East Asian Math. J.
Vol. 30 (2014), No. 4, pp. 527-544
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2014.035

대학수학능력시험 등급 수준별 수학진단평가 오류 분석

An Analysis of Errors in the Mathematics Level Assessment Focused on the Level of the College Scholastic Ability Test

손 민 지 · 표 용 수[1]

ABSTRACT. The purpose of this thesis is to analyze mathematical errors in descriptive problems of the Mathematics Level Assessment(MLA) which is conducted in P University.

We classified mathematical errors, which are easily made in solving the descriptive problems of the MLA, into nine types as misused data, misinterpreted language, logically invalid inference, misunderstood theorem or definition, unmatched solution, technical errors, omission of solving process, ambiguous errors, and unattempted errors. With classifying the errors in nine types, we analyzed the errors of students, who are in intermediate and low level grades, by descriptive problems.

On the basis of these analysis results, we suggest plans for improving the implementation of the MLA and the teaching-learning methods about College General Mathematics.[2]

Ⅰ. 서론

수학은 위계성이 높은 학문이므로, 선수학습이 제대로 이루어지지 않을 경우 그 다음의 학습 내용을 제대로 습득하기 어렵다. 또한, 심화·선택형 고등학교 수학과 교육과정 운영과 함께, 다양한 전형방법으로 이루어지는 특별전형 및 교차지원 허용 등의 대입전형제도는 수학 기초학력 저하는 물론, 동일 학급내의 수강학생들 간에 심각한 학력 차를 초래하여 대학 교양수학 교육과정 운영에 상당한 어려움을 주고 있다.

---

1) 교신저자
2014년 7월 30일 투고, 2014년 8월 26일 심사완료.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D40
Keywords : 대학수학능력시험, 수학진단평가, 수학적 오류
* 이 논문은 부경대학교 자율창의학술연구비(2014년)에 의하여 연구되었음

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

이에 따라, 각 대학에서는 교양수학에 대한 흥미를 유발하고 전공교과에 대한 자신감을 부여하기 위하여, 대학 입시제도 개선 및 교양교육과정 변경 등 많은 노력을 기울이고 있다. 실례로, 부산광역시에 소재한 P대학에서는 대학입학예정자를 대상으로 매년 2월 중에 수학진단평가(이하 **진단평가**라 함)를 시행하여 일정 점수를 취득하지 못한 학생과 시험에 응시하지 않은 학생은 수준별 학급을 편성하여 기초수학및연습(2학점, 3시간) 교과목을 미분적분학의 선수과목으로 수강하도록 하고 있다.

본 논문에서는 대학수학능력시험 수학 B형의 성적 등급(이하 **수능고사 등급**이라 함)에 따라 중급 및 하급수준 학생 각각 100명을 연구대상으로 선정하여, 진단평가 서술형 문항 해결과정에서 나타난 수학적 오류를 분석하여 교양수학 학습지도 개선방안과 진단평가 서술형 문항 출제에 대한 유의점에 대해 알아보고자 한다.

본 연구결과를 활용하거나 일반화하는 경우, 다음 제한점이 고려되어야할 것이다.

첫째, 본 논문에서는 수능고사 등급에 따른 중급 및 하급수준 학생 200명에 대한 수학적 오류를 분석하였기 때문에, 교육환경이 다른 타 대학의 자연계열 학생들도 동일한 오류를 범할 것이라고 단정하기에는 어려움이 있다.

둘째, 진단평가 서술형 문항에 대한 수학적 오류만을 분석하였기 때문에, 다른 평가문제에서의 오류는 다르게 분류될 수 있으며, 연구자의 주관적 판단에 의해 오류유형을 분류하였기 때문에 객관성이 결여되었을 수도 있을 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 오류

교육학 용어사전[3]에는 오류를 ‘논리학에 있어서 바르지 못한 논리적 과정, 특히 외견상 바르게 보이면서 틀린 추리’라고 정의하고 있으며, 두산백과[4]에서는 ‘사고의 내용과 대상이 일치하지 않는 사유판단’으로 정의한다. 또한, 철학사전[5]에서는 오류를 ‘허위’ 또는 ‘참이 아닌 것을 참이라 간주하는 것’을 말하며, ‘참이 아닌 것’과 같은 의미로 사용된다.

---

3) 교육학 용어사전 (2011), 서울대학교 교육연구소, 하우동설.
http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=511612&cid=279& categoryId=279.

4) 두산백과,
http://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.d?_method=view&MAS_IDX=101013000743372.

5) 철학사전 (2009), 철학사전편찬위원회 외 30인, 중원문화,
http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=388361&cid=282&ca tegoryId=282.

본 논문에서의 오류는 수학문제 풀이과정에서 나타난 것으로 국한하며 올바른 풀이과정으로 정답을 제시한 경우만 제외하고 풀이를 시도하지 않았거나 풀이과정이 논리적이지 않는 등 모든 경우를 포함하였다.

Brousseau(1986)는 수학적 오류가 발생하는 원인의 특징을 다음의 네 가지로 분류하고 있다(재인용; 김차숙, 2003).

첫째, 오류는 종종 수학의 기본적인 개념에 관한 오개념의 결과이다.

둘째, 오류는 때때로 교사에 의한 체계적인 지도과정의 결과로 일어난다.

셋째, 오류는 학생들이 결함이 있는 절차를 사용하고 교사에 의해 잘못 인식된 오개념을 가짐으로써 발생하기 쉽다.

넷째, 학생들은 종종 문제해결을 위해 자신의 독창적이고 비형식적인 방법을 창안하는데, 이들은 더욱 일반적인 문제 형태의 특별한 경우에 기초한 귀납적 추론과정의 결과이며, 그런 방법들이 때로는 심각한 오류를 일으킨다.

또한, Borasi(1986)는 오류의 역할에 대해서, 제거되어야할 대상으로서의 오류는 실패한 학습과정의 상징이나 학습자의 잘못된 이해의 반영으로서 교수·학습과정에서 교정되어야 하는 대상이 될 수 있으며, 개념 성장을 위한 발판으로서의 오류는 학습과정의 긍정적 단계로 학습 주제에 대한 이해를 향상시키고 새로운 결과를 생성하는 발견과 탐구의 동기를 제공할 수 있다고 보았다(재인용; 김부미, 2009).

2. 선행연구 고찰

수학문제 풀이과정에서 나타나는 오류를 분류하고, 이러한 오류유형의 빈도를 비교하며 분석하는 것은 수학 교수-학습지도에 중요하다. 따라서 많은 수학교육자들에 의해서 수학적 오류의 유형을 분류하여 분석하고 그 원인을 찾거나 오류유형에 따른 학습 자료 개발과 교수-학습지도 개선방안을 제시하는 연구가 지속적으로 수행되고 있다.

독일의 Radatz(1979)는 오류를 범하게 되는 범주를, 언어의 어려움 때문에 생기는 오류, 특별한 정보를 획득하는데 어려움이 생기는 오류, 필수적인 기술, 사실, 개념에 관한 미숙에 의해 생기는 오류, 잘못된 연합 혹은 사고의 경직에서 생기는 오류와 수학적 유형에 의해서 생기는 오류의 5가지로 구분하여 제시하였다(재인용; 최진숙・유현주, 2006).

류성림・정창현(1993)은 Becker(1982)가 설정한 기하 증명과정에서 나타나는 8가지 오류유형을 참조하여, 오류의 유형을 가정을 잘 이용하지 못하는 오류, 도형에 집착하여 발생하는 오류, 연산자의 잘못된 적용, 연산자의 잘못된 실행, 증명 과정의 일부

생략, 결론을 바르게 내리지 못하는 경우, 기술적인 오류, 논리적 추론의 결여, 오류의 애매모호함의 9가지로 분류하였다. 또한, Movshovitz-Hadar 등(1987)은 이스라엘 고등학생들이 졸업시험에서 반복적으로 보이는 경험적 오류유형을, 잘못 사용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 왜곡된 정의나 정리, 확인하지 않은 해답, 기술적인 오류의 6가지로 분류하였는데, 그들은 고등학생들이 범하는 오류는 우연한 것이 아니며, 학생들에게는 나름대로의 뜻이 통하는 유사-논리에 의해서 일어난다고 가정하였다. 이러한 Movshovitz-Hadar 등의 오류의 유형을 참조하여, 김옥경(1991)은 수학적 오류를 8가지로 분류하여 고등학교 수학에서 발생하는 오류를 분석하였다.

그 외에도 전영배 등(2009), 문혜영 · 김응환(2011), 양기열 · 장유선(2010), 임연휘 · 표용수(2013), Lim & Pyo(2013) 등에 의해 수학적 오류유형의 분석에 대한 연구가 다양한 방법으로 진행되어 왔다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

P대학에서는 수학 기초학력 평가와 미적분학의 선수과목인 기초수학및연습 수강면제자 선정을 위해, 자연계열 입학예정자(수학 B형 3등급 이내 제외)를 대상으로 매년 2월에 진단평가를 시행하고 있다. 진단평가 문제는 행렬과 연립일차행렬식, 수열과 무한급수, 공간좌표와 벡터, 함수의 극한과 연속, 미분법과 활용 및 적분법과 활용 영역에서 단답형 20문항과 서술형 3문항을 출제하고 있는데, 2014학년도에는 대상인원 2,243명의 67.5%인 1,513명이 진단평가에 응시하였다.

1. 연구대상자 선정

연구대상 학생은 1일차 진단평가에 응시한 학생 중에서 중급수준(수능고사 4, 5등급)과 하급수준(수능고사 6, 7등급)으로 구분하여 각각 100명씩 200명을 선정하였다.

<표 1> 모집단과 표본의 수능고사 등급별 인원

구분	모집단					표본				
						중급수준		하급수준		계
등급	4	5	6	7	계	4	5	6	7	
인원	184	219	112	43	558	50	50	57	43	200

이때, 모집단의 경향을 정확하게 나타낼 수 있도록 엑셀 RAND함수로 난수를 생성하여 무작위추출법을 이용하여, <표 1>에서 보는바와 같이 표본을 추출하였다. 표의 표

본이 모집단 전체의 경향을 잘 나타내고 있는지를 알아보기 위하여, SPSS 20.0을 이용하여 가장 기본적인 등분산 여부와 두 집단 평균의 일치여부를 조사하였다.

<표 2>는 중급수준과 하급수준 학생들의 모집단과 표본에 대한 기초통계량을 나타낸 것이다. 두 집단의 평균점수와 표준편차는 완전히 일치하지는 않지만, 유사한 통계량을 보여주고 있다.

<표 2> 모집단과 표본에 대한 기초통계량

구분		N	평균점수	표준편차	표준오차 평균
중급수준	모집단	403	60.13	18.061	0.900
	표본	100	60.43	17.150	1.715
하급수준	모집단	155	33.90	19.408	1.559
	표본	100	31.37	19.584	1.958

여기서, 기초통계량은 2개의 독립변수 속성(모집단/표본)을 가지며, 종속변수는 평가점수 1개이므로, 통계적으로 이 차이가 유의한지에 대한 검정을 실시하기 위해 독립표본 T검정을 통해 분석을 시행하였다. 먼저, 두 집단의 등분산성을 검증하기 위해 Levene통계량을 이용하였다. 표준편차 등분산성 검정을 위한 가설식은 다음과 같다.

H_0 : 중급수준(하급수준)의 모집단과 표본의 분산은 동일하다.

H_1 : 중급수준(하급수준)의 모집단과 표본의 분산은 동일하지 않다.

등분산 검정 결과, 중급수준과 하급수준의 모집단과 표본의 유의수준은 각각 0.567과 0.897로 모두 0.05이상이므로, 유의수준 95%에서 등분산 검정을 시행한다고 할 때, 귀무가설을 기각할 수 없으므로 귀무가설을 채택해야한다. 따라서 두 집단의 분산은 동일하다고 판단할 수 있다.

다음으로, 두 집단의 평균점수 일치여부를 검증하기 위한 가설식은 다음과 같다.

H_0 : 중급수준(하급수준)의 모집단과 표본의 평균점수는 차이가 없다.

H_1 : 중급수준(하급수준)의 모집단과 표본의 평균점수는 차이가 있다.

<표 3>과 <표 4>는 각각 SPSS 20.0을 이용하여, 중급수준과 하급수준 학생들의 모집단과 표본에 대한 독립표본 T검정 결과를 나타낸 것이다. 이들 표에서 중급과 하급수준에 대해 각각 2개의 결과 값이 있는데, 위쪽은 등분산이 가정된 상태이며 아래쪽은 등분산이 가정되지 않은 상태이다. 유의수준 0.05일 때, 중급수준의 모집단과 표본의 평균점수 차이 검정결과에서 유의확률이 0.881로 유의수준보다 크므로, 귀무가설을 기각할 수 없다. 또한, 유의수준 0.05일 때, 하급수준에서의 모집단과 표본의 평균점수 차이 검정에서는 유의확률이 0.312로 유의수준보다 큼에 따라 귀무가설을 기

각할 수 없다. 따라서 중급과 하급수준에서 모집단과 표본의 평균점수 차이는 없다고 판단할 수 있다.

<표 3> 중급수준 모집단과 표본에 대한 독립표본 T검정 결과

t	df	유의수준 (양쪽)	평균점수 차이	표준오류 편차	차이의 95% 신뢰구간	
					하한	상한
-0.149	501	0.881	-0.298	1.998	-4.224	3.627
-0.154	158.041	0.878	-0.298	1.937	-4.124	3.527

<표 4> 하급수준 모집단과 표본에 대한 독립표본 T검정 결과

t	df	유의수준 (양쪽)	평균점수 차이	표준오류 편차	차이의 95% 신뢰구간	
					하한	상한
1.014	253	0.312	2.533	2.498	-2.387	7.453
1.012	209.997	0.313	2.533	2.503	-2.401	7.468

결과적으로, 중급 및 하급수준 학생들의 모집단과 표본의 분산과 평균점수가 동일하므로, 각 표본이 모집단의 경향을 잘 따르고 있는 것으로 평가된다.

2. 연구방법 및 도구

본 논문에서는 진단평가 서술형 문항에 대한 문제풀이 과정에서 나타난 수학적 오류를 김옥경(1991)이 제시한 오류유형을 이용하여, 다음의 9가지로 분류하여 분석하였다. 여기에서, 한 문제를 풀이하는 과정에서 다수의 오류가 발생한 경우, 제일 먼저 발생한 오류의 유형을 중심으로 분류하였다.

(1) 오용된 자료(misused data)

이는 문제해결을 위해 문제를 이해하는 과정에서 얻어지는 오류로, 주어진 정보 이외에 문제와 관련이 없는 정보를 덧붙여 문제풀이를 하는 경우, 주어진 정보는 사용하지 않고 별개의 다른 정보를 이용하는 경우, 문제를 답안지에 옮겨 적는 과정에서 문제에서 제시한 식이나 용어를 잘못 옮겨 적는 경우 등이다.

(2) 잘못 해석된 언어(misinterpreted language)

이 오류도 문제를 이해하는 과정에서 나타나는 것으로, 주어진 정보를 이용하여 문제가 요구하는 방향으로 풀이하지 못한 경우, 주어진 수학적 용어를 다른 의미로 해석하여 문제를 풀이하는 경우, 주어진 그래프를 식으로 표현하는 과정에서 잘못 해석하는 경우 또는 식을 그래프로 표현하는 과정에서 잘못 해석하는 경우 등을 뜻한다.

(3) 논리적으로 부적절한 추론(logically invalid inference)

이는 귀납 또는 연역적인 추론의 과정에서 발생하는 오류로, 불합리한 추론을 포함

한다. 이 오류는, 주어진 정보로부터 잘못 유도된 정보를 이용하여 풀이하는 경우, 이전에 유도한 내용과 연관되지 않은 결과를 이끌어 내거나 확대 해석되어 풀이하는 경우 등이다.

(4) 곡해된 정리 혹은 정의(misunderstood theorem or definition)

문제풀이 과정에서 정리, 정의 등이 잘못 이해되어 사용된 오류로, 올바르게 인지하지 못한 정의를 사용하여 문제를 풀이하는 경우, 정리가 적용되는 조건이외의 곳에 정리를 적용하는 경우, 정리가 적용되는 조건 하에 정리를 올바르게 적용하지 못하는 경우 등이다.

(5) 요구되지 않은 해답(unmatched solution)

이는 문제풀이 과정의 각 단계는 옳으나, 최종 결과를 정리하는 단계에서 발생하는 오류로, 답안 작성 직전까지의 문제풀이 과정은 옳지만, 문제가 요구하는 해답을 제대로 적지 못한 경우, 답을 적기는 하였으나 문제가 요구하는 정답인지를 판별하지 않은 경우 등을 포함한다.

(6) 기술적인 오류(technical errors)

문제풀이 과정의 전반적인 흐름은 알고 있으나 풀이과정에서 경미하게 발생하는 오류로, 문제풀이 과정에서 단순 계산상의 오류, 수학적 표현이 부적절하거나 생략된 경우, 문제풀이 과정에서 이전 단계의 항목을 다음 단계에서 잘못 옮겨 적는 경우 등이다.

(7) 풀이과정의 생략(omission of solving process)

이 오류는 풀이과정 없이 답만 제시한 경우 또는 학생들의 풀이과정이 현재 단계까지는 옳지만, 다음 단계가 생략된 경우를 의미한다.

(8) 애매모호한 오류(ambiguous errors)

오류가 애매모호하여 정확히 식별하기 어려운 경우로, 주어진 문항에 답하는 과정에서 글자가 흐릿하거나 애매한 경우, 학생들이 제시한 답에서 그 의도를 정확히 알 수 없는 경우, 발생한 오류가 다른 오류의 유형에 속하지 않을 경우 등에 해당한다.

(9) 시도하지 않은 오류(unattempted errors)

이 오류는 문제에 대한 접근을 시도하지 않았거나 문제해결 능력이 없어 풀이를 전혀 수행하지 못한 경우에 해당한다.

본 논문에서 수학적 오류 분석을 위해 사용한 진단평가 서술형 3문항(편의상, A, B, C문항이라 함)은 다음과 같으며, 문제출제위원회에서 제시한 채점기준에 따라 부분점수를 부여하였다.

[서술형 A문항]

공간상의 점 $P(2,3,2)$에서 평면 $\pi : 2x+y+z=3$에 내린 수선의 발을 $H(a,b,c)$라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라. (6점)

[서술형 B문항]

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-4}{x-2} & (x\neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 상수 a, b를 정할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (7점)

[서술형 C문항]

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$이 $x=3$에서 극솟값 1을 가질 때, 구간 $[-1, 3]$에서 $f(x)$의 최댓값을 구하여라. (7점)

Ⅳ. 수학적 오류 분석

다음 <표 5>는 중급 및 하급수준 학생들의 서술형 A, B, C 3문항에 대한 정답자 및 오답자 수를 나타낸 것이다. 표에서 풀이과정과 답이 모두 옳으면 정답이라 하고, 그 이외는 오답으로 간주하였으며, ( )는 소수 둘째자리에서 반올림한 백분율이다.

<표 5> 진단평가 서술형 문항의 정답과 오답 현황

수준	수능고사 등급	A문항		B문항		C문항	
		정답	오답	정답	오답	정답	오답
중급	4, 5	16 (16.0)	84 (84.0)	82 (82.0)	18 (18.0)	18 (18.0)	82 (82.0)
하급	6, 7	4 (4.0)	96 (96.0)	41 (41.0)	59 (59.0)	3 (3.0)	97 (97.0)
전 체		20 (10.0)	180 (90.0)	123 (61.5)	77 (38.5)	21 (10.5)	179 (89.5)

서술형 A문항과 C문항은 전체 정답률이 각각 10.0%와 10.5%로 다수의 학생들이 올바른 풀이와 정답을 제시하지 못하였으나, 서술형 B문항에서는 정답률이 61.5%로 다른 문항에 비해 상당히 높은 것으로 나타났다. 여기서, 연구대상 학생들은 공간좌표와 벡터, 미분법과 활용에 관한 문제에 비해 함수의 극한과 연속에 관한 문제를 잘 풀이함을 알 수 있었다. 또한, 서술형 A문항과 C문항은 중급과 하급수준 학생들의 정답률과 오답률의 차이가 작게 나타난 반면, B문항은 비교적 크게 나타났다.

이후부터, 우리는 오류(1)은 오용된 자료, 오류(2)는 잘못 해석된 언어, 오류(3)은 논리적으로 부적절한 추론, 오류(4)는 곡해된 정리 혹은 정의, 오류(5)는 요구되지 않

은 해답, 오류(6)은 기술적인 오류, 오류(7)은 풀이과정의 생략, 오류(8)은 애매모호한 오류, 그리고 오류(9)는 시도하지 않은 오류를 나타낸다.

1. 서술형 A문항의 오류유형 분석

서술형 A문항은 주어진 평면의 법선벡터와 수직과 평행에 관한 개념에 대해 연구 대상 학생들이 어떤 오류를 범하고 있는지를 알아보는 문제이다.

다음 <표 6>은 중급 및 하급수준 학생들의 A문항에 대한 수학적 오류의 유형을 비교하여 나타낸 것이다. 오류유형 중에서 시도하지 않은 오류가 71.1%로 가장 많았으며, 다음으로는 곡해된 정리 혹은 정의, 잘못 해석된 언어, 풀이과정의 생략 등의 순으로 나타났다. 다른 문항에 비해 문제풀이에 대한 접근을 하지 않았거나 해답을 전혀 기술하지 않은 경우가 많았는데, 이는 학생들이 기하와 벡터 영역에 대해 어려움을 느끼고 있음을 보여준다.

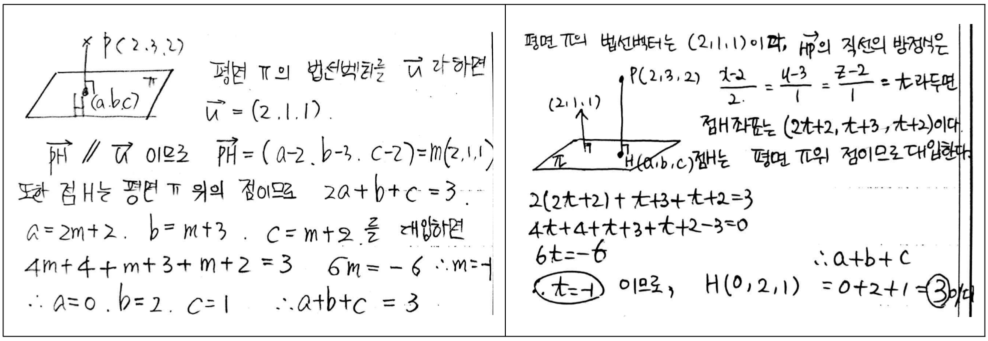
표에서 보는바와 같이, 중급수준 학생들은 시도하지 않은 오류, 곡해된 정리 혹은 정의, 풀이과정 생략 등의 순으로 오류가 발생하였으며, 하급수준 학생들은 시도하지 않은 오류가 82.3%로 월등히 많았으며, 다음으로는 잘못 해석된 언어 5.2%, 오용된 자료와 풀이과정의 생략이 각각 3.1%의 순으로 나타났다. 시도하지 않은 오류를 제외하고는 중급수준 학생들은 문제풀이 과정에서 정의 혹은 정리들을 정확히 이해하지 못하고 사용하는 경우, 풀이과정 없이 답만 맞는 경우가 많았으며 문제를 잘못 사용하는 오류는 발생하지 않았다. 반면에, 하급수준 학생들은 풀이과정을 시작하는 단계에서 오류가 발생한 것을 볼 수 있었으며, 대부분 학생들은 문제에 대해 접근조차 시도하지 않았다.

<표 6> 서술형 A문항에 대한 오류유형 분석

수준	수능 고사 등급	오류유형별 학생 수									합계
		오류 (1)	오류 (2)	오류 (3)	오류 (4)	오류 (5)	오류 (6)	오류 (7)	오류 (8)	오류 (9)	
중급	4, 5	0 (0.0)	4 (4.8)	3 (3.6)	15 (17.9)	3 (3.6)	4 (4.8)	5 (6.0)	1 (1.2)	49 (58.3)	84
하급	6, 7	3 (3.1)	5 (5.2)	0 (0.0)	2 (2.1)	1 (1.0)	1 (1.0)	3 (3.1)	2 (2.1)	79 (82.3)	96
합계		3 (1.7)	9 (5.0)	3 (1.7)	17 (9.4)	4 (2.2)	5 (2.8)	8 (4.4)	3 (1.7)	128 (71.1)	180

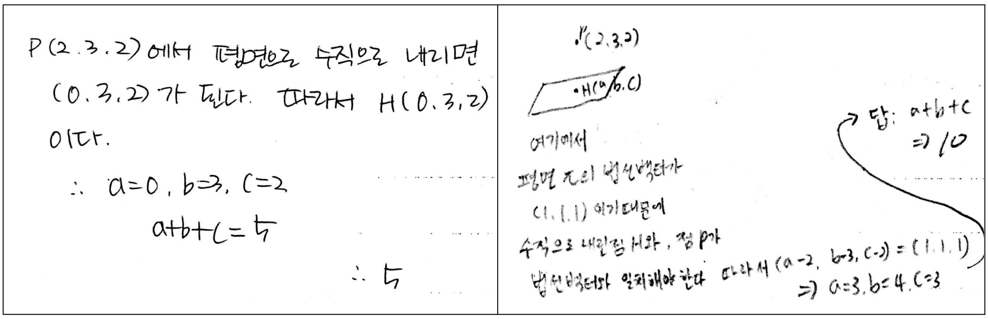
다음은 서술형 A문항에 대한 올바른 풀이과정과 정답을 제시한 답안의 예시이다. 왼쪽 답안을 작성한 학생은 평면의 법선벡터와 $\overrightarrow{PH}$의 관계를 평행으로 정확하게 이해하고, 두 벡터의 평행조건을 이용하여 수선의 발을 구하였다. 또한, 오른쪽 답안을

작성한 학생은 평면의 법선벡터를 점 H와 P를 지나는 직선방정식의 방향벡터로 간주하여 직선의 대칭방정식을 세워 직선의 매개변수방정식으로 변환하여 수선의 발을 구하였다.

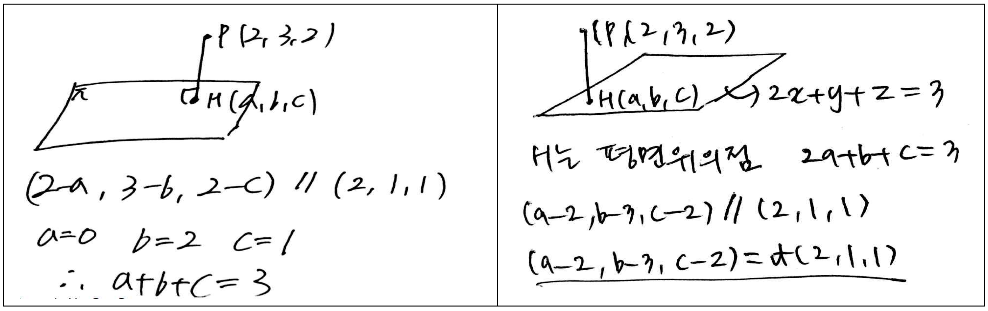


서술형 A문항의 풀이에서 발생한 대표적인 오류의 예를 살펴보면 다음과 같다.

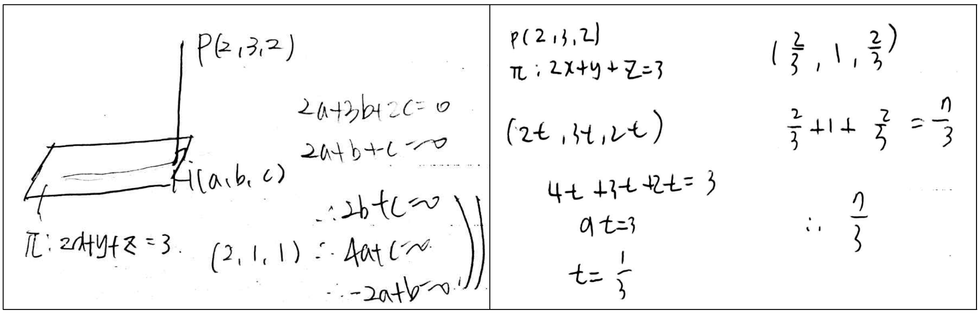
오용된 자료의 오류는 하급수준 학생에게서만 발생하였는데, 다음의 왼쪽 답안을 작성한 학생은 문제에서 주어진 평면 $\pi : 2x+y+z=3$을 무시하고, 문제와 관련이 없는 yz-평면에 내린 수선의 발을 구한 것으로 보인다. 오른쪽을 답한 학생은 문제에서 제시한 평면의 법선벡터 $(2,1,1)$을 $(1,1,1)$로 잘못 나타낸 경우이다.



서술형 문항에서는 옳은 답을 작성하였음에도 불구하고, 풀이과정이 정확하게 제시되지 않으면 오답으로 간주되므로, 풀이과정이 생략된 오류를 범하지 않도록 유의하여야 한다. 다음의 왼쪽을 작성한 학생은 평면의 법선벡터와 $\overrightarrow{PH}$와의 평행관계를 제시하고 옳은 답까지 도출하였으나, 중간 과정의 풀이는 없이 정답만 기술하였다. 오른쪽 답안을 작성한 학생도 평면의 법선벡터와 $\overrightarrow{PH}$와의 평행관계를 알고 벡터의 평행조건까지는 잘 나타내었으나, 그 다음 단계를 생략하였다.



그리고 다음은 오류의 유형을 판단하기에 애매모호한 경우를 나타낸 것으로, 두 학생이 작성한 $2a+3b+c=0$과 $(2t, 3t, 2t)$는 그 의도를 정확히 파악할 수 없다.



2. 서술형 B문항의 오류유형 분석

서술형 B문항은 함수의 극한과 연속 개념에 대해 연구대상 학생들이 어떤 오류를 범하고 있는지를 알아보는 문제이다.

다음 <표 7>은 중급과 하급수준 학생들의 B문항에 대한 오류의 유형을 비교하여 나타낸 것이다. 표에 따르면, 오류유형 중에서 시도하지 않은 오류가 46.8%로 가장 많았으며, 그 다음으로는 곡해된 정리 혹은 정의와 풀이과정의 생략이 각각 10.4%, 오용된 자료와 요구되지 않은 해답이 각각 9.1%의 순으로 발생하였다. 시도하지 않은 오류를 제외하고는 오류의 유형이 골고루 분포되어 있는 편이다. 한편, 중급수준 학생들은 요구되지 않은 해답, 기술적인 오류, 풀이과정 생략 및 시도하지 않은 오류가 모두 22.2%로, 이들 4개의 유형에서 대부분 오류가 나타났다. 반면에, 하급수준 학생들은 시도하지 않은 오류, 오용된 자료, 곡해된 정리 혹은 정의. 풀이과정의 생략의 순으로 오류가 발생하였다.

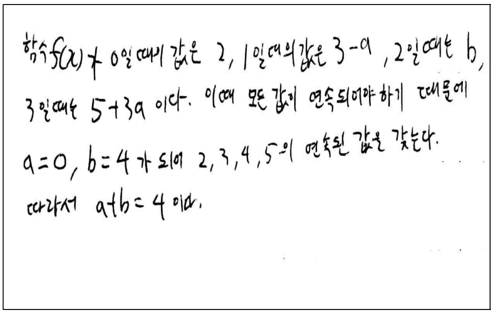
<표 7> 서술형 B문항에 대한 오류유형 분석

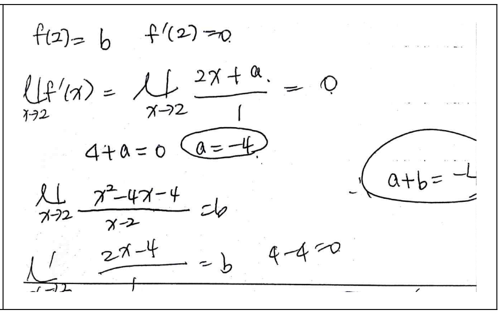
수준	수능 고사 등급	오류유형별 학생 수									합계
		오류 (1)	오류 (2)	오류 (3)	오류 (4)	오류 (5)	오류 (6)	오류 (7)	오류 (8)	오류 (9)	
중급	4, 5	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	2 (11.1)	4 (22.2)	4 (22.2)	4 (22.2)	0 (0.0)	4 (22.2)	18
하급	6, 7	7 (11.9)	3 (5.1)	2 (3.4)	6 (10.2)	3 (5.1)	1 (1.7)	4 (6.8)	1 (1.7)	32 (54.2)	59
합계		7 (9.1)	3 (3.9)	2 (2.6)	8 (10.4)	7 (9.1)	5 (6.5)	8 (10.4)	1 (1.3)	36 (46.8)	77

표에 따르면, 중급수준 학생들은 문제의 이해과정에서 발생하는 오용된 자료와 잘못 해석된 언어는 나타나지 않고 문제가 요구한 해답을 적지 않거나 풀이과정 없이 정답만 기술하거나 계산상의 실수를 하는 등의 오류가 발생하였으므로, 문제풀이 과정에서 작은 실수도 하지 않도록 철저히 지도하여야할 것이다. 반면에, 하급수준 학생들은 시도하지 않은 오류를 제외하고는 문제에 주어진 정보를 잘못 사용하거나 정의, 정리를 정확히 이해하지 못하여 발생하는 오류가 많았다.

서술형 B문항의 풀이에서 발생한 대표적인 오류의 예를 살펴보면 다음과 같다.

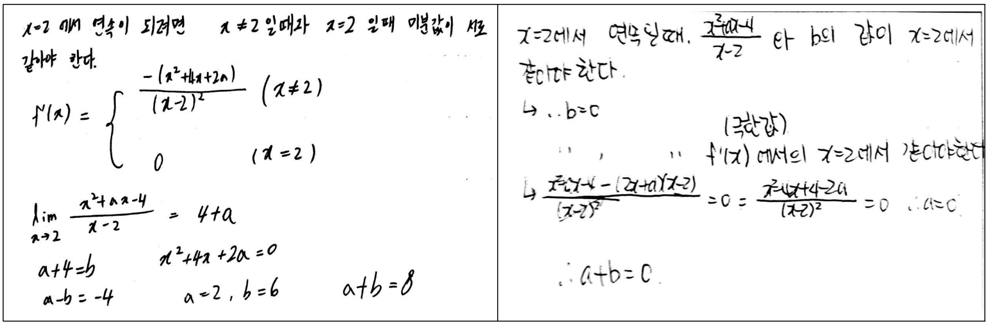
다음은 하급수준 학생들에서만 나타난 잘못 해석된 언어의 예를 나타낸 것이다. 왼쪽의 답안을 작성한 학생은 연속을 1, 2, 3, 4, ...등과 같은 것으로 해석하여 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$가 각각 연속하는 2, 3, 4, 5 의 값임을 이용하여 문제를 잘못 풀이하였다. 오른쪽을 작성한 학생은 문제에서 의도하는 연속의 정의를 이용하지 않고 $f(2)=b$에서 $f'(2)=0$을 유도하여 문제풀이를 잘못한 것으로 판단된다.



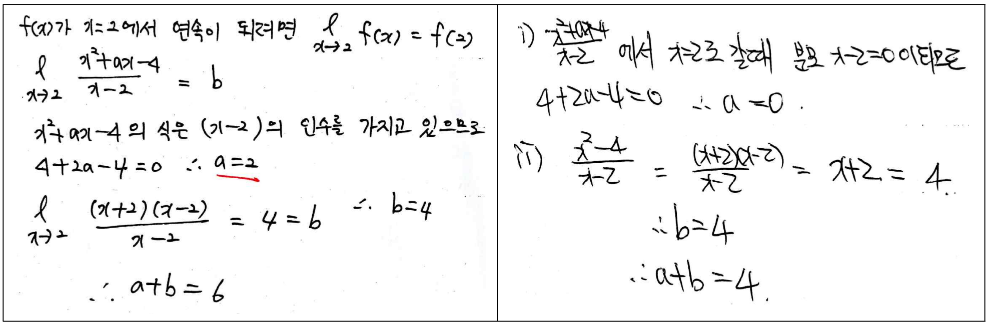


그리고 다음은 곡해된 정리 혹은 정의를 사용한 예를 나타낸 것이다. 이 오류는 중급수준 학생들에 비해 하급수준 학생에서 많이 발생하였다. 답안을 작성한 두 학생은 연속의 정의를 정확히 이해하지 못해 오류를 범하였다. $x=2$에서의 연속의 정의를 왼쪽 답안을 작성한 학생은 $x \neq 2$일 때와 $x=2$일 때의 미분한 값이 같다는 의미로,

오른쪽을 작성한 학생은 $x \neq 2$일 때와 $x = 2$일 때의 함숫값이 같은 것으로 잘못 이해하여 오류를 범하였다.



다음은 서술형 B문항에 대한 풀이에서 하급수준 학생에 비해 상대적으로 중급수준 학생에게서 많이 발생한 기술적인 오류의 예를 나타낸 것이다.



위의 왼쪽 답안을 작성한 학생은 풀이과정은 대체로 옳으나 $4+2a-4=0$에서 a를 구할 때 계산을 실수하였다. 이와 같이, 계산에서 실수를 하면 그 다음 단계의 풀이 과정은 모두 틀리기 때문에 문제풀이 과정에서 특별히 유의하여야 한다. 오른쪽을 작성한 학생은 극한값을 다루면서 $\lim_{x \to 2}$의 표현을 생략하였다. 수학적 표현이 누락되면 다른 의미가 되므로, 학생들에게 수학적인 표현과 기호를 사용하는 습관을 기르도록 지도하여야할 것이다.

3. 서술형 C문항의 오류유형 분석

서술형 C문항은 함수의 극대·극소와 미분법에 대해 학생들이 어떤 오류를 범하고 있는지 알아보는 문제이다.

다음 <표 8>은 중급 및 하급수준 학생들의 C문항에 대한 수학적 오류의 유형을

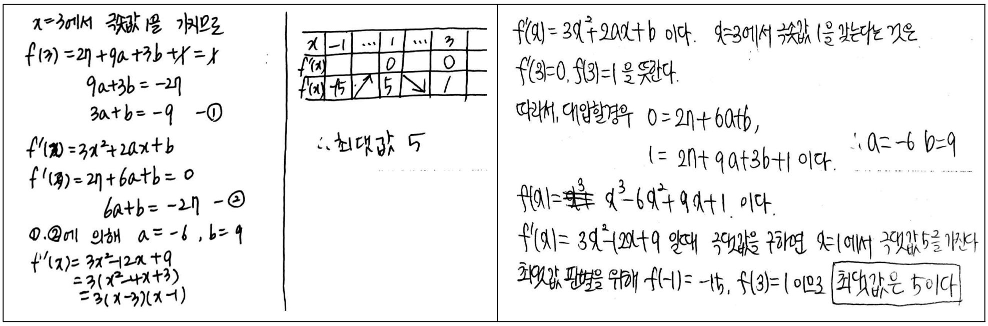
비교하여 나타낸 것이다. 오류유형 중 시도하지 않은 오류가 37.4%로 가장 많았으며, 그 다음으로는 요구되지 않은 해답, 곡해된 정리 혹은 정의, 기술적인 오류 등의 순으로 발생하였다.

<표 8> 서술형 C문항에 대한 오류유형 분석

수준	수능 고사 등급	오류유형별 학생 수									합계
		오류 (1)	오류 (2)	오류 (3)	오류 (4)	오류 (5)	오류 (6)	오류 (7)	오류 (8)	오류 (9)	
중급	4, 5	0 (0.0)	0 (0.0)	4 (4.9)	9 (11.0)	37 (45.1)	13 (15.9)	3 (3.7)	2 (2.4)	14 (17.1)	82
하급	6, 7	2 (2.1)	4 (4.1)	4 (4.1)	14 (14.4)	11 (11.3)	4 (4.1)	5 (5.2)	0 (0.0)	53 (54.6)	97
합계		2 (1.1)	4 (2.2)	8 (4.5)	23 (12.8)	48 (26.8)	17 (9.5)	8 (4.5)	2 (1.1)	67 (37.4)	179

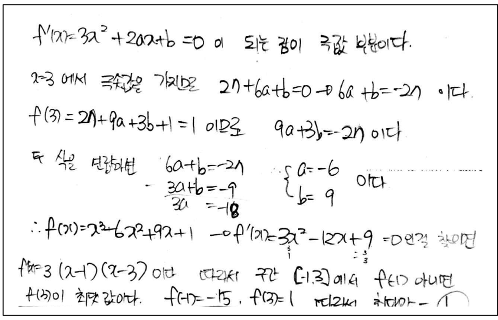
표에 따르면, 중급수준 학생들은 요구되지 않은 해답, 시도하지 않은 오류, 기술적인 오류, 곡해된 정리 혹은 정의 등의 순으로 오류가 발생하였다. 반면에, 하급 학생들은 시도하지 않은 오류, 곡해된 정리 혹은 정의, 요구되지 않은 해답, 풀이과정의 생략 등의 순으로 오류가 발생하였다. 중급수준 학생들은 문제의 이해과정에서 오류가 발생하는 오용된 자료와 잘못 해석된 언어는 나타나지 않았으나, 문제가 요구한 해답을 적지 않거나 계산상의 실수를 하는 등의 오류를 범하였다. 하급수준 학생들은 문제에 접근하지 못하고 문제를 풀기 위해 필요한 정의, 정리들을 제대로 이해하지 못하고 있는 것으로 나타났다.

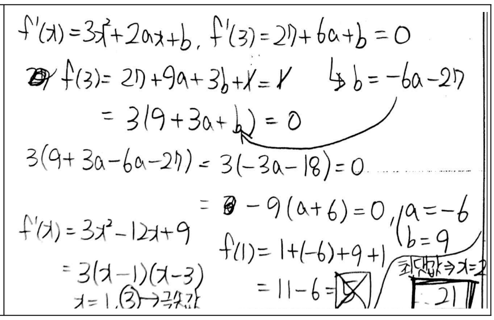
다음은 서술형 C문항에서 정확한 풀이과정과 옳은 답을 제시한 경우이다. 답안을 작성한 두 학생은 다항함수의 미분법과 함수의 극대·극소에 대해 잘 이해하여, 극값 판정조건을 이용하여 a, b의 값을 구하였다. 또한, 주어진 구간에서 $f(x)$의 최댓값을 구하기 위해 극대·극소를 이용하였으며, 구간 양끝에서의 함숫값을 구하여 문제에서 요구하는 해답을 도출하였다.



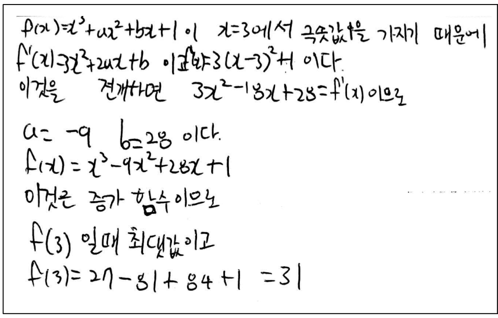
서술형 C문항의 풀이에서 발생한 대표적인 오류의 예를 살펴보면 다음과 같다.

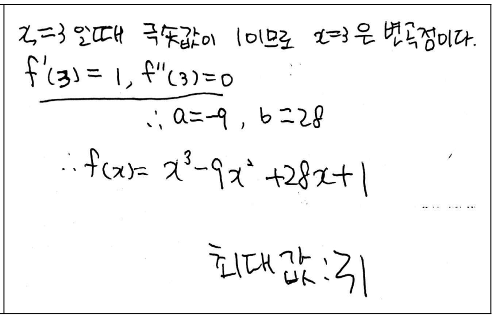
다음은 논리적으로 부적절한 추론의 예를 나타낸 것이다. 왼쪽의 답안을 작성한 학생은 도함수 $f'(x)=3(x-1)(x-3)$으로부터 $x=1$ 또는 $x=3$에서 극값을 가질 수 있음에도 불구하고, 이와는 관련이 없는 최댓값이 $f(-1)$ 또는 $f(3)$이라는 부적절한 추론을 이끌어내는 오류를 범하였다. 오른쪽 답안을 작성한 학생은 앞서 추론된 정보들을 이용하여 $x=2$에서 최댓값을 갖는다고 하였는데, 이 학생은 앞의 정보를 확대 해석하여 부적절한 추론을 한 것으로 보인다.





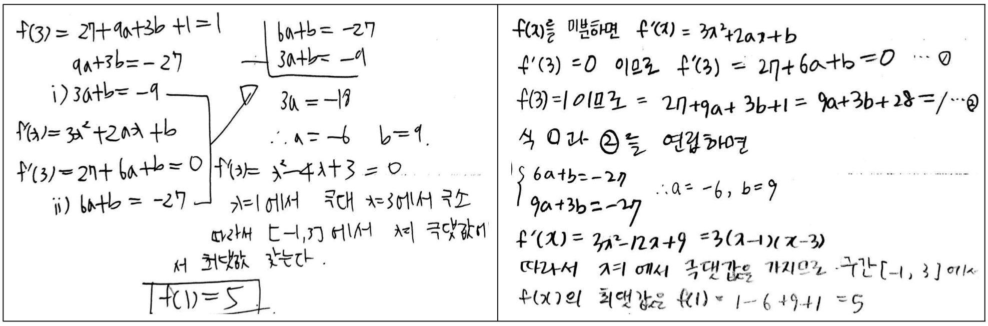
그리고 다음의 예는 곡해된 정리 혹은 정의의 오류를 범한 경우를 나타낸 것이다. 이 오류는 중급수준 학생들에 비해 상대적으로 하급수준에서 많이 나타났다. 왼쪽의 답안을 작성한 학생은 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능일 때, $x=a$에서 극대 또는 극소이면 $f'(a)=0$이 성립함을 제대로 이해하지 못하여 오류를 범하였다. 즉, $x=3$에서 극솟값 1을 갖는다는 조건을 $f'(3)=1$로 잘못 적용하였다. 오른쪽의 답안을 작성한 학생은 임계점과 변곡점의 정의를 정확하게 이해하지 못하고 문제를 풀이하였다.





다음은 서술형 C문항의 풀이에서 많이 발생한 요구되지 않은 해답을 제시한 경우이다. 답안을 작성한 두 학생은 모두 극값의 조건과 미분법을 이용하여 a와 b를 구

하였는데, 구간 $[-1,\ 3]$에서 $f(x)$의 최댓값을 구한 것처럼 보이나 구간 양끝의 함숫값을 구하지 않았다. 즉, 최댓값이 맞는지 확인하지 않아 문제에서 요구한 해답을 정확하게 도출하지 못한 것으로 보인다.



V. 결론 및 제언

본 논문에서는 2014년 2월, P대학에서 시행한 수학진단평가에서, 수능고사 성적이 4~7등급인 자연계열 입학예정자 200명을 대상으로, 수학적 오류를 오용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 곡해된 정리 혹은 정의, 요구되지 않은 해답, 기술적인 오류, 풀이과정의 생략, 애매모호한 오류 및 시도하지 않은 오류의 9가지로 분류하여, 서술형 문항에 대한 풀이과정에서 발생하는 오류의 유형을 알아보았다.

본 논문의 주요 연구결과와 그에 따른 제언은 다음과 같다.

첫째, 수능고사 등급 수준에 따른 오류유형 분석에서, 중급수준 학생들은 이전 단계의 문제풀이 과정은 옳았으나 답을 제시하는 다음 단계에서 논증되지 않은 내용을 제시하거나 계산 실수 또는 수학적 표현이 잘못된 경우가 많았다. 그리고 하급수준 학생들은 문제에 주어진 정보를 잘못 이용하거나 더 이상의 전개가 불가능하여 중단하기도 하고, 정의 또는 정리를 제대로 이해하지 못한 상태에서 문제를 풀이하는 경우도 많았다.

둘째, 수학적 오류 분석에서 각 문항별 오류의 유형이 아주 다르게 나타났으므로, 교과 영역 또는 내용별로 자주 발생하는 오류를 정확히 파악하여 동일한 오류를 계속하여 범하지 않도록 교수-학습지도를 달리하여야할 것이다. 예로, 시도하지 않은 오류가 많이 발생한 기하와 벡터 영역에서는 평면과 공간도형에 대한 기초적 이해와 개념에 대한 충분한 사전 설명이 요청된다. 그리고 수능고사 등급의 수준에 따라 오

류의 유형에 큰 차이를 보이는 함수의 극한과 연속 영역에서는 학력 수준에 적합한 맞춤형 학습지도가 요청된다.

셋째, 문제풀이 과정에서 다수의 오류를 범하는 중급수준 학생들에게는 문제를 정확히 읽도록 안내하며, 수학적 표현을 정확히 나타낼 수 있도록 서술형 답안 작성에 대한 세심한 지도가 요청된다. 그리고 문제에 대한 이해 과정에서부터 많은 오류를 범하는 하급수준 학생들에게는 문제에서 주어진 정보와 그 내용을 정확히 파악할 수 있도록 도와주며, 정의와 정리에 관한 기초 개념을 충분히 이해할 수 있도록 상세히 설명해 주어야할 것이다.

넷째, 본 논문에서는 한정된 영역에서의 서술형 문항에 대한 오류유형을 분석하였으나, 타 영역의 문제해결에 대한 오류의 형태도 심도 있게 분석하여, 그 결과를 교양수학 교과목에 적용하여 효율적인 교수-학습지도가 이루어졌으면 한다. 이를 위해서는, 여러 영역에서 수학적 오류 분석이 용이하며 변별력 있고 다양한 사고력을 요구하는 문제를 출제하여 분석할 필요가 있다. 그러나 학생이 작성한 답안만으로는 수학적 오류의 분석에 한계가 있으므로, 해당 학생과의 개별면담도 함께 이루어져야할 것이다.

참고문헌

[1] 김부미 (2009), 수학적 오류를 활용한 개념 성장 학습 활동의 실제 적용가능성 탐색, 교과교육학연구, 13(2), 393-415.

[2] 김옥경 (1991), 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

[3] 김차숙 (2003), 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

[4] 류성림 · 정창현 (1993), 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 32(2), 137-149.

[5] 문혜영 · 김응환(2011). 고등학교 1학년 함수단원 문제해결에서의 오류에 대한 분석. 한국학교수학회논문집, 14(3), 277-293.

[6] 양기열 · 장유선(2010). 고등학생들의 함수단원 학습과정에서 나타나는 오류유형 분석과 교정, 한국학교수학회논문집, 13(1), 23-43.

[7] 임연휘 · 표용수 (2013), 대학 입학 예정자들의 함수 및 미분의 기초개념 이해에 대한 오류 분석, 한국학교수학회논문집, 16(2), 435-457.

[8] 전영배·노은환·최정숙·김대의·정의창·정찬식·김창수(2009). 미분 문제해결 과정에

서의 오류 분석. 한국학교수학회논문집, 12(4), 545-562.
[9] 최진숙 · 유현주 (2006), 덧셈 · 뺄셈의 오류유형 분석 및 지도방안에 대한 연구 - 초등학교 3학년을 중심으로-, 교과교육학연구, 10(2), 303-327.
[10] Becker, G. (1982). Difficulties and errors in geometric proofs by grade 7 pupils, In A. Vermadel (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference for the PME, 123-127.
[11] Borasi, R. (1986). On the educational roles of mathematical errors: Beyond diagnosis and remediation, doctorial dissertation, State University of New York at Buffalo.
[12] Lim, Y. H. & Pyo, Y. S. (2013), An analysis of error types in basic mathematics through academic ability assessment among freshmen, Proc. Jangjeon Math. Soc., 16(3), 311-319.
[13] Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Shlomo, I. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, 18(1), 3-14.
[14] Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 10(3), 163-172.

Son, Min Ji
Graduate School of Education
Pukyong National University
Busan 608-737, Korea
E-mail address: lovejibee@naver.com

Pyo, Yong-Soo
Department of Applied Mathematics
Pukyong National University
Busan 608-737, Korea
E-mail address: yspyo@pknu.ac.kr