 비구역적 량에 기여하는 대표 체적 요소의 크기에 의해 결정된다. 위의 식은 Taylor series 확대를 이용, 다음의 식으로 나타낸다.⁽³⁴⁾

$$\bar{F}(\bar{y}) = F(\bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial x_i} (y_i - x_i)$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (y_i - x_i)(y_j - x_j) + \dots,$$

$$\bar{F}(\bar{x}) = F(\bar{x}) + c(l) \nabla^2 F(\bar{x}) + d(l) \nabla^4 F(\bar{x}) + \dots, \quad (20)$$

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_i^2 \quad (\text{Laplacean gradient})$$

한편 위 식에서의 비구역적 변수가 변형량으로 대체된다면

$$\bar{\epsilon}_e^p(\bar{x}) = \epsilon_e(\bar{x}) + c(l) \nabla^2 \epsilon_e^p(\bar{x}) + d(l) \nabla^4 \epsilon_e^p(\bar{x}) + \dots \quad (21)$$

더욱이 큰 차수의 항들이 무시된다면 Aifantis⁽³⁵⁾가 제안한 식과 동일한 형태를 갖는다.

$$\bar{\epsilon}_e^p(\bar{x}) = \epsilon_e^p(\bar{x}) + c(l) \nabla^2 \epsilon_e^p(\bar{x}) \quad (22)$$

Aifantis⁽³⁵⁾는 비구역적 후방응력을 아래와 같이 표현하였다.

$$\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} + C_{1ij} \nabla^2 |\alpha_{ij}| = \alpha_{ij} + C_{1ij} \nabla^2 \alpha_e \quad (23)$$

여기서, 후방응력 기울기 계수는 텐서 형태로

$$C_{1ij} \propto \frac{\alpha_{ij}}{|\alpha_{ij}|} \quad \text{혹은} \quad C_{1ij} \propto \frac{s_{ij} - \alpha_{ij}}{|s_{ij} - \alpha_{ij}|}, \quad (24)$$

반면 Voiadjis 등⁽³⁶⁾은 다음과 같이 비구역적 후방응력을 표현하였으며

$$\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} + C_1 \nabla^2 \alpha_{ij} \quad (25)$$

위식에서 스칼라(scalar) 기울기 계수가 적용되었다. Aifantis와 같은 경우 식은 간단하게 나타낼 수 있으나 실험을 통해서 텐서 형태의 후방응력 기울기 계수를 얻는다는 것은 매우 어려운 일이며 따라서 보다 간단한 형태의 스칼라 기울기 계수를 가정하는 것이 더욱 바람직하다. 그럼, 비구역적 응력과 후방응력은 각각

$$\hat{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} + C_1 \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij}, \quad C_1 = C_1(\bar{\alpha}_e) = C_1(\bar{\epsilon}_e^p)$$

$$\hat{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y + C_2 \nabla^2 \bar{\epsilon}_e^p, \quad C_2 = C_2(\bar{\epsilon}_e^p), \quad (26)$$

로 나타내며, 여기서 $|\bar{\alpha}_{ij}| = \bar{\alpha}_e = \left(\frac{3}{2} \bar{\alpha}_{ij} \bar{\alpha}_{ij} \right)^{1/2}$

이다. 그럼 대표적 비구역적 변수는 아래와 같다.

$$\bar{\Sigma}_{ij} \equiv s_{ij} - \alpha_{ij}, \quad \hat{\Sigma}_{ij} \equiv \bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij} \quad (27)$$

따라서 항복함수가 비구역적 변수로 표현되면

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} (\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) (\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_y^2 \\ &= \frac{1}{2} (\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} - C_1 \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij}) (\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij} - C_1 \nabla^2 \bar{\alpha}_{ij}) \\ &\quad - \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_y + C_2 \nabla^2 \bar{\epsilon}_e^p)^2 = \frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij} \hat{\Sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \hat{\sigma}_y^2 \quad (28)\end{aligned}$$

그럼, 일치 조건(consistency condition)은

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\bar{\sigma}_{ij}}d\bar{\sigma}_{ij} + \frac{\partial\theta}{\partial\bar{\alpha}_{ij}}d\bar{\alpha}_{ij} + \frac{\partial\theta}{\partial\bar{\epsilon}_e^p}d\bar{\epsilon}_e^p \quad (29)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\bar{\sigma}_{ij}} &= (\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} - C_1\nabla^2\bar{\alpha}_{ij}) = \bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij} = \hat{\Sigma}_{ij}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\bar{\alpha}_{ij}} &= -\frac{\partial\theta}{\partial\bar{\sigma}_{ij}} = -\hat{\Sigma}_{ij}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\bar{\epsilon}_e^p} &= -C_1^*\hat{\Sigma}_{ij}\nabla^2\bar{\alpha}_{ij} - \frac{2}{3}\hat{\sigma}_y C_2^*\nabla^2\bar{\epsilon}_e^p, \quad (30) \\ C_l^* &= \frac{\partial C_l}{\partial\bar{\epsilon}_e^p} \text{이다.} \end{aligned}$$

한편 통상적인 탄성 구조해석에 있어 변위의 근사적 확장을 이용한 다중 척도(mult-scale) 확장 기법^(28,40,41)과는 달리 본 연구에서 제시된 탄소성 내부 상태 변수에 대해서 2차 편미분항의 결합에 따른 비구역적 구성방정식이 적용되었다.

2.4 복합재의 구성방정식

2.4.1 복합재 I

여기서, 복합재 I은 탄소성 매트릭스와 탄성 계 재료로 이루어졌다고 가정하였으며, 따라서 상 1의 항복함수 및 소성 포텐셜은 각각

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{1}{2}\hat{\Sigma}_{ij|1}\hat{\Sigma}_{ij|1} - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_y + \hat{R})^2 \\ &= \frac{1}{2}(\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij|1} - C_1\bar{\alpha}_{ij,kk|1})(\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij|1} - C_1\bar{\alpha}_{ij,kk|1}) \\ &\quad - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_y|1 + R|1 + C_2R_{,kk|2})^2, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{2}(\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij})(\bar{s}_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}) - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_y + \hat{R})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}k_1\hat{\alpha}_{ij}\hat{\alpha}_{ij} + \frac{1}{2}k_2\hat{R}^2 \quad (32) \end{aligned}$$

J_2 변형이론 및 시켄트 모듈러스⁽⁵⁾에 기초한 탄소성 복합재의 균질화와는 달리 아래와 같이 증분에 기반을 둔 구성방정식을 유도하였다.

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon}_{ij} &= \bar{M}_{ijkl}d\bar{\sigma}_{kl}, \quad d\bar{\sigma}_{ij} = \bar{M}_{ijkl}^{-1}d\bar{\epsilon}_{kl}, \quad (33) \\ \bar{M}_{ijkl} &= (1-f)\bar{L}_{ijmn}^{-1}|_M B_{mnkl}|_M + f\bar{E}_{ijmn}^{-1}|_I B_{mnkl}|_I \\ &= (1-f)\bar{L}_{ijmn}^{-1}|_M B_{mnkl}|_M + f\bar{C}_{ijmn}|_I B_{mnkl}|_I, \\ B_{ijkl}|_I &= [I_{ijkl} + (1-f)\bar{M}_{ijmn}^{-1}|_M (I_{mnpq} - S_{mnpq}|_I)(\bar{C}_{pqkl}|_I - \bar{M}_{pqkl}|_M)]^{-1} \\ &= [I_{ijkl} + (1-f)\bar{L}_{ijmn}|_M (I_{mnpq} - S_{mnpq}|_I)(\bar{E}_{pqkl}^{-1}|_I - \bar{L}_{pqkl}^{-1}|_M)]^{-1} \\ B_{ijkl}|_M &= \frac{1}{1-f}(I_{ijkl} - fB_{ijkl}) \end{aligned}$$

여기서 S_{ijkl} 는 Eshelby 텐서⁽⁶⁾이며 아래와 같다.

$$\begin{aligned} S_{1111} &= \frac{1}{2(1-\nu_M)} \left[\frac{4\alpha^2-2}{\alpha^2-1} - 2\nu_M - g(\alpha) \left(1 - 2\nu_M + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} \right) \right], \\ S_{2222} = S_{3333} &= \frac{1}{4(1-\nu_M)} \left[\frac{3\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} + g(\alpha) \left(1 - 2\nu_M - \frac{9}{4(\alpha^2-1)} \right) \right] \\ S_{1122} = S_{1133} &= \frac{1}{2(1-\nu_M)} \left[-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + 2\nu_M + g(\alpha) \left(1 - 2\nu_M + \frac{3}{2(\alpha^2-1)} \right) \right] \\ S_{2211} = S_{3311} &= \frac{1}{2(1-\nu_M)} \left[-\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} + \frac{g(\alpha)}{2} \left(\frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} - (1-2\nu_M) \right) \right] \\ S_{2233} = S_{3322} &= \frac{1}{4(1-\nu_M)} \left[\frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} - g(\alpha) \left(1 - 2\nu_M + \frac{3}{4(\alpha^2-1)} \right) \right] \\ S_{1212} = S_{1313} &= \frac{1}{4(1-\nu_M)} \left[-\frac{2}{\alpha^2-1} - 2\nu_M - \frac{g(\alpha)}{2} \left(1 - 2\nu_M + \frac{3(\alpha^2+1)}{\alpha^2-1} \right) \right] \\ S_{2323} &= \frac{S_{2222} - S_{2233}}{2}, \end{aligned}$$

$$g(\alpha) = \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}} [\alpha(\alpha^2-1)^{1/2} - \cosh^{-1}\alpha], \quad (33)$$

$$\alpha = a/b$$

한편 소성흐름은 이동경화에 의해서 얻는 것으로 가정하였으며, 이중후방응력 모델은 비선형 Armstrong-Frederick 변형률⁽³⁷⁾과 비선형 Phillips 응력률⁽³⁸⁾ 경화식의 조합에 따라 전개되는 것으로 설정되었으며 여기서 β , γ , ζ 와 ν 는 각 후방응력 전개식에서의 경화계수들이다.

$$d\bar{\alpha}_{ij}|_m = \rho d\bar{\alpha}_{ij}|_1 + (1-\rho)d\bar{\alpha}_{ij}|_2 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} d\bar{\alpha}_{ij}|_1 &= \bar{\beta}d\bar{\epsilon}_{ij}^p - \bar{\gamma}d\bar{\epsilon}_e^p\bar{\alpha}_{ij}, \quad (\text{Armstrong-Frederick}) \\ d\bar{\alpha}_{ij}|_2 &= \bar{\zeta}d\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\nu}d\bar{\epsilon}_e^p\bar{\alpha}_{ij} \quad (\text{Phillips}) \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} \left[\bar{\beta} - \bar{\gamma}\bar{\alpha}_{ij} \frac{\bar{s}'_{ij}}{\bar{\sigma}_y} \right], \\ \bar{K}_t &= \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} [\bar{\beta} - \bar{\gamma}\bar{\alpha}_{ij}], \\ \bar{K}_c &= \frac{f}{1-(1-f)\bar{\zeta}} [\bar{\beta} + \bar{\gamma}\bar{\alpha}_{ij}], \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{1-(1-f)\bar{\zeta}}{f} \frac{\bar{K}_c + \bar{K}_t}{2}, \\ \bar{\gamma} &= \frac{1-(1-f)\bar{\zeta}}{f} \frac{\bar{K}_c - \bar{K}_t}{2\bar{\alpha}_s} \quad (37) \end{aligned}$$

여기서 α_s 는 역하중(reverse loading) 시의 별개의 후방응력계수이며 최종 후방응력(ultimate back stress)으로 대체될 수 있다.

두 개의 이동경화에 대한 조합은 객관적 후방 응력률(objective rate of back stress)에 대해서 혼합분율 이용하여 적용되므로 따라서 소성변형률과 응력률은 단일 장(field)으로 표현된다.

소성흐름은 항복함수에 대한 일치(consistency) 조건을 이용, 아래와 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{1}{2}(\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij|m} - C_1 \bar{\alpha}_{ij,kl|m})(\bar{s}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij|m} - C_1 \bar{\alpha}_{ij,kl|m}) \\ &\quad - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_y + [\bar{R} + C_2 \bar{R}_{,kk}])^2 \\ &= \frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij|m} \hat{\Sigma}_{ij|m} - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_y + \hat{R})^2, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} d\bar{\theta} &= \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} d\bar{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\alpha}_{ij|m}} d\bar{\alpha}_{ij|m} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{R}} d\bar{R} = 0 \\ &= \hat{\Sigma}_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} - \hat{\Sigma}_{ij} d\bar{\alpha}_{ij|m} - \frac{2}{3}(\bar{\sigma}_y + \hat{R}) d\bar{R}, \\ &= \hat{\Sigma}_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} - \hat{\Sigma}_{ij} [\rho \bar{\beta} d\bar{\epsilon}_{ij}^p - \rho \bar{\gamma} d\bar{\epsilon}_e^p \bar{\alpha}_{ij} \\ &\quad + (1-\rho) \bar{\zeta} d\bar{\sigma}_{ij} - (1-\rho) \bar{\nu} d\bar{\epsilon}_e^p \bar{\alpha}_{ij}] - \frac{2}{3} \bar{r} (\bar{\sigma}_y + \hat{R}) d\bar{\epsilon}_e^p, \\ &= [1 - (1-\rho) \bar{\zeta}] \hat{\Sigma}_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} - \lambda \rho \bar{\beta} \hat{\Sigma}_{ij} \hat{\Sigma}_{ij} + \lambda \frac{2}{3} \rho \bar{\gamma} \hat{\Sigma}_{ij} \bar{\alpha}_{ij} \hat{\Sigma}_e \\ &\quad + \lambda \frac{2}{3} (1-\rho) \bar{\nu} \hat{\Sigma}_{ij} \bar{\alpha}_{ij} \hat{\Sigma}_e - \lambda \frac{4}{9} (\bar{\sigma}_y + \hat{R}) \hat{\Sigma}_e, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{A}{B+C+D+E+F}, \quad (\text{plasticity multiplier}) \\ A &\equiv [1 - (1-\rho) \bar{\zeta}] \hat{\Sigma}_{tu} \bar{E}_{tuvv} d\bar{\epsilon}_{vw}, \\ B &\equiv [1 - (1-\rho) \bar{\zeta}] \hat{\Sigma}_{pq} \bar{E}_{pqrs} \hat{\Sigma}_{rs}, \\ C &\equiv \rho \bar{\beta} \hat{\Sigma}_{pq} \hat{\Sigma}_{pq}, \\ D &\equiv -\frac{2}{3} \rho \bar{\gamma} \hat{\Sigma}_{pq} \bar{\alpha}_{pq} \hat{\Sigma}_e, \\ E &\equiv -\frac{2}{3} (1-\rho) \bar{\nu} \hat{\Sigma}_{pq} \bar{\alpha}_{pq} \hat{\Sigma}_e, \\ F &\equiv \frac{4}{9} (\bar{\sigma}_y + \hat{R}) \hat{\Sigma}_e \end{aligned} \quad (40)$$

그럼, 변형률-응력률 구성방정식은

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma}_{ij} &= \bar{E}_{ijkl} d\bar{\epsilon}_{ij}^e = \bar{E}_{ijkl} (d\bar{\epsilon}_{ij} - d\bar{\epsilon}_{ij}^p) \\ &= \bar{E}_{ijkl} d\bar{\epsilon}_{kl} - \bar{E}_{ijkl} \lambda \hat{\Sigma}_{kl} = \bar{L}_{ijkl} d\bar{\epsilon}_{kl}, \\ \bar{L}_{ijkl}|_M &= \bar{M}_{ijkl}^{-1}|_M \\ &= \bar{E}_{ijkl}|_M - \frac{A'_{ijkl}}{B+C+D+E+F}, \\ A'_{ijkl} &\equiv [1 - (1-\rho) \bar{\zeta}] \bar{E}_{ijtu}|_M \hat{\Sigma}_{tu} \bar{E}_{vwkl}|_M \hat{\Sigma}_{vw} \end{aligned} \quad (41)$$

그럼, 탄소성 유연 텐서는

$$\bar{\bar{M}}_{ijkl} = (1-f) \bar{L}_{ijmn}^{-1}|_M B_{mnkl}|_M + f \bar{E}_{ijmn}^{-1}|_M B_{mnkl}|_M \quad (42)$$

여기서, 균질화 모듈러스와 마찬가지로

$$B_{ijkl}|_I = [I_{ijkl} + (1-f) \bar{L}_{ijmn}|_M (I_{mnpq} - S_{mnpq}|_I) (\bar{E}_{pqkl}^{-1}|_I - \bar{L}_{pqkl}^{-1}|_M)]^{-1}$$

$$B_{ijkl}|_M = \frac{1}{1-f} (I_{ijkl} - f B_{ijkl}|_I) \quad (43)$$

2.4.2 복합재 II

복합재 II는 매트릭스와 계재물이 모두 탄소성 물질로 이루어졌다고 가정하였으며, 그럼 각각의 항복함수와 균질화된 항복함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta|_1 &= \frac{1}{2} \Sigma_{ij|1} \Sigma_{ij|1} - \frac{1}{3} (\sigma_{y|1})^2, \\ \theta|_2 &= \frac{1}{2} \Sigma_{ij|2} \Sigma_{ij|2} - \frac{1}{3} (\sigma_{y|2})^2, \\ \tilde{\theta} &= f \theta|_1 + (1-f) \theta|_2 \end{aligned} \quad (44)$$

또한 항복함수는 유효변수와 비구역적 변수로 표현하면

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij} \hat{\Sigma}_{ij} - \frac{1}{3} (\hat{\sigma}_y)^2 \quad (45)$$

한편, 내부상태 변수를 유도하기 위한 항복 포텐셜은 아래와 같이 3 가지 선택이 있다.

$$\begin{aligned} \text{i) } \tilde{F} &= f \bar{F}_1 + (1-f) \bar{F}_2 \\ &= f \left[\frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij|1} \hat{\Sigma}_{ij|1} - \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_{y|1} + \hat{R}|_1)^2 + \frac{k_1}{2} \hat{\alpha}_{ij|1} \hat{\alpha}_{ij|1} + \frac{k_2}{2} \hat{R}|_1^2 \right] \\ &\quad + (1-f) \left[\frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij|2} \hat{\Sigma}_{ij|2} - \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_{y|2} + \hat{R}|_2)^2 + \frac{k_3}{2} \hat{\alpha}_{ij|2} \hat{\alpha}_{ij|2} + \frac{k_4}{2} \hat{R}|_2^2 \right] \end{aligned}$$

식 i)로 각 상에 대한 부피 분율을 이용한 균질화 소성 포텐셜이 얻어지며,

$$\text{ii) } \tilde{F} = \frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij} \hat{\Sigma}_{ij} - \frac{1}{3} (\hat{\sigma}_y + \hat{R})^2 + \frac{1}{2} k_1 \hat{\alpha}_{ij} \hat{\alpha}_{ij} + \frac{1}{2} k_2 \hat{R}^2,$$

식 ii)에서는 상의 존재를 무시한 상태에서의 균질화된 내부 변수를 통해 소성 포텐셜이 결정되며,

$$\begin{aligned} \text{iii) } \tilde{F} &= \frac{1}{2} \hat{\Sigma}_{ij} \hat{\Sigma}_{ij} - f \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_{y|1} + \hat{R}|_1)^2 - (1-f) \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_{y|2} + \hat{R}|_2)^2 \\ &\quad + f \frac{1}{2} k_1 \hat{\alpha}_{ij|1} \hat{\alpha}_{ij|1} + (1-f) \frac{1}{2} k_2 \hat{\alpha}_{ij|2} \hat{\alpha}_{ij|2} \\ &\quad + f \frac{1}{2} k_2 \hat{R}|_1^2 + (1-f) \frac{1}{2} k_2 \hat{R}|_2^2, \end{aligned}$$

마지막으로 식 iii)은 후방응력에 대한 단일상 균질화 및 등방경화응력은 부피분율을 이용한 포텐셜을 얻는 과정을 보여주고 있다.

일반적으로 각 상의 항복강도 및 소성곡선의 탄젠트 모듈러스에 큰 차이가 있으며, 따라서, 식 i)의 선택이 타당하다고 볼 수 있다. 그럼, 선택 1의 항복 포텐셜을 이용, 예로 상 1에 대한 각 내

부 상태 변수의 전개는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d\bar{\chi}_{ij|1}^p &= -\bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\alpha}_{ij|1}} = -\bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{F}_1} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{\alpha}_{ij|1}} \\ &= -f\bar{\lambda}_1 \left(-\widehat{\Sigma}_{ij|1} + k_1 \widehat{\alpha}_{ij|1} \right) \\ &= f \left(d\bar{\epsilon}_{ij|1}^p - \frac{3}{2} \frac{k_1}{\widehat{\Sigma}_e} d\bar{\epsilon}_{e|1}^p \widehat{\alpha}_{ij|1} \right), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} d\bar{\chi}_{ij,kk|1}^p &= -\bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{F}_1} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \widehat{\alpha}_{ij|1}} \frac{\partial \widehat{\alpha}_{ij|1}}{\partial \bar{\alpha}_{ij,kk|1}} \\ &= -f\bar{\lambda}_1 C_1 \left(-\widehat{\Sigma}_{ij|1} + k_1 \widehat{\alpha}_{ij|1} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} d\bar{p}|_1 &= -\bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{R}|_1} = -\bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{F}_1} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{R}|_1} \\ &= d\bar{\epsilon}_e^p - \frac{3}{2} k_2 d\bar{\epsilon}_{e|1}^p \frac{\widehat{R}|_1}{\bar{\sigma}_y|_1 + \widehat{R}|_1}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} d\bar{p}_{,kk|1} &= -\bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{R}_{,kk|1}} = -\bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{F}_1} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \widehat{R}|_1} \frac{\partial \widehat{R}|_1}{\partial \bar{R}_{,kk|1}} \\ &= f C_2 \left[d\bar{\epsilon}_{e|1}^p - \frac{3}{2} k_2 d\bar{\epsilon}_{e|1}^p \frac{\widehat{R}|_1}{\bar{\sigma}_y|_1 + \widehat{R}|_1} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

탄소성 탄젠트 모듈러스를 얻기 위해 3 가지 선택이 다음에서 보는 바와 같이 있다.

$$\begin{aligned} \text{I) } d\sigma_{ij} &= \tilde{L}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl}, \\ \tilde{L}_{ijkl} &= L_{ijkl|1} + (1-f) \left[(L_{ijmn|2} L_{mnnk|1}^{-1} |_1 - I_{ijkl})^{-1} \right. \\ &\quad \left. + f(I_{ijkl} - S_{ijkl}) \right]^{-1}, \\ \tilde{L}_{ijkl} &= \tilde{L}_{ijkl}(L_{ijkl|1}, L_{ijkl|2}) \end{aligned} \quad (50)$$

식 I)과 같은 경우, 각 상에 대한 탄젠트 모듈러스를 구한 다음 Eshelby 텐서를 이용, 균질화하는 것으로 균질 모듈러스는 각 상의 모듈러스의 함수로 표시된다.

$$\begin{aligned} \text{II) } d\sigma_{ij} &= (\tilde{E}_{ijkl}^{-1} + \tilde{R}_{ijkl}^{-1})^{-1} d\tilde{\epsilon}_{kl}, \\ \tilde{E}_{ijkl} &= E_{ijkl|1} + (1-f) \left[(E_{ijmn|2} E_{mnnk|1}^{-1} |_1 - I_{ijkl})^{-1} \right. \\ &\quad \left. + f(I_{ijkl} - S_{ijkl}) \right]^{-1}, \\ \tilde{R}_{ijkl} &= R_{ijkl|1} + (1-f) \left[(R_{ijmn|2} R_{mnnk|1}^{-1} |_1 - I_{ijkl})^{-1} \right. \\ &\quad \left. + f(I_{ijkl} - S_{ijkl}) \right]^{-1}, \\ \tilde{L}_{ijkl} &= \tilde{L}_{ijkl}(\tilde{E}_{ijkl}, \tilde{R}_{ijkl}), \\ \tilde{E}_{ijkl} &= \tilde{E}_{ijkl}(E_{ijkl|1}, E_{ijkl|2}), \\ \tilde{R}_{ijkl} &= \tilde{R}_{ijkl}(R_{ijkl|1}, R_{ijkl|2}), \end{aligned} \quad (51)$$

이번에는 각 상의 별개의 탄성 모듈러스와 소성 모듈러스를 이용하여 복합재의 균질화된 탄성과 소성 모듈러스를 각각 구하며, 탄소성 모듈러스는 균질화된 탄성과 소성 모듈러스의 함수로 나타낼 수 있다. 이와 같은 경우 전단(deviatoric) 변형과 체적(volumetric) 변형으로 구분될 수 있어 기존의 시컨트 모듈러스 방법의 연장선으로 응용될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{III) } d\sigma_{ij} &= \tilde{L}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl}, \\ \tilde{E}_{ijkl} &= E_{ijkl|1} + (1-f) \left[(E_{ijmn|2} E_{mnnk|1}^{-1} |_1 - I_{ijkl})^{-1} \right. \\ &\quad \left. + f(I_{ijkl} - S_{ijkl}) \right]^{-1}, \\ \tilde{\theta} &= f\theta|_1 + (1-f)\theta|_2 = f \left[\frac{1}{2} \Sigma_{ij|1} \Sigma_{ij|1} - \frac{1}{3} (\sigma_y|_1)^2 \right] \\ &\quad + (1-f) \left[\frac{1}{2} \Sigma_{ij|2} \Sigma_{ij|2} - \frac{1}{3} (\sigma_y^2)|_2 \right], \\ \tilde{\Sigma}_{ij} &\neq \Sigma_{ij|1} \neq \Sigma_{ij|2}, \\ \tilde{L}_{ijkl} &= \tilde{L}_{ijkl}(\tilde{E}_{ijkl}, \Sigma_{ij|1}, \Sigma_{ij|2}, \tilde{\Sigma}_{ij}) \end{aligned} \quad (52)$$

다음은 그 중간 형태로, 복합재의 탄성 모듈러스는 균질화를 통해 얻으며, 반면 소성 모듈러스는 균질화된 항복함수를 통해 얻는다. 본문에서는 편리성과 부피분율의 소성변형에 대한 영향을 보기위해 위의 방법을 적용하였다.

변형률-응력률 구성방정식을 얻는 과정에서 복합재 I과 마찬가지로 후방응력의 전개가 비선형 Armstrong-Frederick과 선형 Phillips 경화식에 따른다면 구성방정식은 일치조건에 의해

$$\begin{aligned} d\tilde{\theta} &= \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} d\bar{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \bar{\alpha}_{ij|1}} d\bar{\alpha}_{ij|1} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \bar{\alpha}_{ij|2}} d\bar{\alpha}_{ij|2} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \bar{R}} d\bar{R}, \\ d\bar{\sigma}_{ij} &= \tilde{L}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl} = \tilde{L}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl}, \\ \tilde{L}_{ijkl} &= \tilde{E}_{ijkl} - \frac{A_{ijkl}}{B + C + D + E}, \end{aligned} \quad (53)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &\equiv \tilde{E}_{ijvw} \left[f \widehat{\Sigma}_{vw|1} + (1-f)(1-\zeta) \widehat{\Sigma}_{vw|2} \right] \tilde{E}_{tucl} \widehat{\Sigma}_{tu}, \\ B &\equiv \left[f \widehat{\Sigma}_{pq|1} + (1-f)(1-\zeta) \widehat{\Sigma}_{pq|2} \right] \tilde{E}_{pqrs} \widehat{\Sigma}_{rs}, \\ C &\equiv f \bar{\beta} \widehat{\Sigma}_{pq|1} \widehat{\Sigma}_{pq}, \\ D &\equiv -\frac{2}{3} f \bar{\gamma} \widehat{\Sigma}_{pq|1} \bar{\alpha}_{pq|1} \widehat{\Sigma}_e, \\ E &\equiv \frac{4}{9} r \left(\tilde{\sigma}_y + \widehat{R} \right) \widehat{\Sigma}_e \end{aligned}$$

2.5 Rice 소성 불안전(Rice instability criterion)

2.5.1 복합재 I

Rice 소성 불안전성이 적용되기 위해서는 아래

와 같은 가정들이 요구된다.

- 탄성 변형 무시(강소성: $\bar{E}_{ijkl}|_C \rightarrow \infty$)
- 비구역적 변수 무시(2차 미분 gradient 무시)
- 파손 인자 무시($\phi=0$)
- 균질화 Eshelby 텐서 무시
- 등방경화 무시, 순수 이동경화 적용
- 선형 Phillips 후방응력 전개
- 제어변수: ρ, ζ

강소성 구성방정식과 일치조건을 이용하면 소성 탄젠트 경화 기울기는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon}_{ij}^p &= \bar{\lambda} \bar{\Sigma}_{ij}, \\ d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} &= \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} [\rho \beta d\bar{\epsilon}_{ij}^p - \rho \gamma d\bar{\epsilon}_e^p + (1-\rho)\zeta d\sigma_{ij}], \\ \lambda &= \frac{\frac{[1-(1-\rho)\zeta]}{\rho} \Sigma_{kl} d\sigma_{kl}}{\beta \Sigma_{pq} \Sigma_{pq} - \frac{2}{3} \gamma \alpha_{pq} \Sigma_{pq} \Sigma_e}}, \\ \text{따라서 경화 기울기(hardening tangent)는;} \\ h_t &= \frac{\rho \left(\beta \Sigma_{pq} \Sigma_{pq} - \frac{2}{3} \gamma \alpha_{pq} \Sigma_e \Sigma_{pq} \right)}{1 - (1-\rho)\zeta} \\ &= \frac{\rho}{1 - (1-\rho)\zeta} \left(\beta \Sigma_{pq} \Sigma_{pq} - \frac{2}{3} \gamma \alpha_{pq} \Sigma_e \Sigma_{pq} \right) \quad (54) \end{aligned}$$

소성 불안정성 혹은 전단밴드 생성의 판단 기준은 소성 탄젠트 경화 기울기(h_t)의 값이 '0'에 도달하는 조건이나, 그런 조건은 ρ 가 "0"이 아닌 이상 얻을 수 없다. 대신 각 제어 변수의 변화에 따른 h_t 의 증감 여부는 판단할 수 있다. Armstrong-Frederick 이동경화 분율 ρ 에 대해 1차 편미분을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t}{\partial \rho} &= \frac{(1-\zeta) \left(\frac{2}{3} \beta \Sigma_e^2 - \frac{2}{3} \gamma \Sigma_{pq} \alpha_{pq} \Sigma_e \right)}{[1 - (1-\rho)\zeta]^2}, \\ \rho \uparrow &\rightarrow \frac{\partial h_t}{\partial \rho} \downarrow \quad (55) \end{aligned}$$

따라서, Armstrong-Frederick 이동경화의 후방응력의 전개가 지배적일수록 위의 항이 감소하므로 소성불안정성 즉 전단밴드 형성은 용이해진다. 한편 Phillips 경화계수의 영향은 아래와 같으며

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t}{\partial \zeta} &= \frac{(1-\rho) \rho \left(\frac{2}{3} \beta \Sigma_e^2 - \frac{2}{3} \gamma \Sigma_{pq} \alpha_{pq} \Sigma_e \right)}{[1 - (1-\rho)\zeta]^2}, \quad (56) \\ \zeta \uparrow &\rightarrow \frac{\partial h_t}{\partial \zeta} \uparrow \end{aligned}$$

Phillips 경화계수가 증가할수록 전단밴드 형성은 완화된다.

2.5.2 복합재 II

여기서는 복합재 I과는 달리 상의 부피분율과 항복강도 차이가 고려 대상에 포함되었으며, 적용된 가정들은 제어변수를 제외하고 복합재 I과 동일하다. 적용된 항복함수와 일치조건은

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{1}{2} \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_{ij} - \frac{1}{3} [f(\bar{\sigma}_{y1} + \bar{R}_1) + (1-f)(\bar{\sigma}_{y2} + \bar{R}_2)]^2, \\ d\bar{\theta} &= \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} d\bar{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\alpha}_{ij}} d\bar{\alpha}_{ij} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{R}_1} d\bar{R}_1 + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{R}_2} d\bar{R}_2, \\ &= \bar{\Sigma}_{ij} d\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\Sigma}_{ij} d\bar{\alpha}_{ij} - \frac{2}{3} f(\bar{\sigma}_{y1} + \bar{R}_1) d\bar{R}_1 - \frac{2}{3} (1-f)(\bar{\sigma}_{y2} + \bar{R}_2) d\bar{R}_2 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{A}{B + C + D + E},$$

$$A \equiv [1 - (1-f)\zeta] \bar{\Sigma}_{kl} d\bar{\sigma}_{kl},$$

$$B \equiv \frac{2}{3} f \bar{\beta} \bar{\Sigma}_e^2,$$

$$C \equiv -\frac{2}{3} f \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{pq} \bar{\alpha}_{pq} \bar{\Sigma}_e,$$

$$D \equiv \frac{4}{9} f \bar{r}_1 (\bar{\sigma}_{y1} + \bar{R}_1) \bar{\Sigma}_e,$$

$$E \equiv \frac{4}{9} (1-f) \bar{r}_2 (\bar{\sigma}_{y2} + \bar{R}_2) \bar{\Sigma}_e,$$

$$h_t = \frac{A' f + B' (1-f)}{1 - (1-f)\zeta} \left(= \frac{(A' - B') f + B'}{1 - (1-f)\zeta} \right),$$

$$A' \equiv \frac{2}{3} \beta \Sigma_e^2 - \frac{2}{3} \gamma \Sigma_{pq} \alpha_{pq} \Sigma_e + \frac{4}{9} r_1 \sigma_{e1} \Sigma_e,$$

$$B' \equiv \frac{4}{9} r_2 \sigma_{e2} \Sigma_e$$

일반적으로 항복강도 및 모듈러스가 계재물 (inclusion)이 매트릭스보다 높으므로 본 분석에서는 경화 기울기를 "0"보다 크게 유지하기 위해 f 를 계재물(상 1)의 부피분율로 적용하였다. 그럼 경화 기울기의 f 에 대한 편미분은

$$\frac{\partial h_t}{\partial f} = \frac{(1-\zeta)A - B}{[1 - (1-f)\zeta]^2}, \quad (57)$$

$$f \uparrow \rightarrow \frac{\partial h_t}{\partial f} \downarrow$$

따라서, 계재물의 비중이 증가할수록 강도는 증가하나 소성변형에 따른 전단밴드 형성이 용이해지는 것을 알 수 있다.

3. 수치해석

F_{ij} 는 변형 기울기이며 초기와 현재 상태와의

관계($x_i = x_i(a_j, t)$)를 나타낸다.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad (58)$$

x_i : 현재 상태(current configuration), a_i : 참고 상태(reference configuration)

본장에서는 편리성을 위해 변수항들은 증분 형태보다는(increment) 변형률(rate)항으로 표현되었다. $F_{i,j}$ 는 소성과 탄성 변형의 영역으로 다음과 같이 분리될 수 있으며 이는 소성변형 상태가 에너지가 소산(dissipation)되므로 '0' 에너지 상태이기 때문이다.⁽³⁹⁾

$$F_{ij} = F_{ik}^e F_{kj}^p \quad (59)$$

또한 속도 기울기 L_{ij} 는 다음과 같다.

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, L_{ij} = \dot{F}_{ik} F_{kj}^{-1} = L_{ij}^e + F_{il}^e L_{lm}^p F_{mj}^{-1}, \quad (60)$$

여기서 각각 $L_{ij}^p \equiv \dot{F}_{ik}^p F_{kj}^{p-1}$, $L_{ij}^e \equiv \dot{F}_{ik}^e F_{kj}^{e-1}$. 따라서 위의 식은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$L_{ij}^p = D_{ij}^p + W_{ij}^p, \quad (61)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\text{rate of deformation})$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (\text{continuum spin})$$

여기서 D_{ij}^p 와 W_{ij}^p 는 각각 소성변형률과 소성스핀(spin)을 각각 나타낸다. 응력률은 하부구조스핀(sub-structure spin) 텐서에 대해서 회전 독립(co-rotation 혹은 objective)으로 나타내며 이는 순수한 강제회전을 의미한다. 현상학적인 소성스핀은 아래와 같으며 또한 소성스핀은 흡사하게 후방응력과 함께 객관적 응력률은 다음과 같다.

$$W_{ij}^p|_1 = \eta(\alpha_{ik} D_{kj}^p - D_{ik}^p \alpha_{kj}),$$

$$W_{ij}^p|_2 = \xi(\alpha_{ik} \dot{\sigma}_{kj}^p - \dot{\sigma}_{ik}^p \alpha_{kj}) \quad (62)$$

변형 에너지 증가 원리를 토대로 다음과 같이 각 후방응력 성분에 대한 조합이 적용되었다.

$$W_{ij}^p|_m = [W_{im}^p|_1 \alpha_{mk}|_1 + W_{im}^p|_2 \alpha_{mk}|_2] \alpha_{kj}^{-1}|_m \quad (63)$$

응력과 후방응력에 대한 동축 회전을 하부구조스핀에 의해 표현되며 아래와 같다.

$$\sigma_{ij}^\circ = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \Omega_{kj},$$

$$\alpha_{ij}^\circ = \dot{\alpha}_{ij} - \Omega_{ik} \alpha_{kj} + \alpha_{ik} \Omega_{kj},$$

$$\Omega_{ij} = W_{ij} - W_{ij}^p|_m \quad (64)$$

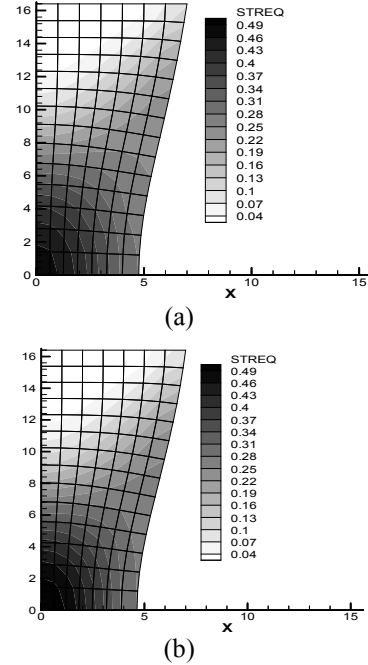


Fig. 1 Deformation of tensile specimen obtained using FEA: a) $\phi = 0$, b) $\phi \neq 0$

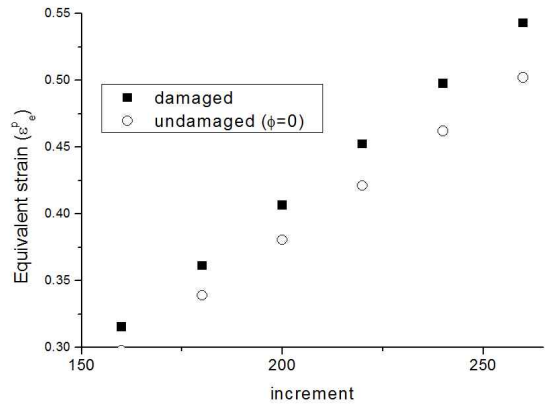


Fig. 2 Evolution of equivalent strain near center of work piece showing effect of damage factor

우선, 결함 전개에 따른 소성변형 거동을 분석하기 위해 유한요소해석(FEA)이 사용하였으며 그 결과는 Fig. 1에서 보는 바와 같다. 아울러 Fig. 2는 결함전개에 따른 물체 중앙에서의 변형률의 변화를 나타내며 결함에 의해 소성변형 집중현상을 가속시키는 것이 관찰된다.

단순 전단(simple shear) 변형에서의 탄소성변형을 이해하기 위해 유한변분 해석(FDA)이 시도되었으며, 전단밴드 생성을 위해 물체 중앙에 결함이 고의로 부여되었다. Fig. 3과 4는 소성변형에서의 비구역적 후방응력항($\hat{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} + C_1 \alpha_{ij,kk}$)의

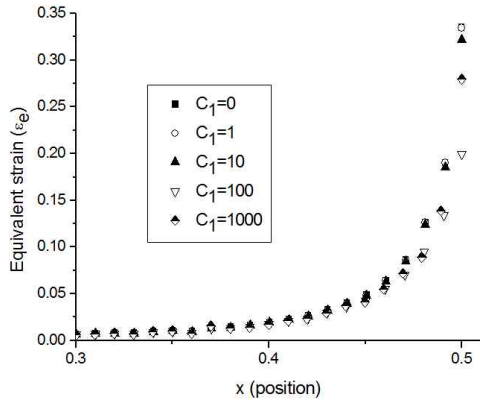


Fig. 3 Effect of gradient coefficient C_1 on distribution of equivalent plastic strain

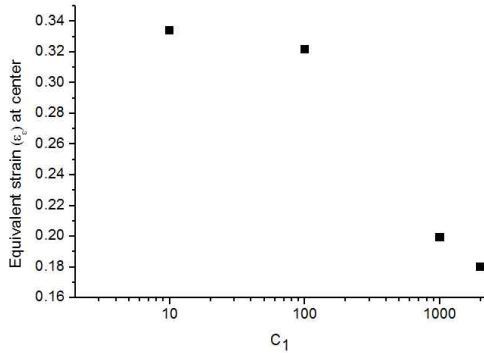


Fig. 4 Variation of equivalent plastic strain at center of work piece with C_1

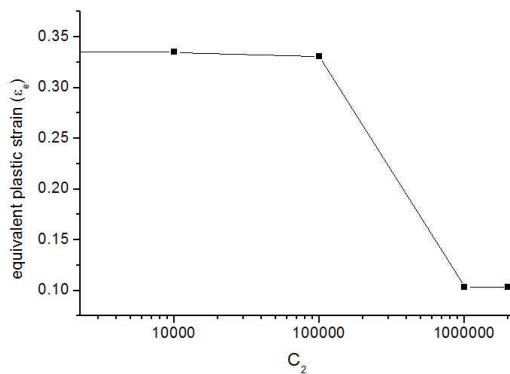


Fig. 5 Variation of equivalent plastic strain at center of work piece with C_2

2차 편미분항의 계수 C_1 에 대한 등가 소성변형 (ϵ_e^p)의 물체 내에서의 분포와 계수의 증가에 따른 물체 중심에서의 변화를 보여주며 여기서 본 계수가 증가할수록 전단밴드의 정도가 감소하는 것을 알 수 있다.

마찬가지로 등방경화 항복응력항의 2차 편미분항의 계수 C_2 ($\hat{\sigma}_y = \sigma_y + R + C_2 R_{,kk}$)에 대한 등

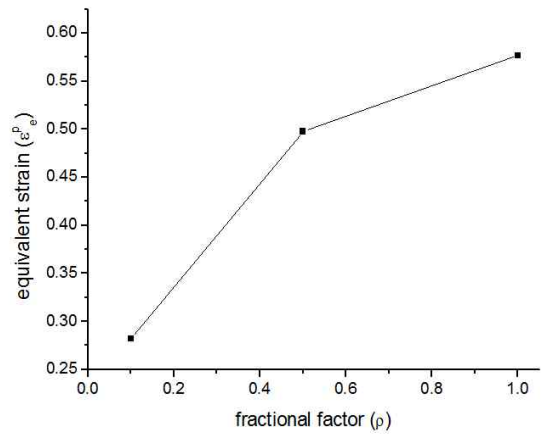


Fig. 6 Effect of fractional factor ρ : plastic strain at center of workpiece

가 소성변형 변화는 Fig. 5에서 보는 바와 같다.

다음으로는 복합재 I에 대해서 이중 이동경화 응력 전개식에서의 혼합분률(ρ)이 증가함에 따라 전단밴드 현상이 두드러짐이 관찰되며 Armstrong-Frederick 이동경화의 영향이 증가할수록 소성변형 집중 현상이 심화되는 것은 앞서 제시된 Rice 소성 불안정성 분석을 통해서 예측된 바와 일치한다.

4. 결론

본 연구에서는 2개의 상으로 구성된 입자 강화 복합재에 대하여 내부상태 변수의 2차 기울기(혹은 2차 편미분항)를 적용한 비구역적 소성변형 구성 방정식을 제안하였다. 아울러 결함인자를 내부상태 변수로 간주하는 연속체 결함 모델에 의한 소성변형 집중 가속화에 대한 분석도 포함되었다.

또한 두 개의 상이한 이동경화 전개식을 조합하여 이중 이동경화식을 적용하였다. 이를 이용, 탄성 계재물과 탄소성 매트릭스로 구성된 복합재 I과 탄소성 계재물과 탄소성 매트릭스로 구성된 복합재 II에 대한 소성변형 구성 방정식이 유도되었다. 일부 제어 변수를 이용한 소성변형 수치해석 결과, 복합재 I에 대해서는 지배적인 후방응력 전개 및 복합재 II에 계재물 증가에 따른 소성변형 집중현상은 Rice 강소성 불안정성 분석 결과와 정성적으로 일치하는 것이 밝혀졌다.

참고문헌 (References)

(1) Liu, X. and Hu, G., 2005, "A Continuum Micro-mechanical Theory of Overall Plasticity for

- Particulate Composites Including Particle Size Effect," *Int. J. of Plas.*, Vol. 21, pp. 777~799.
- (2) Li, J. and Weng, G. J., 1998, "A Unified Approach from Elasticity to Viscoelasticity to Viscoplasticity of Particle-Reinforced Solids," *Int. J. Plas.* Vol. 14, No. 1-3, pp. 193~208.
- (3) Coulibaly, M. and Sabar, H., 2011, "New Integral Formulation and Self-Consistent Modeling of Elastic-Viscoplastic Heterogeneous Materials," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 48, pp. 753~763.
- (4) Bardella, L., 2003, "An Extension of the Secant Method for the Homogenization of the Nonlinear Behavior of Composite Materials," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 41, pp. 741~768.
- (5) Pierard, O., Gonzalez, C., Segurado, J., Llorca, J. and Doghri, I., 2007 "Micromechanics of Elasto-Plastic Materials Reinforced with Ellipsoidal Inclusions," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 44, pp. 6945~6962.
- (6) Shen, L. and Yi, S., 2001, "An Effective Inclusion Model for Effective Moduli of Heterogeneous Materials with Ellipsoidal Inhomogeneities," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 38 pp. 5789~5805.
- (7) Xun, F., Hu, G. and Huang, Z., 2004, "Size-Dependence of Overall In-Plane Plasticity for Fiber Composites," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 41, pp. 4713~4730.
- (8) Mercier, S. and Molinari, A., 2009, "Homogenization of Elastic-Viscoplastic Heterogeneous Materials: Self-Consistent and Mori-Tanaka Schemes," *Int. J. Plas.*, Vol. 25, pp. 1024~1048.
- (9) Mori, T. and Tanaka, K., 1973, "Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions," *Acta Metal.*, Vol. 21, May, pp. 571~574.
- (10) Sabar, H., Berveiller, M., Favier, V. and Berbenni, S., 2002, "A New Class of Micro-Macro Models for Elastic-Viscoplastic Heterogeneous Materials," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 39, pp. 3257~3276.
- (11) Mercier, S., Jacques, N. and Molinari, A., 2005, "Validation of an Interaction Law for the Eshelby Inclusion Problem in Elasto-Viscoplasticity," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 42, pp. 1923~1941.
- (12) Pensee, V. and He, Q.-C., 2007, "Generalized Self-Consistent Estimation of the Apparent Isotropic Elastic Moduli and Minimum Representative Volume Element Size of Heterogeneous Media," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 44, pp. 2225~2243.
- (13) Ramtani, S., Bui, H. Q. and Dirras, G., 2009, "A Revisited Generalized Self-Consistent Polycrystal Model Following an Incremental Small Strain Formulation and Including Grain-Size Distribution Effect," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 47, pp. 537~553.
- (14) Berbenni, S., Favier, V. and Berveiller, M., 2007, "Impact of the Grain Size Distribution on the Yield Stress of Heterogeneous Materials," *Int. J. Plas.* Vol. 23, pp. 114~142.
- (15) Ponte Castaneda P., 1991, "The Effective Mechanical Properties of Nonlinear Isotropic Composites," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 39. No. 1, pp. 45~71.
- (16) Hutter, G., Linse, T., Muhlich, U. and Kuna, M., 2013, "Simulation of Ductile Crack Initiation and Propagation by Means of a Non-Local Gurson-Model," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 50, pp 662~671.
- (17) Aravas, N. and Ponte Castaneda P., 2004, "Numerical Methods for Porous Metals with Deformation-Induced Anisotropy," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 193, pp. 3767~3805.
- (18) Xu, F., Sofronis, P., Aravas, N. and Meyer, S., 2007, "Constitutive Modeling of Porous Viscoelastic Materials," *European J. Mech. A/Solids*, Vol. 26, pp. 936~955.
- (19) Tohgo, K. and Itoh, T., 2005, "Elastic and Elastic-Plastic Singular Fields Around a Crack-Tip in Particulate-Reinforced Composites with Progressive Debonding Damage," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 42, pp. 6566~6585.
- (20) Li, C. and Ellyin, F., 2000, "A Mesomechanical Approach to Inhomogeneous Particulate Composite Undergoing Localized Damage: Part II Theory And Application," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 37, pp. 1389~1401.
- (21) Voyiadjis, G. Z. and Thiagarajan, G., 1997, "Micro and Macro Anisotropic Cyclic Damage-Plasticity Models for MMCS," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 35, No. 5, pp. 467~184.
- (22) Voyiadjis, G. Z. and Park, T., 1995, "Local and Interfacial Damage Analysis of Metal Matrix

- Composite," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 33, No. 11, pp. 1595~1621.
- (23) Voyiadjis, G. Z. and Deliktas, B., 2009, "Mechanics of Strain Gradient Plasticity with Particular Reference to Decomposition of the State Variables into Energetic and Dissipative Components," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 47, pp. 1405~1423.
- (24) Ganghoffer, J. F. and de Borst, R., 2000, "A New Framework in Nonlocal Mechanics," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 38, pp. 453~486.
- (25) Makowski, J., Stumpf, H. and Hackl, K., 2006, "The Fundamental Role of Nonlocal and Local Balance Laws of Material Forces in Finite Elastoplasticity and Damage Mechanics," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 43, pp. 3940~3959.
- (26) Buryachenko, V. A., 2011, "On Thermoelastostatics of Composites with Nonlocal Properties of Constituents I. General Representation for Effective Material and Field Parameters," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 48, pp. 1818~1828.
- (27) Polizzotto, C., Fuschi, P. and Pisano, A. A., 2004, "A Strain-Difference-Based Nonlocal Elasticity Model," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 41, 2383~2401
- (28) Chung, P. W. and Namburu, R. R., 2003, "On a Formulation for a Multiscale Atomistic-Continuum Homogenization Method," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 40, pp. 2563~2588.
- (29) Stromberg, L., 2008, "A Special Case of Equivalence Between Nonlocal Plasticity and Gradient Plasticity in a One-Dimensional Formulation," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 46, pp. 835~841.
- (30) Jirasek, M. and Rolshoven, S., 2003, "Comparison of Integral-Type Nonlocal Plasticity Models for Strain-Softening Materials," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 41, pp. 1553~1602.
- (31) Voyiadjis, G. Z. and Park, T., 1999, "Kinematics Description of Damage for Finite Strain Plasticity," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 56, Nos 4, pp. 483~511.
- (32) Bonora, N., 1997, "A Nonlinear CDM Model for Ductile Failure," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 58 (1/2): pp. 11~28.
- (33) Engelen, R. A. B., Geers, M. G. D. and Baaijen, F. P. T., 2003, "Nonlocal Implicit Gradient-Enhanced Elasto-Plasticity for the Modelling of Softening Behavior," *Int. J. of Plas.*, Vol. 19, pp. 403~433.
- (34) Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D. and Brekelmans, W. A. M., 2004, "Multi-Scale Second-Order Computational Homogenization of Multi-Phase Materials: A Nested Finite Element Solution Strategy," *Compt. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193, pp. 5525~5550.
- (35) Aifantis, E. C., 1992, "On the Role of Gradients in the Localization of Deformation and Fracture," *Int. J. Engr. Sci.*, Vol. 30, pp. 1279~1299.
- (36) Voyiadjis, G. Z., Al-Rub, R. A. and Palazotto, A. N., 2004, "Thermodynamic Framework for Coupling of Anisotropic Viscodamage for Dynamic Localization Problems Using Gradient Theory," *Int. J. Plast.*, Vol. 20, pp. 981~1038.
- (37) Mroz, Z., Shrivastava, H. P. and Dubey, R. N., 1976, "A Non-Linear Hardening Model and Its Application to Cyclic Loading," *Acta Mech.*, Vol. 25, pp. 51~61.
- (38) Phillips, A., Tang, J. L. and Ricciuti, M., 1974, "Some New Observation on Yield Surfaces," *Acta Mech*, Vol. 20 pp. 23~39.
- (39) Lee, E. H., 1969, "Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains," *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, pp. 1~6.
- (40) Prawoto, Y., 2012, "How to Compute Plastic Zones of Heterogeneous Materials: A Simple Approach Using Classical Continuum and Fracture Mechanics," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 49, pp. 2195~2201.
- (41) Hui, T. and Oskay, C., 2013, "A Nonlocal Homogenization Model for Wave Dispersion in Dissipative Composite Materials," *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 50, pp. 38~48.