한국시뮬레이션학회 논문지
Vol. 23, No. 3, pp. 11-17 (2014. 9)
http://dx.doi.org/10.9709/JKSS.2014.23.3.011
ISSN 1225-5904

중심합성계획 시뮬레이션 실험에서 공통난수의 활용

권치명[1†]

Application of Common Random Numbers in Simulation Experiments Using Central Composite Design

Chi-Myung Kwon

ABSTRACT

The central composite design (CCD) is often used to estimate the second-order linear model. This paper uses a correlation induction strategy of common random numbers (CRN) in simulation experiment and utilizes the induced correlations to obtain better estimates for the second-order linear model. This strategy assigns the CRN to all design points in the CCD. An appropriate selection of the axial points in CCD makes the weighted least squares (WLS) estimator be equivalent to ordinary least squares (OLS) estimator in estimating the linear model parameters of CCD. We analytically investigate the efficiency of this strategy in estimation of model parameters. Under certain conditions, this correlation induction strategy yields better results than independent random number strategy in estimating model parameters except intercept. The simulation experiment on a selected model supports such results. We expect a suggested random number assignment is useful in application of CCD in simulation experiments.

Key words : Correlation Induction Strategy, Central Composite Design, Common Random Number, Efficiency of Estimator

요 약

중심합성계획(CCD)은 2차 선형 모형을 추정하기 위해서 자주 활용된다. 본 연구는 CCD를 활용하는 시뮬레이션 실험에서 공통난수(CRN) 상관유도전략을 사용하여 모형의 파라미터를 효율적으로 추정하고자 한다. CCD의 축점을 적절히 선택하면 모든 표본점에 공통난수를 할당하는 전략으로 얻은 파라미터의 가중최소자승(WLS) 추정량은 정규최소자승(OLS) 추정량과 일치한다. 본 연구는 선형모형의 파라미터를 추정하는 공통난수 상관유도전략이 파라미터 추정 효율성 측면에서 독립 난수 할당전략보다 우수함을 계량적으로 분석하였다. 2차 선형모형에서 상수항을 제외한 나머지 파라미터를 추정하는데 있어서 공통난수 상관유도전략이 우수하며 시뮬레이션 결과도 이러한 분석을 지지하고 있다. 제안된 난수 할당전략이 CCD 시뮬레이션 실험에서 유용하게 활용될 수 있을 것으로 기대한다.

주요어 : 상관유도전략, 중심합성계획, 공통난수, 추정 효율성

1. 서 론

시뮬레이션 실험에서 종종 관심 반응변수(response)는 설계변수(design variable)의 선택된 수준에서 2차 선형식으로 표현된다. 예를 들어 (s, S) 재고관리 시스템에서 단위 기간의 평균 재고비용은 s와 S의 표본공간에서 2차식 형태로 나타난다(Kwon, 2003). 설계변수의 수준 변화에 따른 반응변수 곡면(response surface)의 형태를 추정하려면 많은 수의 표본점에서 시뮬레이션을 수행하여야 한다. 이러한 단점을 보완하고 적은 횟수의 실험으로 반응변수 곡면을 추정하기 위한 실험 설계 방법으로 중심합성계획(central composite design: CCD)이 자주 활용 된다(Myers, 1991). p개의 설계변수에서 선택된 두 수준에서

* 이 논문은 동아대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.
접수일(2014년 7월 16일), 심사일(2014년 8월 20일), 게재 확정일(2014년 8월 20일)
[1)] 동아대학교 경영정보학과
주 저 자 : 권치명
교신저자 : 권치명
E-mail; cmkwon@dau.ac.kr

만 실험을 수행하는 2^p 요인 실험으로는 설계변수의 수준 변화에 따라서 발생하는 반응변수의 곡면적인 변화를 감지할 수 없으므로 2차 선형식의 2차 항 계수를 추정하기 위해 2^p개의 요인 점(factor points)에 적절한 수의 중심점(central points)과 $2p$개의 축점(axial points)을 추가시킨 실험계획이 CCD이다(Box and Draper, 1987). 시뮬레이션 분야에서 CCD에 대한 연구는 큰 주목을 받지 못하였는데 본 연구에서는 반응변수가 설계변수의 2차식 모형으로 표현되는 경우 CCD를 활용하여 모형의 파라미터를 효율적으로 추정하는 방법을 다루고자 한다.

시뮬레이션 실험에서 반응변수가 설계변수의 1차식 모형으로 표현되는 경우에 Schruben and Margolin(1978)은 파라미터의 추정을 보다 정확히 할 수 있는 분산감소기법(variance reduction technique)을 제안하였다. 이들은 설계행렬(design matrix)의 전체 표본점(design points)을 2개의 블록으로 나누어 공통 난수(common random numbers: CRN)는 첫 번째 블록에 속하는 표본점에 그리고 두 번째 블록에 속하는 표본점에는 대조 난수(antithetic variates: AV)를 할당하는 상관유도전략(correlation induction strategy)을 사용하여 선형 1차식모형의 파라미터를 효율적으로 추정하였다. 이 방법을 적용하기 위해서는 설계변수의 표본점으로 구성된 설계행렬 X가 2개의 직교 블록으로 나누어 질 수 있어야 한다. 그러나 반응변수의 2차 선형모형에서 설계행렬은 일반적으로 2개의 직교 블록으로 나눌 수 없어 직접적으로 Schruben and Margoin(1978)의 상관유도전략을 사용하기 어렵다(Tew, 1996). Tew(1996)는 설계행렬의 모든 표본점에서 반응변수 사이에 음의 상관관계를 유도하는 AV을 사용하고 서로 다른 반복 수행(replicate)을 통하여 시뮬레이션을 수행하는 방안을 시뮬레이션 실험설계에서 제안하였다. 이 방법은 독립 난수 계열(independent random number streams)을 사용하여 2차식 모형의 파라미터 추정하는 경우보다 효과적인 것으로 나타났다.

이 연구에서는 Tew(1996)의 난수 할당전략과 다르게 CCD를 활용하는 2차 선형모형의 파라미터 추정에서 각 표본점에서 1회의 시뮬레이션 수행을 통하여 설계행렬의 표본점에 공통난수(CRN)를 사용하는 난수 할당전략(random number assignment strategy)을 제안한다. Tew(1996)는 각 표본점에서 반응변수의 변이를 줄이기 위해서 반복 수행에서 AV 기법을 사용하였는데 Tew(1996)의 방법보다 공통난수 할당 전략은 1회의 시뮬레이션 수행과 동일한 공통난수를 모든 표본점에 할당하는 측면에서 훨씬 편리하게 적용할 수 있는 장점이 있다. 본 연구는 CCD의 설계행렬 X의 요인점에 축점과 중심점(center point)을 추가하여 CRN 상관유도전략을 활용하는 방법을 제안하고자 한다. CCD에서 이러한 상관유도전략이 2차 선형모형의 파라미터 추정에 유효한지를 이론적으로 분석하고 파라미터 추정의 효율성을 (s, S) 재고관리 시뮬레이션 모형을 통하여 평가하고자 한다.

2. CCD 시뮬레이션 실험설계

2.1 2차 선형 모형

시뮬레이션 실험설계에서 설계행렬 X는 m개의 표본점으로 구성되어 있으며 각 표본점은 p개의 설계변수로 정의되고 표본점 $i\,(i=1,2,...,m)$에서 반응변수 y_i와 설계변수 $x_{ij}\,(j=1,2,..,p)$의 관계는 2차 선형 모형을 가정한다. 표본점의 변화에 따른 반응변수의 곡면을 추정하려면 p개의 설계변수 각각에 대하여 적어도 3개 수준에서 시뮬레이션을 수행하여야 하는데 이를 위해 CCD는 설계변수의 관심 영역내의 특정 값을 중심으로 균등 간격으로 위치한 3개의 수준을 선택한다(3개의 수준은 각각 -1, 0, 1로 코드화). 표본점 i에서 반응변수 y_i와 p개의 설계변수 x_{ij} 사이의 2차 선형 관계식은 다음과 같이 나타난다.

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{p}\beta_{jj}x_{jj}^2 + \sum_{j<k}\beta_{jk}x_{ij}x_{ik} + \epsilon_i \quad (1)$$

여기서 β_0는 상수항, β_j는 1차 항, β_{jj}는 순수 2차 항, $\beta_{jk}(j,k=1,2,..,p;\,j<k)$는 혼합 2차 항의 계수이며 ϵ_i는 오차 항이다. 식 (1)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$y = X\beta + \epsilon \quad (2)$$

여기서 $y=(y_1, y_2, ..., y_m)'$는 m개의 표본점에서 관측된 반응변수 벡터이며, 설계행렬 X의 i 번째 행벡터는 $(1, x_{i1}, ..., x_{ip}, x_{i1}^2, ..., x_{ip}^2, x_{i1}x_{i2}, ..., x_{ip-1}x_{ip})$이며 β와 ϵ은 계수벡터와 오차벡터를 각각 나타낸다. 대부분의 시뮬레이션 연구에서와 같이 본 연구에서도 반응변수는 m-variate 정규분포를 따르는 것으로 가정한다.

$$y \sim N_m(X\beta, \Sigma) \quad (3)$$

여기서 Σ는 y의 공분산행렬이다.

2.2 중심합성계획

2차 선형모형 식 (1)의 계수 파라미터를 추정하기 위해 CCD를 적용하면 전체 표본점 m 은 각 설계변수의 수준이 -1과 1로 코드화된 2^p 개의 요인점, 수준이 $\alpha, -\alpha$ 인 $2p$ 개의 축점 그리고 c 개의 중심점으로 구성된다. 즉 전체 표본점 수는 $m = 2^p + 2p + c$ 이다. 예를 들어 $p=2$ 이고 $c=2$ 인 경우 전체 표본점 수는 10이며 설계행렬 X 는 다음과 같다.

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_{11} & \beta_{22} & \beta_{12} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4}$$

여기서 α 는 축점의 코드화 수준이다. CCD에서 4개의 요인점은 1차 항의 계수 β_1, β_2 와 2요인 상호작용 β_{12} 을 추정하기 위해 선택하였으며 4개의 축점과 2개의 중심점은 2차 항과 오차 항을 추정하기 위해 선택하였다(CCD에 대한 자세한 내용은 Box et al.(1987)과 Myers(1991)을 참고하기 바란다).

식 (4)에서 설계행렬 X 의 열벡터들은 순수 2차 항을 제외하고는 직교하고 있다. CCD에서 요인점의 수는 $F = 2^p$ 이며 축점과 중심점 수의 합은 $T = 2p + c$ 이다. 따라서 순수 2 차 항의 열 평균은 $d = (F + 2\alpha^2)/(F+T)$ 이다. 예를 들어 $p=2$ 인 경우 순수 2차 항의 열 평균(column mean), d 로 중심화하면 설계행렬 X 는 식 (5)와 같다.

$$X = \begin{array}{c} \begin{matrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_{11} & \beta_{22} & \beta_{12} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1-d & 1-d & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-d & 1-d & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-d & 1-d & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1-d & 1-d & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -d & -d & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \alpha^2-d & -d & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & \alpha^2-d & -d & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & -d & \alpha^2-d & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & -d & \alpha^2-d & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -d & -d & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{5}$$

위의 식에서 α 값을 적절히 다음과 같이 선택하면

Table 1. Values of α for Orthogonal CCD

Number of Factors(p)	α
2	1.000
3	1.216
4	1.414
5	1.596
6	1.761
7	1.910
8	2.045

$$\begin{aligned} &\alpha = (QF/4)^{1/4} \\ &(\text{단 } Q = [(F+T)^{1/2} - F^{1/2}]^2) \end{aligned} \tag{6}$$

CCD 설계행렬 X 는 직교한다(Myers, 1991). Table 1은 식 (6)으로부터 2^p 개의 요인점, $2p$ 개의 축점과 1개의 중심점을 가지는 CCD에서 직교 CCD를 위한 α 값을 나타낸다.

식 (5)와 같은 설계행렬에서 중심점의 수를 1로 정하고 $\alpha = 1.0$ 으로 설정하면 $(X'X)$ 는 대각선 행렬이 되어 파라미터 추정량의 분산을 쉽게 얻을 수 있다(Myers, 1991). 순수 2차 항을 열 평균 d 로 중심화하면 식 (1)의 선형모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{jj} (x_{jj}^2 - d) \\ + \sum_{j<k} \beta_{jk} x_{ij} x_{ik} + \epsilon_i \end{aligned} \tag{7}$$

3. 상관유도전략

컴퓨터 시뮬레이션에서 임의의 표본점에서의 반응변수는 모형의 확률적인 요소를 재현하는 난수 집합에 의하여 결정되며 난수 집합은 실험자가 선택할 수 있다. 만일 시뮬레이션 모형이 h 개의 확률적인 요소를 포함하고 있으면 h 개의 난수 계열(random number stream), $r_g (g = 1, \cdots, h)$ 이 시뮬레이션 수행에 사용된다. 즉 임의의 표본점에서 시뮬레이션 수행을 위해 사용된 난수 집합 $R = (r_1, r_2, \cdots, r_h)$ 은 시뮬레이션 출력 값을 완전히 결정하게 된다.

임의의 두 표본점에서 독립 난수 계열(independent random number streams: IRN)을 선택하여 시뮬레이션 런을 수행하면 두 표본점의 반응변수는 서로 독립적으로 상관관계는 0인 것으로 가정한다. 서로 다른 두 표본점에

CRN, 즉 동일한 난수 집합 R을 사용하여 시뮬레이션을 수행하면 두 표본점에 대응하는 반응변수의 값은 양의 선형상관관계를 나타내는 것으로 알려져 있으며 상관계수의 크기 ρ는 임의의 두 표본점에서의 반응변수 사이에 비슷한 수준으로 발생한다고 가정하더라도 별 무리가 없는 것으로 알려져 있다(Kwon and Tew, 1991). 위의 가정과 경험적 결과를 바탕으로 난수 할당 전략에 따라 실현되는 두 표본점에서의 반응변수의 상관관계는 다음과 같은 가정으로 설정해 볼 수 있다.

가정 1: 모든 표본점에서 반응변수 분산의 동질성
$Var(y_i) = \sigma^2$ for $i = 1, 2, \cdots, m$

가정 2: 서로 다른 두 표본점에서 반응변수의 상관관계 동질성

$$Cov(y_i, y_j) = \begin{cases} 0; & IRN \text{ 사용} \\ \rho\sigma^2(>0); & CRN \text{ 사용} \end{cases}$$

공통난수 계열, R을 CCD의 모든 표본점 m개에 할당하는 상관유도전략을 사용하면 가정 1에 의하여 반응변수 벡터 y의 공분산행렬 $Cov(y)$의 모든 대각선 원소는 σ^2이며 가정 2에 의하여 $Cov(y)$ 행렬의 비 대각선 원소, 즉 서로 다른 두 표본점에서의 공분산은 $\rho\sigma^2$가 된다. 따라서 모든 표본점에서 얻어지는 반응변수의 공분산행렬은 다음과 같은 대칭 행렬 형태를 가진다.

$$Cov(y) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho & \rho & \cdots & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \vdots & \rho & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 & \rho & \cdots & \cdots & \rho \\ \rho & \rho & \cdots & \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & \rho & \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

4. 파라미터 추정

4.1 파라미터 추정량과 분산

식 (8)과 같은 반응변수의 $Cov(y)$을 행렬 형태로 표현하기 위해서 먼저 차원이 설계행렬 X의 열수와 같은 정방행렬 $G = (1, 0, \cdots, 0)'(1, 0, \cdots, 0)$을 정의하면 식 (5)의 $Cov(y)$는 다음과 같은 행렬식 형태로 표현할 수 있다.

$$Cov(y) = \sigma^2[\rho XGX' + (1-\rho)I] \tag{9}$$

Rao(1967)와 Watson(1967)에 의하면 식 (2)에서 파라미터 β의 가중최소자승(weight least squares: WLS) 추정량이 정규최소자승(ordinary least squares: OLS) 추정량과 일치하는 충분조건은 반응변수의 공분산행렬이 다음과 같은 형태로 표현되어야 하는 것이다.

$$Cov(y) = XHX' + w'\theta w + \gamma^2 I \tag{10}$$

위의 식에서 차원이 m인 열벡터 w는 $w'X = 0$이 되어야 하며 차원이 설계행렬 X의 열수와 같은 정방행렬 H는 임의의 행렬이다. 그리고 θ와 γ^2는 임의의 값을 가지는 상수이다. 만일 벡터 w을 $w = (0, 0, \cdots, 0)'$로 정의하면 항상 $w'X = 0$이 된다. 또한 $H = \rho\sigma^2 G$와 $\gamma^2 = (1-\rho)\sigma^2$로 정의하면 식 (9)는 식 (10)과 같아진다.

따라서 식 (7)의 2차 선형모형에 대한 시뮬레이션 런에서 모든 표본점에 CRN을 사용하여 얻어진 반응변수의 공분산행렬은 식 (9)와 같으며 모형 (7)의 파라미터 벡터 β의 WLS 추정량은 OLS추정량과 일치한다. CRN 상관유도전략으로 구한 식 (7)의 파라미터 벡터 β의 OLS 추정량, $\hat{\beta}_{crn}$와 추정량의 공분산행렬은 다음과 같다(Myers, 1990).

$$\hat{\beta}_{crn} = (X'X)^{-1}Xy \tag{11}$$

$$Cov(\hat{\beta}_{crn}) = (X'X)^{-1}X'Cov(y)X(X'X)^{-1} \tag{12}$$

위의 식 (12)에 식 (9)의 $Cov(y)$을 대입하면 $Cov(\hat{\beta}_{crn})$은 다음과 같다.

$$Cov(\hat{\beta}_{crn}) = \sigma^2(1-\rho)(X'X)^{-1} + \rho\sigma^2 G \tag{13}$$

4.2 파라미터 추정량의 효율성

식 (2)의 선형모형에서 파라미터 벡터 β를 추정하는 방법의 효율성을 평가하는 기준으로 추정량의 분산, $Cov(\hat{\beta})$의 행렬식과 $Cov(\hat{\beta})$의 Trace가 자주 사용된다(Box and Draper, 1987). 본 연구에서는 모든 표본점의 시뮬레이션 수행에 CRN을 사용하는 상관유도전략이 파라미터 추정에 얼마나 효과적인 가를 조사하기 위해 독립적인 난수 IRN에 의해 얻어진 파라미터 추정량 $\hat{\beta}_{ind}$과 CRN 상관유

도전략으로 구한 파라미터 추정량 $\hat{\beta}_{crn}$의 효율성을 위의 3가지 기준으로 비교 평가하고자 한다. 설계행렬의 모든 표본점에 독립 난수로 시뮬레이션을 수행하게 되면 제 3절의 가정 1과 2로부터 반응변수 y의 분산은 $Cov(y)=\sigma^2 I$이며 식 (7)의 파라미터 β의 OLS 추정량과 그 분산은 다음과 같다(Myers, 1990).

$$\hat{\beta}_{ind}=(X'X)^{-1}Xy;\ Cov(\hat{\beta}_{ind})=\sigma^2(X'X)^{-1} \quad (14)$$

독립 난수 전략과 CRN 상관유도전략에 따라 구한 파라미터 $\hat{\beta}=(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots)$의 분산은 각각 식 (13)과 식 (14)의 대각선 원소와 일치한다. 식 (13)에서 행렬 G는 첫 번째 행과 첫 번째 열이 1이며 나머지 모든 원소가 0인 행렬이다(식 (9) 참조). 그리고 제 3절의 가정 2로부터 $\rho>0$이므로 $\hat{\beta}_0$를 제외한 나머지 파라미터를 추정하는 부분에 있어서 독립 난수 할당전략과 CRN 상관유도전략에 따른 파라미터 추정량의 분산은 다음과 같은 관계를 나타낸다.

$$Var(\hat{\beta}_l)_{crn} \le\ Var(\hat{\beta}_l)_{ind}\ \text{for}\ l\ne 0 \quad (15)$$

따라서 $\hat{\beta}_l\,(l\ne 0)$)의 추정에는 CRN 상관유도전략이 독립 난수 할당전략보다 추정량의 분산 측도 측면에서 우수하다. 반면 $\hat{\beta}_0$의 추정에 있어서는 ρ의 값에 따라 효율성이 달라지는데 독립 난수 할당전략에 비하여 CRN 상관유도전략은 추정량 $\hat{\beta}_0$의 분산을 증가시킬 수 있다. 여기서 $(X'X)^{-1}_{11}$을 $(X'X)^{-1}$ 행렬의 첫 번째 행과 첫 번째 열의 원소라 하면 두 가지 전략에 따른 $\hat{\beta}_0$의 분산은 다음과 같다.

$$Var(\hat{\beta}_0)_{ind}=\sigma^2(X'X)^{-1}_{11} \quad (16)$$

$$Var(\hat{\beta}_0)_{crn}=(1-\rho)\sigma^2(X'X)^{-1}_{11}+\rho\sigma^2 \quad (17)$$

식 (7)에서 CCD 설계행렬 X을 직교행렬로 선택하면 $(X'X)^{-1}_{11}=1/m$이다(Myers, 1991). CRN 상관유도전략과 독립 난수 할당전략으로 구한 $\hat{\beta}_0$ 추정량의 분산을 비교하면 식 (16)과 (17)으로부터

$$\begin{aligned} &Var(\hat{\beta}_0)_{crn}-Var(\hat{\beta}_0)_{ind} \\ &\quad=(1-\rho)\sigma^2(X'X)^{-1}_{11}+\rho\sigma^2-\sigma^2(X'X)^{-1}_{11} \\ &\quad=[(m-1)/m]\rho\sigma^2\ \ge\ 0 \end{aligned} \quad (18)$$

이므로 다음과 같은 관계를 가진다.

$$Var(\hat{\beta}_0)_{ind}\ \le\ Var(\hat{\beta}_0)_{crn} \quad (19)$$

이러한 관계는 식 (17)에서 첫 번째 항의 분산 감소량이 두 번째 항의 분산 증가분을 보상할 수 없기 때문에 나타나는 것으로 β_0의 추정에 있어서 CRN 상관유도전략이 독립 난수 할당전략보다 비효율적이다.

전체적으로 보면 2차 선형 모형의 계수 추정에 있어서 1차 항, 순수 2차 항과 혼합 2차 항의 계수 추정에 있어서는 CRN 상관유도전략이 독립 난수 할당전략보다 우수하며 상수항을 추정하는 데는 독립 난수 할당전략이 CRN 상관유도전략보다 우수하다고 볼 수 있다. 보통 실험계획법에서는 상수항보다는 설계 변수 요인이 반응변수에 미치는 영향과 이들 사이의 관계를 규명하는 것이 활용 측면에서 중요하므로 이러한 결과는 의미가 있다고 판단된다.

식 (13)과 (14)에서 β 추정량의 공분산행렬에 대하여 행렬식과 Trace를 구할 수 있으나 계산과정이 복잡하여 계량적으로 효율성 평가 기준을 비교하는 대신 시뮬레이션을 통하여 CRN 상관유도전략의 효율성을 조사하고자 한다.

5. 시뮬레이션 실험

5.1 시뮬레이션 모형

CRN 상관유도전략의 파라미터 추정 효율성을 평가하기 위해 (s, S) 재고관리 시스템을 대상으로 시뮬레이션을 수행하고자 한다. (s, S) 재고관리 시스템은 재고를 조사하는 시점의 재고수준이 s보다 적으면 주문량 S만큼 주문하는 시스템이다. 재고관리모형은 1 종류의 제품만을 고려하며 제품의 수요는 독립적으로 발생하고 재고 부족분에 대해서는 모두 추후인도(backlogging) 하는 것으로 가정한다. 수요의 발생 간격은 평균이 0.1인 지수분포를 따르며 수요량은 IID 확률변수로 그 분포는 Table 2와 같다.

편의상 시뮬레이션 시작 시점에서 재고수준은 S이며 재고수준을 파악하는 재고조사의 주기(cycle)는 1 단위 시간과 2단위 시간을 CCD의 요인점으로 설정하였다. 수요가 발생할 때 재고수준이 주문량보다 크거나 같으면 즉

Table 2. Distribution of Demand Size

Demand	1	2	3	4
Probability	0.2	0.3	0.3	0.2

시 수요를 처리하고 수요를 충족시키지 못하는 수요 부족량은 추후인도 하는 것으로 가정하였다. 총 재고관리비용은 주문비용, 재고비용과 재고부족비용(shortage cost)으로 구성되며 주문비용은 주문 당 $32이며 단위 기간의 제품 단위 당 재고비용과 재고부족비용은 각각 $1와 $5이다. 주문을 한 후 제품이 인도될 때까지의 제품인도기간은 일양분포 U(0.5, 1)을 따르는 것으로 가정하였다(Law and Kelton, 2000, Chapter 12 참조).

(s, S) 재고관리 시스템에서 s와 S 그리고 재고 조사주기(cycle)를 결정하는 재고관리 전략을 평가하기 위해 단위 기간 당 평균 재고관리비용(반응변수)는 식 (1)에서와 같이 2차 선형모형으로 근사적으로 나타나는 것으로 가정하였으며 반응변수의 2차 선형모형을 CCD를 사용하여 추정하고자 한다. CCD에서 순수 2차 항은 식 (7)에서와 같이 열 평균으로 중심화 하였다.

5.2 상관유도전략에 따른 난수계열 할당

Table 3은 시뮬레이션 실험에 사용된 CCD의 15개 표본점에서 요인 s와 S 그리고 Cycle의 수준조합과 수준을 코드화한 값(괄호 내의 값)을 나타낸다. CCD는 8개의 요인점과 6개의 축점 그리고 1개의 중심점으로 구성되어 있다. 재고관리모형은 (1)수요의 크기 , (2)수요 발생 사이의 시간 및 (3) 제품인도기간, 3개의 확률적인 요소를 포함하고 있다. CRN 상관유도전략은 모든 표본점에서 동일한 난수계열 $R=(r_1, r_2, r_3)$을 사용하여 시뮬레이션 런을 수행하였다.

5.3 시뮬레이션 결과

시뮬레이션 언어 AweSim(Pritsker and O'Reilly, 2001)을 이용하여 1200단위 시간 동안 시뮬레이션 런을 수행하였다. 초기 재고수준은 각 표본점에서 S이다. Table 4는 독립 난수 전략(IRN)과 상관유도전략(CRN) 으로부터 구한 파라미터 추정치를 나타내고 있으며 Table 5는 추정치의 분산 및 공분산행렬의 행렬식과 Trace 그리고 IRN에 대한 CRN의 분산감소비율(%)을 나타낸다.

Table 5의 시뮬레이션 결과에서 CRN 상관유도전략이 선형모형의 1차식과 2차식의 파라미터를 추정하는데 독립 난수 할당전략보다 우수함을 알 수 있다. 1차식과 2차식 파라미터 추정량의 분산감소 비율은 11%-14% 정도로 나타나고 있다. 그러나 선형 2차식의 상수항 파라미터, β_0의 추정에 있어서는 CRN 상관유도전략이 독립 난수 할당전략보다 추정치의 분산을 대략 13% 정도 증가시키고 있다. 이러한 시뮬레이션 결과는 식 (15)와 (19)에서의 계량적인 분석 결과와 일치하고 있음을 알 수 있다. $Det(Cov(\hat{\beta}))$와 $Trace(Cov(\hat{\beta}))$ 평가 기준에서는 CRN 상관유도전략이 독립적인 난수 할당전략보다 우수한 결과를 보이고 있다.

Table 3. Second Order CCD

Design Point i	Factor Combination		
	S(x_{1i})	s(x_{2i})	Cycle(x_{3i})
1	60(-1)	20(-1)	1(-1)
2	60(-1)	20(-1)	2(+1)
3	60(-1)	40(+1)	1(-1)
4	60(-1)	40(+1)	2(+1)
5	80(+1)	20(-1)	1(-1)
6	80(+1)	20(-1)	2(+1)
7	80(+1)	40(+1)	1(-1)
8	80(+1)	40(+1)	2(+1)
9	70(0)	30(0)	1.5(0)
10	82.16(+α)	30(0)	1.5(0)
11	57.84(-α)	30(0)	1.5(0)
12	70(0)	42.16(+α)	1.5(0)
13	70(0)	17.84(-α)	1.5(0)
14	70(0)	30(0)	2.108(+α)
15	70(0)	30(0)	0.892(-α)

$\alpha = 1.216$

Table 4. Parameter Estimate for β

Estimate	IRN Run	CRN Run
β_0	51.11	51.16
β_1	1.81	1.82
β_2	0.37	0.43
β_3	-0.18	-0.26
β_{11}	-1.82	-1.48
β_{22}	0.52	0.88
β_{33}	2.81	2.45
β_{12}	-0.39	-0.40
β_{13}	1.51	1.50
β_{23}	-4.03	-3.83

Table 5. Performance Measure for Estimator

Performance Measure	IRN Run	CRN Run	Variance Reduction(%)
$Var(\hat{\beta}_0)$	0.996	1.127	13.15(inflation)
$Var(\hat{\beta}_1)$	1.361	1.166	14.33
$Var(\hat{\beta}_2)$	1.361	1.166	14.33
$Var(\hat{\beta}_3)$	1.361	1.166	14.33
$Var(\hat{\beta}_{11})$	2.088	1.846	11.59
$Var(\hat{\beta}_{22})$	2.088	1.846	11.59
$Var(\hat{\beta}_{33})$	2.088	1.846	11.59
$Var(\hat{\beta}_{12})$	1.543	1.364	11.60
$Var(\hat{\beta}_{13})$	1.543	1.364	11.60
$Var(\hat{\beta}_{23})$	1.543	1.364	11.60
$Det(Cov(\hat{\beta}))$	83.97	28.52	-
$Trace(Cov(\hat{\beta}))$	15.97	14.25	-

6. 결론 및 토의

본 연구는 2차 선형 모형의 파라미터를 추정하는 CCD 시뮬레이션 실험계획에서 CRN 상관유도전략을 사용하여 파라미터 추정의 효율성을 제고하였다. CCD의 축점을 적절히 선택하고 순수 2차항을 열 평균으로 중심화하면 설계행렬은 직교행렬이 되며 CRN 상관유도전략을 사용한 시뮬레이션 결과로부터 구한 파라미터의 WLS 추정량은 OLS 추정량과 일치하게 된다.

파라미터 추정 효율성 측면에서 2차 선형모형의 상수항을 제외한 전체 파라미터 추정에 있어서 CRN 상관유도전략이 독립 난수 할당전략보다 우수하며 시뮬레이션 결과도 이러한 분석을 지지하고 있다. 시뮬레이션 실험계획의 목적이 설계변수 요인이 반응변수에 미치는 영향과 이들 사이의 관계를 규명하는 경우 본 연구의 결과는 활용 측면에서 의의가 있다고 사료된다.

References

1. Box, G.E.P. and Draper, N. R., Empirical Model Building and Response Surface, John Wiley & Sons, 1987.
2. Kwon, C. M. and Tew, J. D., "Combining Antithetic and Control Variates in Designed Simulation Experiments", Management Science, Vol. 40, pp. 1021-1034, 1994.
3. Kwon, C. M., "Application of Stochastic Optimization Method to (s, S) Inventory System, J of the Korean Society for Simulation, Vol. 12, No. 2, pp. 1-11, 2003.
4. Law, A. M. and Kelton, D. W., Simulation Modeling and Analysis, MacGraw Hill, 2001.
5. Myer, R. H., Response Surface Methodology, Edward Brothers, Ann Arber, 1991.
6. Myers, R. H., Classical and Modern Regression with Applications. Second Ed. Duxbury Press, 1990.
7. Pritsker, A. A. B. and O'Reilly, J. J., Simulation with Visual SLAM and AweSim, John Wiley & Sons, 1999.
8. Rao, C. R., "Least Squares Theory Using an Estimated Dispersion Matrix and Its Application to Measurement of Signals", Proceedings of the 5th Symposium on Mathematical Statistics and Probability, pp. 69-76, 1967.
9. Schruben, L. W. and Margolin, B. H., "Pseudorandom Number Assignment in Statistically Designed Simulation and Distribution Sampling Experiments", JASA, Vol. 73, pp. 504-525, 1978.
10. Tew, J. D., Using Composite Design in Simulation Experiments, Proceedings of the WSC, pp. 529-537, 1996.
11. Watson, G. S., "Linear Least Squares Regression", Annals of Mathematical Statistics, Vol. 38, pp. 1679-1699, 1967.

권 치 명 (cmkwon@dau.ac.kr)

1978 서울대학교 산업공학과 학사
1981 서울대학교 산업공학과 석사
1991 VPI & SU Dept. of ISE 공학박사
1983～현재 동아대학교 교수

관심분야 : 시스템 모델링, Output Analysis, Simulation Optimization