East Asian Math. J.
Vol. 30 (2014), No. 4, pp. 509-526
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2014.034

단위 측면에서 연산에 관한 소고

A Study on the Operation in Terms of Unit

노 은 환 · 강 정 기[1] · 정 상 태

ABSTRACT. The mathematics has moved toward the independence from unit. However, is this tendency also kept up in teaching and learning mathematics? This study starts from this question. We have illuminated this question in respects of a character of unit operation, an essential probability of unit operation and a didactical application of unit. As results, addition and subtraction are operations on identical objects and the result of operation does not also get out of operation's object. On the other hand, multiplication and division are operations on both identical objects and different objects. And the result of operation can generate new unit. We proposed a hypothesis which multiplication and division are transcendental operations from this analysis. The unit operation is not possible essentially. It seems only like unit operation is possible superficially by operational definition on unit. We could discuss on a didactical application of unit from above analysis. And we could deduct implications that the direction of developing mathematic does not necessarily match with the direction of teaching and learning mathematics.

Ⅰ. 서 론

수학은 수에 대한 학문이다. 그렇다면 수의 탄생은 어디에서 기원하는가? 수학 역사 속에서 수의 발달은 실재에 기원한다. 즉, 삶의 실재적 문제로부터 우리는 수를 필요로 하고, 이를 적절히 활용함으로써 삶의 문제에 슬기롭게 대처할 수 있었다. 이를테면, 메소포타미아 지역은 아주 제한된 종류의 천연자원만을 보유하였는데, 그 시대에 위대한 지도자는 관개 시설과 같은 광대한 공공사업을 공동

1) 교신저자

2014년 8월 2일 투고, 2014년 8월 22일 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97C99
Key Word: 단위, 단위 연산

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

으로 함으로써 서로 떨어져 있는 여러 도시 국가들을 결합하여 힘을 모아야 했다. 그러한 일을 하기 위해서는 측량법을 개발해야 했고, 물품을 거래하고 노동력을 계산하여 계획하며 세금을 부과하고 징수하는데 필요한 회계 업무 등을 처리하기 위하여 매우 높은 수준의 지식과 그에 수반되는 수학의 발전이 요구되었다. 이러한 현실적 배경 하에 당시 수준 높은 메소포타미아 수학이 탄생하게 된 것이다([4]).

이러한 견해는 측정활동이 곧 수의 기원이라고 본 Dewey의 주장과도 일맥상통한다. Dewey([14])에 의하면, 수는 끊임없는 균형의 파괴와 균형화를 추구하는 인간의 적응 활동인 측정의 필요에 의해 발생한 것이다.

이처럼 수학의 근원이 실재에 기인한 만큼, 수치는 단위를 갖는 것이 대다수이다. 이를테면, $100m$ 달리기라는 표현에서 m라는 단위 없이 100 달리기라고 하지는 않는다. 이는 수치와 실재와의 연결로써의 단위가 갖는 역할을 분명히 보여준다. 그러나 수학이 점차 발달해가면서, 수치는 단위에서 독립하게 되며, 단위 없이도 명백한 개체로서 작용하게 된다. 이는 추상성을 지향하는 수학의 본질과 닿아 있다([1]). 우리는 단위 없이도 $2+3$이라는 수치와 그 연산을 다루게 된다. 즉, 수학의 발달은 단위로부터의 독립을 지향해 왔다.

그렇다면 다음의 문제가 대두되는데, 단위에 대한 수의 독립 경향성이 수학 발달의 두드러진 특징 중 하나였다면, 수학교육의 바람직한 교수·학습의 방향 역시도 이와 일치해야 하는 것인가?

본 연구는 이와 같은 문제의식에서 출발한다. 즉, 추상성을 지향해 온 수학의 발달 경향은 수치를 단위에서 독립하도록 격려해 왔지만, 이 경향성이 교육에서도 마찬가지로 일관되게 지속되어야 하는 것인가? 본 연구는 단위 연산에 관한 고찰을 통해 이 물음에 대한 숙고의 기회를 갖고자 한다. 즉, 본 연구는 단위에 대한 이해를 독려함으로써, 수학 교수·학습에서 단위의 활용 가능성을 재고해 보고자 한다.

이를 위해 먼저, 단위의 측면에서 연산을 고찰해 봄으로써, 단위 연산이 갖는 특징을 분명히 하고자 한다. 또한 수학에서 단위 연산의 본질적 가능성을 재고해 보고자 한다. 마지막으로 연산에서 단위의 교수학적 활용 가능성을 논의하고자 한다.

Ⅱ. 수학교육에서 단위의 두 측면

본 연구에 가장 우선되는 작업은 단위에 관한 용어의 정의이다. 수학교육에서 통상적으로 사용하는 단위의 의미는 크게 두 가지로 분류되며, 한 가지는 연산을 가능하게 하는 공통 단위로써의 의미를 지닌다. 변희현([7])은 측정의 관점에서 덧셈과 뺄셈 연산을 재고하는 과정에서, 다음과 같이 언급하고 있다.

> 자연수 덧셈에서는 합하는 두 양의 단위가 공통적인 개별적 개체이므로 특별히 공통 단위를 인식할 필요성이 두드러지지 않으나, 분수 덧셈을 측정의 관점에서 볼 때는 일반적으로 두 양을 공통적으로 측정할 수 있는 새로운 파생단위 즉 공통단위를 찾는 과정이 필요하다.

여기에서의 단위는 곧 연산을 가능하게 만드는 공통단위를 의미한다. 이를테면, $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{3}$의 덧셈을 가능하게 만드는 공통단위로 $\frac{1}{6}$을 생각할 수 있다. 수를 측정 활동의 산물로 본 Dewey에 의하면, 단위에 의해 수는 상대적 의미를 지니게 된다.

> Dewey에 의하면 측정 활동이 먼저 측정될 필요가 있는 모호한 전체에서 출발하여 이것을 단위로 분할하여 변별하여 보고, 다시 단위의 반복을 통하여 전체량을 재구성하는 과정을 통해 명확한 전체가 되는 순서로 진행된다고 본다. 이러한 과정에서 수는 전체량을 이루기 위해서 단위가 얼마나 반복되었는가 또는 얼마나 많은 단위가 전체량을 이루고 있는가를 의미하는 것으로, '단위량에 대한 전체량의 비'를 뜻한다 ([6]).

단위의 의미의 다른 측면은 수치 옆에 첨가되는 단위의 의미를 지닌 것으로, 추상적 수치를 보다 구체화시키는 역할을 하게 된다. 이는 통상적이며 보편적으로 일상생활에서 사용해 온 물리적 단위의 의미이며, cm, 개, 명 등이 이에 해당한다. 이러한 단위는 오늘날 만국에 공용되는바, 수치의 의미를 국제화 가능하게 만든 요인이기도 하다. 권순애·김현주([3])에 의하면 과학기술의 발전은 국제 협력을 통해 급속하게 발전되어 왔으며, 이런 국제 협력이 가능했던 이유는 전 세계가 공통으로 사용할 수 있는 국제적 측정 표준이 있었기 때문이라고 언급하고 있다. 즉, 만국에 공통 표준으로 사용되는 국제단위계(SI: Le Systeme International d′unites)가 있으며, 이는 물리적 단위로서의 의미가 강하다.

전자의 단위는 측정의 관점에서 연산을 가능하게 하는 공통단위로써, 상대적 의미를 지닌다. 공통단위는 연산의 관점에서 비교에 의해 생성된 것이며, 이때 연산을 가능하게 한다는 측면에서 절대적 의미를 지닌 것이 아니라, 상대적인 의미를 지니게 되는 것이다. 즉, 공통단위는 이미 존재한 두 수에 종속된 측면이 강한 것이다. 이에 반해 후자의 단위는 수치의 의미를 개념화하는 측면이 강하며, 절대적 의미를 지닌다. 물론 시대의 상황에 따라, 더 효율적이며 편리한 새로운 단위가 고안되도록 단위의 재조정이 이루어져 왔지만([13]), 이는 시대 상황에 따라 가변적이라는 의미이지 비교 대상이 되는 개별적 수에 종속된 것은 아니다. 오히려 비교 대상이 되는 개별적 수에 종속되지 않고 모든 수를 표준 잣대로 해석하고자 한다는 취지로부터 절대적 의미를 지닌다.

전자의 단위는 개별적 수에 종속된 상대적인 수인만큼, 물리적 단위를 필요로

하지 않는다. 본 연구에서는 수의 기원을 측정의 소산으로 보는바, 측정의 표준 잣대인 물리적 단위의 관점에서 수와 그 연산이 갖는 의미를 재조명해 보고자 한다. 따라서 본 연구에서는 전자의 단위가 아닌 후자의 의미를 지닌 것으로 단위라는 용어를 제한적으로 사용하고자 한다. 전술하였듯, 후자의 단위는 추상적 수치에 부가되어 수치를 보다 구체화시키는 작용을 하게 된다. 이를테면, 2라는 추상적 수에 cm라는 단위가 부가되면, 수치적 의미가 길이로 구체화된다. 본 연구에서는 이러한 관점에서 단위의 작용을 음미하고, 교수학적 관점에서 단위의 측면에서 연산을 재고해보고자 하는 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 단위의 측면에서 연산을 고찰해 보는 것이 첫 번째 연구 문제이다. 이를 위해 먼저, 사칙 연산에 관한 다양한 예를 수집할 것이다. 이를테면, 가로, 세로가 각각 $2cm$, $3cm$인 직사각형의 둘레를 구하는 문제 해결에 $2cm \times 2 + 3cm \times 2$가 등장하는데, 이런 식들이 곧 수집 대상이 된다. 이러한 다양한 예를 수학 교과서 및 교재, 그리고 연구 논문 등에서 수집하여 연산의 특징을 파악하기 위한 기초 자료로 활용하고자 한다. 특히 단위가 개입된 사칙 연산의 예를 수집함으로써, 사칙 연산을 수치의 측면이 아닌 단위의 측면에서 재고해 보고자 한다.

다음으로 수학에서 단위 연산의 본질적 가능성을 검토하기 위해, $1cm \times 1cm = 1cm^2$과 같은 예를 수집할 것이다. 그리고 이러한 예가 성립하는 본원적 이유를 파악하기 위해 선행 연구물을 검토할 것이다. 구체적으로 $1cm \times 1cm = 1cm^2$은 넓이 개념과 관련되는바, 넓이에 관한 선행 연구를 한국수학교육학회, 대한수학교육학회, 한국학교수학회 등에서 검색하였다. 아울러 넓이 공식 $a\,cm \times b\,cm = ab\,cm^2$에 대한 학생들의 인식 조사와 관련된 문헌 역시도 학회 논문에서 검색함으로써, 단위 연산에 대한 본질적 가능성을 학생들은 어떻게 이해하고 받아들이는지 알아보고자 하였다. 이렇듯 단위 연산과 관련된 선행 연구를 조사함으로써, 단위 연산의 본질적 가능성을 재고할 뿐 만 아니라, 더불어 단위 연산에 관한 학생 인식까지 논의하고자 한다.

마지막으로 연산에서 단위의 교수학적 활용 가능성 논의를 위해, 앞서의 논의 결과를 바탕으로 단위의 바람직한 교수 활용 방안을 제안할 것이다. 특히 연산에 관한 선행 연구를 검토함으로써, 그 결과를 단위의 적절한 활용 방안 제시의 근거로 삼고자 한다. 즉, 연산에서 발생하는 인지적 장애나 오개념을 검토하고 단위 활용의 이점을 참조함으로써, 수치의 개념적 의미를 두드러지게 만드는 단위의 이점을 십분 활용할 방안을 모색해 보고자 한다. 이를 통해 궁극적으로 수학 교수·학습에서 단위의 바람직한 활용 방안을 제시하고자 한다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 연구 결과

1) 단위의 측면에서 연산의 특징

본 절에서는 단위 연산을 연산 대상의 측면에서 재고함으로써, 연산의 의미를 새롭게 조명해 보고자 한다.

덧셈과 뺄셈은 동질 단위를 갖는 대상에 대한 연산이다. 이를테면, ‘사과 2개에 사과 3개를 더하면 사과의 총 개수는 몇 개인가?’를 묻는 문제에서 $2+3=5$라는 연산이 가능하며, 이는 동질 단위 ‘개’가 생략된 연산을 나타낸다. 즉, 2개와 3개의 합은 5개임을 보여주는 것이다. 이는 덧셈은 동질 단위에 대한 연산임을 분명히 보여준다. 뺄셈 역시 마찬가지로 동질 단위를 갖는 대상에 대한 연산이다.

‘사과 2개와 배 3개에서 과일의 총 개수는 몇 개인가?’를 묻는 문제 역시 덧셈 연산이 가능한데, 이는 ‘개’라는 단위의 측면에서 동질하기에 가능한 것이다. 그러나 사과 2개와 길이 $20m$는 덧셈 연산이 불가한데, 이는 전자의 단위 ‘개’와 후자의 단위 m가 동질하지 않기 때문이다.

또한 덧셈과 뺄셈은 동질 대상에 대한 연산으로 파생된 결과 역시도 동질 대상이 된다. 즉, 개수와 개수의 덧셈의 결과는 개수가 되어야 하는 것이다. 이를 순수 수학적 견지에서 표현한다면, 집합 $\mathrm{A}=\{x\text{개} \mid x\text{는 물건의 개수}\}$에 대해 ‘+: $\mathrm{A}\times\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{A}$’ 또는 ‘$-$: $\mathrm{A}\times\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{A}$’로 나타낼 수 있다.

또한 놀라운 것은 동질 대상일지라도 단위가 다르다면 이는 덧셈 연산이 불가하게 된다. 이를테면, $1m$와 $40cm$의 길이의 합은 $1m\ 40cm$라고 통상적으로 이야기하지만 이는 엄밀히 수학적 덧셈이 아니다. 이는 $25+9$ 에서 수를 붙여서 259라고 하거나, 25의 십의자리 20과 일의자리끼리의 합인 $5+9=14$ 라고 해서 214라고 하지 않는 것과 같은 이치이다. $1m$와 $40cm$의 길이에 대한 수학적 덧셈이 가능하기 위해서는 $1m$를 $100cm$로 변형하거나 $40cm$를 $0.4m$로 변형하여 단위를 일치시키는 작업이 필요하다. 이것은 $0.3m+50cm$를 $0.3m50cm$로 사용하지 않는 것을 보면 더욱 명백해진다. 따라서 덧셈과 뺄셈은 대상 뿐 아니라, 단위도 동질해야 가능한 연산임을 알 수 있다.

그런데 덧셈과 뺄셈과는 다르게 곱셈과 나눗셈은 다른 양상을 띠게 된다. 곱셈은 덧셈의 측면에서 ‘동수누가(同數樓加)’로 해석되며, 이는 곱셈의 기원이기도 하다. 「창세기」 제 1장 28절의 다음 내용은 곱셈의 기원에 관한 내용이다.

> ‘하느님은 그들을 축복하여 말씀하셨다. 낳고 번성하여 땅에 충만하라. 땅을 정복하라’ 여기서 땅에 충만하라는 어원은 multiply이다([13]).

이 구절은 곱셈이 번영과 증가의 의미를 갖는 맥락을 지닌 어원에서 기원하며, 이는 곧 곱셈이 동수누가의 측면, 즉 덧셈에서 기원하였음을 보여준다. 이를테면, 사과 2개를 6번 더하는 상황은 2개+2개+2개+2개+2개+2개 대신 2개×6으로 표현 가능하며, 이는 덧셈에 기원을 둔 곱셈 연산의 주요 특징이다. 이 연산을 분석적 측면에서 접근해 보면, 6은 2개의 횟수를 나타내는 순수수로서의 맥락을 지니게 되며, 따라서 연산의 결과 역시 사과의 개수가 된다. 즉, 동수누가의 측면에서 곱셈은 연산의 결과 역시도 동질 대상의 단위로 갖게 되며, 이는 곱셈이 덧셈에 기원한 탓이다. 마찬가지로 '동수누감(同數樓減)'의 측면에서 나눗셈 역시도 같은 맥락을 지닌다.

그러나 곱셈과 나눗셈은 비단 동질 대상의 연산 결과만을 낳는 것은 아니다. 이들은 동질 대상의 연산과 비동질 대상 연산 모두가 가능하다. 이를테면, 가로 $1m$와 세로 $1m$인 직사각형의 넓이는 $1m \times 1m = 1m^2$로서 가능하다. 이는 곱셈이 동질 대상에 대한 연산이 가능함을 보여준다. 또한 비록 동질 대상의 연산이지만, 덧셈과는 다르게 연산의 결과가 원 단위로 생성되지 않고 타 단위를 생성하게 된다. 또한 곱셈은 비동질 대상의 연산도 가능하며, 대표적으로 시속 $4km$로 달리는 자동차가 5시간 달린 거리를 구하는 상황에 대한 식 $4km/h \times 5h = 20km$은 곱셈이 비동질 대상 연산도 가능함을 보여준다. 여기서의 연산 결과는 새로운 단위로써 생성된다.

또한 이 특징은 나눗셈에서도 두드러지게 나타나는 특징 중 하나이다. '사과 6개를 2명이 나누어 먹는다고 할 때, 1명이 먹게 될 사과의 개수?'라는 문제에서 6개÷2명=3개/명이라는 연산이 가능하게 된다. 여기서 나눗셈은 비동질 단위를 갖는 대상에 대한 연산이다.

나눗셈에 관한 대상의 비동질성은 맥락에 따라 각기 다른 성격을 지닌다. 포함제 맥락에서 나눗셈은 대상의 동질성이 확보되어야 한다. 이를테면, '사과 6개를 2개씩 묶어 덜어 내면 몇 번을 덜어내야 하는가?'라는 포함제 문제에서 나눗셈은 대상이 사과로서 동질하다. 반면 등분제 맥락에서 나눗셈은 대상이 비동질하게 된다. 예컨대, '사과 6개를 2접시 씩 나누어 담으면 한 접시에 몇 개의 사과가 담기는가?'라는 등분제 문제에서 나눗셈은 대상이 사과와 접시로써 비동질하게 된다. 이처럼 나눗셈은 상황 맥락에 따라 대상이 동질하기도 비동질하기도 하게 된다.

이것은 곱셈과 나눗셈의 탄생은 곧 획기적인 연산 개발이었음을 시사한다. 즉, 기존의 덧셈과 뺄셈의 연산이 동질 단위를 갖는 대상에 대한 연산이었다면, 곱셈과 나눗셈은 다른 단위를 갖는 대상에 대한 연산으로의 상승을 낳은 새로운 연산이었던 것이다. 동수누가라는 덧셈의 측면에서 해석될 수 없는 상황의 존재성이 이러한 점을 분명히 보여준다. 동수누가의 덧셈 측면에서 곱셈은 증가의 의미를 지니지만, 분수의 곱 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$의 결과는 이 반례가 된다. 즉, 동수누가의 측면에

서 해석될 수 없는 곱셈 맥락이 존재하며, 이는 곧 곱셈이 비록 덧셈에 기원하지만, 덧셈에 국한된 연산이 아님을 보여준다.

곱셈과 나눗셈은 동질 대상과 비동질 대상 모두를 아우르는 연산이며, 그 결과는 새로운 단위를 파생시킨다. 즉, $1m \times 1m = 1m^2$를 보면, 동질 단위 m에 대한 곱셈 연산의 결과는 m가 아닌, 새로운 단위 m^2이 된다.

이는 나눗셈에서 더욱 두드러진다. 동질 대상에 대한 나눗셈은 다양한 의미로 해석 가능하다. 즉, 6개$\div$2개는 '6개의 사과를 2개씩 나누어주면 몇 명이나 나누어 먹을 수 있는가?'의 측면에서 이 연산 결과는 '명'이 될 수 있다. 또한 '6개의 사과를 2개씩 접시에 나누어 담으면 몇 접시가 담기는가?'의 측면에서 이 연산 결과는 '접시'가 될 수 있다. 이는 동질 단위에 대한 나눗셈 연산 결과는 해석하기에 따라 가변적임을 시사한다. 또한 비동질 대상에 대한 나눗셈의 결과는 비록 가변적이지는 않지만, 비율적 결과를 낳게 한다. 즉, 사과 6개를 3명씩 나누어 먹는 상황에서 2개/명이라는 나눗셈의 결과는 1명당 먹을 수 있는 사과의 개수가 2개임을 나타내며, 이는 비율적 수에 해당한다. 즉, 비동질 단위 대상에 대한 나눗셈의 결과는 비율적 수로 나타나는 것이다.

같은 맥락에서 Schwartz([21])는 곱셈과 나눗셈은 덧셈, 뺄셈과 달리 대상이 변형되는 연산이라고 주장한다. 왜냐하면 서로 다른 두 양이 투입되어 제 3의 다른 양이 산출되는데, 이 산출된 대상은 앞의 두 양 어느 것과도 다른 양이기 때문이다.

요약하면 곱셈과 나눗셈 연산의 탄생은 덧셈과 뺄셈에 기원을 두는바, 연산의 결과가 단위를 보존하는 측면을 지니고 있다. 이는 덧셈과 뺄셈 본연의 연산 특성이 보존된 결과이다. 그러나 곱셈과 나눗셈이 비단 이와 같은 측면에 국한된 연산은 아니다. 이들은 이른바 새로운 차원의 연산을 생성 가능하게 하는 측면을 지닌다. 동수누가의 측면에서 곱셈은 증가의 의미를 지닌 것이지만, 증가의 의미만을 함의한 제한된 연산은 아니다. 분수 곱셈 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$은 증가가 아닌 감소의 결과를 낳게 만드는바, 곱셈과 나눗셈이 덧셈과 뺄셈의 맥락에 국한되어 해석될 수 없음을 시사하는 것이다. 또한 $1m \times 1m = 1m^2$라는 결과는 동수누가의 측면에서 의미부여가 불가능한 곱셈의 측면이다. 이것은 기존 단위로부터 새로운 단위를 생성하는 곱셈의 단위 초월적 특성이며, 이는 곧 곱셈이 기존의 것을 뛰어넘은 새로운 연산임을 의미한다. 동시에 곱셈은 더 이상 덧셈에 종속된 연산이 아니라, 독립적 연산으로서의 요소를 포함하고 있음을 보여준다. 이에 본 연구자는 다음의 가설을 제안한다.

가설

곱셈과 나눗셈의 기원은 덧셈과 뺄셈에 기원하는 바, 단위 보존으로서의 연산의 주요 특징을 지니고 있지만, 아울러 곱셈과 나눗셈이 그 기원에 종속된 연산으로 국한된

것은 아니다. 그들의 기원이 비록 덧셈과 뺄셈에서 비롯되지만, 발달 과정에서 독립적으로 이용되고 활용됨으로써, 독립적 연산으로서 상승하게 된다. 그리하여 결국 단위 초월적 연산, 즉, 기존 단위에서 새로운 단위를 양산하는 연산의 요소를 갖게 되었으며, 오늘날 그 면면을 이어가고 있다.

덧셈과 뺄셈 연산은 동질한 단위를 갖는 대상을 연산의 적용 대상으로 삼는 만큼, 계산 결과의 단위 인식이 용이하게 된다. 그러나 곱셈과 나눗셈 연산은 이와는 전혀 다른 양상을 지니므로 해석에 어려움이 예상된다. 전술한 바와 같이 곱셈과 나눗셈의 경우, 연산의 결과가 기존 단위를 초월한 국면으로 전개되는바, 단위로부터 독립된 지나친 추상화는 연산의 결과 의미 이해에 방해요인으로 작용할 수 있다.

이와 관련하여 Lamon([16])은 곱셈이 어려운 이유 중 하나를 합성 단위의 변환 과정 때문이라는 주장을 피력한 바 있다. 그는 '곱셈은 두 양을 결합해서 승수나 피승수와는 다른 양을 만들어 내는 것'이라고 주장한다. 예를 들면, 1시간에 70km로 달리는 기차가 4시간에 달린 거리는 280km이지만, 단위는 시간도 속력도 아니다.

수학 역사 속에서도 이러한 어려움은 나타난다. 양(quantity)은 크게 이산적인 수와 연속적인 크기(magnitude)로 구분되며, 유클리드 원론에서 이산적인 수의 경우에는 덧셈, 뺄셈 뿐 만 아니라 곱셈까지도 가능한 연산으로 이용되고 있으나, 연속적인 크기의 경우에는 덧셈과 뺄셈, 그리고 상수배만 가능하고 크기끼리의 곱셈은 가능하지 않은 연산으로 소개되고 있다([9]). 그 이후에도 순수수학자들은 양의 계산을 다루는 것을 될 수 있는 대로 피하려고 했고 이런 계산들은 자연과학자들에게 내맡겨졌다([10]). 이러한 수학자들의 태도에 대해 Freudenthal([15])은 현실을 무시한 '완전한 교조주의[3]'라고 비판한다.

수학 역사에서도 드러나 듯 곱셈의 결과가 갖는 비보존적 성격은 연산 결과에 대한 의미 이해를 어렵게 하는 요인이었으며, 나눗셈 역시 동일한 어려움이 예상된다. 따라서 곱셈과 나눗셈의 경우 단위를 적절히 활용함으로써, 연산 결과에 대한 해석의 용이함을 돕는 것이 필요하다.

<표> 연산 대상과 단위 동질성 및 결과에 대한 단위 보존, 그리고 인식 용이성

3) 특정한 교의나 사상을 절대적인 것으로 받아들여 현실을 무시하고 이를 기계적으로 적용하려는 태도. 특히 마르크스주의에 있어서 마르크스주의를 발전하는 것으로 파악하지 않고 고전에 서술되어 있는 명제를 절대적인 교조라고 생각하여, 당면한 구체적인 여러 조건을 음미하지 않고 현실을 무시한 채 기계적으로 적용하려는 태도나 생각을 이른다([5]).

<table>
<tr><th>연산</th><th colspan="2">대상의 동질성</th><th colspan="2">단위의 동질성</th><th>연산 결과에 대한 단위의 보존</th><th>연산 결과에 대한 단위 인식의 용이성</th></tr>
<tr><td>덧셈</td><td colspan="2">동질</td><td colspan="2">동질</td><td>보존</td><td>용이</td></tr>
<tr><td>뺄셈</td><td colspan="2">동질</td><td colspan="2">동질</td><td>보존</td><td>용이</td></tr>
<tr><td>곱셈</td><td colspan="2">비동질 포함</td><td colspan="2">비동질 포함</td><td>비보존</td><td>비용이</td></tr>
<tr><td rowspan="2">나눗셈</td><td>등분제</td><td>비동질 포함</td><td>등분제</td><td>비동질 포함</td><td rowspan="2">비보존</td><td rowspan="2">비용이</td></tr>
<tr><td>포함제</td><td>동질</td><td>포함제</td><td>동질</td></tr>
</table>

2) 단위는 본질적으로 연산 가능한 것인가?

본 절에서는 수학 속에서 단위 연산의 가능성을 조명하고자 한다. 흔히 $2m \times 3m = 6m^2$에서 보는 바와 같이 수치 뿐만 아니라, 단위 역시도 수치와 동일한 방식으로 계산이 되게 된다. 본 절에서는 이와 같은 단위 연산은 본질적으로 가능한 것인가에 대한 물음에 답하고자 한다.

수학자들은 물리량을 단순히 수치와 단위의 곱으로 보지 않는다. 수학자들은 측정을 양(quantity) G를 양의 실수 R^+로 대응시키는 함수 $v : G \to R^+$: $v(a\,\text{단위}) = a$로 본다. 이를테면, 무게 $a\,kg$이라는 양은 수학자들에게 $v(a\,kg) = a$로 비춰진다([15]). 그러나 자연과학자들은 양을 수치와 단위의 곱으로 이해하며, 이는 양의 계산에서의 기본 아이디어가 된다. '물리량=수치×단위'이므로 이 식을 방정식으로 생각하여 대수적으로 계산하면, 단위를 다루는데 유용하며, 단위 변환을 할 수 있는 좋은 기술이 된다([22]). 그렇다면 이와 같은 단위가 포함된 물리량의 연산은 본질적으로 가능한 것인가?

가로 $1m$와 세로 $1m$인 직사각형의 넓이는 $1m \times 1m = 1m^2$이 된다. 이 연산에서 단위는 $m \times m = m^2$으로서 연산 가능하게 되는데, 이는 본질적인 측면에서 가능성을 지닌 것인지 재고가 필요하다.

사실 이와 같은 연산은 본질적으로 가능한 것은 아니다. 단위 연산이 가능할 수 있는 것은 넓이 $1m^2$의 개념 정의에 근간을 두고 있다. 즉, 넓이 $1m^2$라는 것이 가로 세로가 각각 $1m$인 직사각형의 넓이로써 정의됨으로써, 식 $1m \times 1m = 1m^2$이 성립하게 되는 것이다. 이는 단위 연산의 가능성이 본질적인 측면이 아니라, 개념 정의의 측면에서 가능한 성질의 측면임을 드러내는 것이다.

이는 넓이의 공리적 정의에 기반한 논리 구축을 볼 때 더욱 확연한 현상이다. 넓이의 공리적 정의를 발띠얀스키는 다음과 같이 제안하고, 그 함수의 존재성과 유일성을 증명하였다([11]).

다각형의 집합을 정의역으로 하는 함수 s가 넓이라 함은 다음과 같다.

A0. 임의의 도형 M의 넓이 $s(M)$은 음이 아니다.

A1. (넓이 불변 공리, area invaiance axiom) 만약 도형 M_1과 M_2가 합동이면,

$s(M_1) = s(M_2)$.

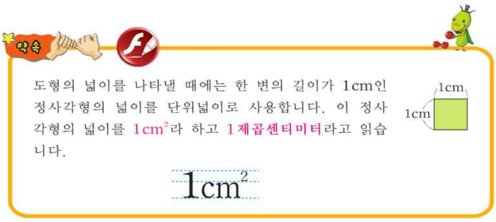
A2. (넓이 가법 공리, area addition axiom) 만약 도형 M을 두 개의 도형 M_1과 M_2로 분할하면(즉, $M_1 \cup M_2 = M$), $s(M) = s(M_1) + s(M_2)$.

A3. (넓이 정규화 공리, area normalization axiom) 만약 K를 한 변이 단위 길이인 정사각형이라 하면, $s(K) = 1$

한인기·신현용([11])은 러시아 교과서를 인용하여, 이와 같은 공리에 기반하여 다음의 정리가 유도 가능함을 보여준다.

두 변의 길이가 a, b인 직사각형의 넓이는 ab이다.

물론 이러한 공리계의 설정으로부터 유도된 직사각형의 넓이 공식은 교수·학습의 측면에서 어려움이 예상되므로, 실제 우리나라의 교육과정에서는 직사각형의 넓이 공식은 공리가 아닌 단위넓이에 대한 비율로서 정당화되고 있다. 다음은 초등학교 4학년 2학기 교과서에 등장하는 단위넓이에 대한 개념 정의이다([2]).



[그림] 단위넓이에 대한 개념 정의

이 개념 정의로부터 직사각형의 넓이는 단위넓이를 채워가는 경험적 활동에 기반하여 교수되며, 이는 엄밀한 증명은 아니지만 직사각형의 넓이 공식이 단위넓이라는 설정 아래 유도된 성질임이 확연하게 보여준다.

이는 식 $1m \times 1m = 1m^2$이 본유적 의미로써 가능한 것이 아닌, 넓이 정의 개념에 기반하여 유도 가능한 성질임을 보여준다. 개념 정의의 측면에서 성질과 같다는 특성은 조작적 정의를 달리할 때, 더욱 두드러지게 나타난다. 이를테면, 가로 세로가 각각 $1m$인 직사각형의 넓이를 $1S$로 정의하여 사용한다고 가정해 보자. 그렇다면 이 정의로부터 다음의 성질이 탄생하게 된다; $1m \times 1m = 1S$.

이것은 정의에 의해 모순 없이 원만하게 성립하는 수학적 성질이 된다. 이 성질은 단위 연산이 개념 정의에 기반한 성질임을 분명히 보여준다. 즉, 연산은 본질적으로 계산 가능한 대상이 아닌 것이다.

이러한 결과는 덧셈과 뺄셈 연산에서도 마찬가지이다. 이를테면, $2cm + 2cm$라는 덧셈 연산에서 $(2+2)cm$라는 연산 결과가 단위의 연산에 의해 분배법칙으로

서 가능한 듯 보이지만, 실상은 단위의 연산이 아니라 동질 단위 연산과 그 결과에 기반한 덧셈의 본연적 특성에 기인한 것이다. 즉, 동질 단위의 연산이라는 것과 그 연산의 결과 역시 기존 단위라는 덧셈의 특성에 기인한 것이지만, 표면적으로 나타나는 모양새는 단위의 연산에 의해 가능한 듯 보일 수 있다. 이러한 특징은 $1cm+1cm=2cm$가 성립하는 이유에 대해 고찰해 볼 때, 더욱 분명해진다. 이 결과는 덧셈 본유의 특성과 아울러 자연수 2가 가진 본성에 기인한 연산의 결과이지, 단위가 연산 가능하기에 나타난 결과로 볼 수 없다.

그런데도 불구하고 우리는 왜 연산까지도 계산 가능한 것으로 인식하는 것인가? 이것은 '단위 연산'을 가능하게 하는 연산 정의화(化)에 기인한다. 즉, 연산의 계산 가능성의 이점을 십분 활용할 목적으로, 이를 표면화시키는 방향으로 연산을 조작적으로 정의하는 것이다. 이는 연산 단위의 정의가 아무렇게나 이루어지지 않고, 연산의 가능성을 표면화시키는 방향으로 진행되고 있음을 의미한다. 따라서 이 원칙에 의해, 가로 세로가 각각 $1m$인 직사각형의 넓이는 $1S$가 아닌, $1m^2$로써 정의되고 사용되는 것이다.

또한 다음의 예 역시 이와 같은 점을 분명히 보여준다. 시속 $2km$로 달리는 자동차가 4시간 동안 달린 거리를 구한다고 할 때, $2km/h\times 4h=8km$라고 흔히들 계산하게 된다. 여기서도 '단위 연산'을 가능하게 하는 요인은 바로 연산 정의화에 기인한다. $2km/h$는 나눗셈에 의해 파생된 비율적 수로 1시간에 $2km$를 달린다는 의미를 지닌다. 따라서 4시간을 달린다고 하면 $(2\times 4)km$를 달리게 된다. 이런 의미에서 위의 연산이 가능한 것이지, 단위가 연산 가능함으로써 위의 결과가 나타나는 것은 아니다. 단지 그렇게 외관적으로 보여질 뿐이다. 즉, 속력 $2km/h$의 개념 정의에 기반한 연산의 결과이며, 여기서 속력의 단위 km/h 역시 단위 연산이 가능한 방향으로 설정되어 있기 때문에 단위 연산이 가능한 것으로 착각하게끔 보일 뿐이다.

이렇게 단위 연산이 가능한 방향으로 단위가 정의됨으로써, 수학 학습자는 단위 연산이 본질적으로 가능한 것인 냥 착각 속에 사로잡힐 경향이 커지게 된다. 연구 결과에 의하면 대부분의 학생들은 '가로×세로'가 직사각형의 넓이라는 것을 너무도 당연하게 받아들인다([8], [12], [18], [19]). 이때 '당연하게 받아들인다는 것'은 Skemp([20])가 이야기한 도구적 이해를 말하며, Skemp([20])는 밑변의 길이와 높이를 곱하여 직사각형의 넓이를 구하는 것을 당연하다고 이해한 학생들은 '가로 $20cm$, 세로 $15yard$인 직사각형 밭의 넓이는 얼마인가'라는 물음에 '$300cm^2$이에요. 왜냐하면 넓이는 언제나 제곱센티미터이거든요'라고 답한다고 말한다. 이것은 두 가지 측면에 대한 이해의 결여를 보여주는데, 한 가지는 직사각형의 넓이 공식에 대한 것이며, 다른 한 가지는 단위에 대한 것이다. 전자는 전술한 연구 결과에서 나타나 듯, 당연한 결과로 인식한 인식론적 장애이며, 후자 역시 전자에 기인하여 서로 다른 단위임에도 불구하고 별 생각 없이 넓이의 단위를 인용한 인식론적 장애이다. 마찬가지로 인식론적 장애는 여기에 그치지 않

고, 동질 단위 상황 $2cm \times 3cm = 6cm^2$에서도 같은 방식으로 드러날 것으로 생각된다.

따라서 교수자는 학습자가 가지는 이와 같은 오개념을 바로잡기 위한 별도의 조치 마련이 필요하다. 만약 이러한 교수 노력 없이 단위 연산을 강조하게 되면, 수치 의미나 성질이 갖는 본유의 의미가 퇴색됨으로써, 단위 연산이 애초부터 가능한 것으로 오인하기 쉽다. 따라서 단위 연산 이전에 연산을 개념적 측면에서 재고할 기회를 갖게 할 필요가 있다.

본 연구자는 단위 연산의 가능성이 표면화되지 않는 단위 설정 상황 제시를 제안한다. 즉, 가로 세로가 각각 $1m$인 직사각형의 넓이를 $1S$로 정의한 상황을 제시하고, 이에 대해 논의함으로써 단위 연산이 개념 정의에서 비롯된 것임을 분명히 할 필요가 있다. 이러한 상황의 제시는 비교적 인지적 수용의 어려움이 예상되지만, 그럼에도 불구하고 단위 연산의 가능성이 단위 설정에 기인한 측면을 드러내는데 용이할 것으로 생각된다. 수학적으로 용인되고 검증된 결과적 수학 속에서 이와 같은 측면을 인식하고 읽어내는 것은 학생들에게 쉽지 않다. 따라서 단위 설정의 수학화 과정을 드러내고 인식시킨다는 측면에서 이와 같은 예상치 못한 상황 제시가 필요하며, 이러한 상황 하에서 학생들은 기존 지식과 배치되는 상황을 숙고함으로써 단위 연산 가능성의 본질을 인식하는 기회를 맞게 될 것이다. 아울러 단위의 정의는 단위 연산의 가능성을 지향하는 방향으로 설정되어 왔음을 인식시키는 활동이 필요하다. 즉, 단위의 설정이 아무렇게나 원칙 없이 이루어져 왔던 것이 아니라, 연산 가능성을 지향하는 방향으로 진행되어 왔음을 숙지시켜야 할 것이다.

2. 연산에서 단위의 교수학적 활용 가능성 논의

본 절에서는 연산에서 단위의 교수학적 활용 가능성을 논의함으로써, 단위의 교수 활용의 기반을 마련하고자 한다. 즉, 교수 상황 하에서 어떻게 단위를 적절히 이용해야하는지가 본 절의 화두이다.

먼저, 단위를 통한 개념적 수치의 의미 이해를 돕는 것이 필요하다. 단위는 수치 자체의 집중을 방해하는 비본질적 요소로써의 측면을 지니고 있음과 동시에 단위는 수치의 개념적 성질을 보다 명확히 나타내는 양면성을 지니고 있다. 따라서 우리는 단위의 단점을 숨기고, 이점을 십분 활용할 필요가 있다.

전술하였듯, $1m^2$이라는 넓이는 $1m \times 1m = 1m^2$라는 성질 탄생의 기반으로 작용하는 만큼, 수학에서 본질적인 것은 수치가 갖는 개념적 의미를 이해하는 것이다. 그러나 수학에서 수치는 추상화의 경향성으로 말미암아, 단위로부터 독립하는 경향을 갖는바, 수치 위주로 문제를 다루는 경향을 지닌다. 이러한 경향은 수치의 의미 이해에 방해 요인으로 자리 잡고 있다. 즉, 학생들은 $1m^2$의 개념 정의가 먼저인지, 아니면 $1m \times 1m = 1m^2$라는 연산 결과가 먼저인지를 이해하기 어려

운 것이다. 따라서 단위를 적절히 이용함으로써, 수치의 개념적 측면을 이해하는 단초로써 활용할 필요가 있다. 예를 들어, 사과 10개를 2명이 똑같이 나누어 먹는 상황에서 연산 $10\div 2=5$의 수치 5가 의미하는 바를 고찰하는 상황을 가정해 보자. 이 경우 단위는 5가 갖는 의미를 이해하는 단초로 작용 가능하다. 위 식은 '10개$\div$2명$=$5개/명'로 변형될 수 있으며, 이 경우 단위는 수치 5가 '1명이 먹게 될 사과의 개수'임을 이해하는 실마리가 될 수 있다. 수치의 개념적 측면에 대한 이해를 돕는 단위의 역할에 대한 이해를 강화하기 위해서는 수치의 의미에 대한 반성의 기회가 제공될 필요가 있다. 위 상황에서 '5가 뜻하는 바가 무엇이니?'와 같은 발문이 그 한 예가 될 수 있다. 이 발문에 대해, 학생들은 그 수치가 나오게 된 절차를 설명할 가능성이 적지 않다. 따라서 수치가 나오게 된 절차가 아니라, 얻은 수치 그 자체의 의미에 초점을 둘 수 있도록 유도하는 발문 개발이 요구된다.

다음으로, 단위를 통해 연산의 의미 이해를 돕는 것이 필요하다. 수치에 초점을 둔 교육으로 인해 비록 연산 절차와 과정은 원만히 수행하지만, 연산 결과의 의미를 모르는 문제가 초래될 가능성을 지닌다. 따라서 연산의 결과 의미 이해를 돕는 별도의 교수가 필요하며, 우리는 이것을 단위에서 찾고자 한다. 특히, 곱셈과 나눗셈의 경우 연산 결과가 기존의 것을 탈피한 측면이 강하므로, 단위 배제로부터 연산의 의미가 퇴색될 수 있다. 이런 경우 단위를 적절히 활용함으로써, 오히려 연산 결과의 수치가 갖는 의미를 이해하는 단초로 활용할 필요가 있다.

이를테면, 가로가 $\frac{15}{2}m$, 세로가 $\frac{13}{5}m$인 직사각형 모양의 벽을 칠하는데, $\frac{7}{9}L$의 페인트가 필요한 상황에서 $(\frac{15}{2}\times\frac{13}{5})\div\frac{7}{9}$ 가 뜻하는 바와 $\frac{7}{9}\div(\frac{15}{2}\times\frac{13}{5})$가 뜻하는 바는 분명 다르다. 전자는 $1L$당 칠할 수 있는 넓이를 뜻하고, 후자는 $1m^2$당 필요한 페인트의 양이 된다. 이와 같이 각기 다른 연산을 주고 그 결과가 무엇을 뜻하는지를 숙고해보는 학습 기회가 제공될 필요가 있다. 이러한 숙고의 기회는 연산 결과의 의미 이해를 반성해 보는 기회가 될 것이다. 이것은 초등학교에서부터 중・고등학교까지 유효한 방법이 될 수 있을 것이다. 초등학교에서는 연산 의미에 대한 발문을 수시로 제공함으로써 연산 결과의 의미 이해를 유도하고, 이러한 경험을 살려 중학교와 고등학교에서는 문장제를 비롯한 문제해결에 적용하는 데 초점을 맞춘다면 초・중・고에서 연산 의미 이해에 대한 연결이 공고해질 수 있을 것이다.

셋째, 연산이 어느 대상에 대해 가능할 수 있는지를 숙고할 기회를 제공하는 것이 필요하다. 학생들은 연산할 때, 연산이 불가한 것도 연산할 수 있다고 생각하는 오류를 범할 수도 있다. 이를테면, (넓이) + (길이)가 대표적이다. 이런 오류에 대한 숙고의 기회를 제공함으로써, 연산에 대한 인식 개선을 도와야 할 것이다. 구체적으로 cm^2+cm가 뭐니?, $cm\times cm$은 뭐니? 등을 물음으로써 연산에

대한 대상 인식을 독려해야 할 것이다. 이러한 물음을 통해 단순한 수치 연산에 국한된 사고를 개념적 사고로 확장하고 이행하는 단초를 마련해야 할 것이다.

마지막으로 단위는 반성의 새로운 측면을 가능하게 하는 매개 도구이다. 즉, 물리적 상황에서 탄생한 새로운 공식은 단위의 측면에서 점검 가능하다. 이에 대해 polya([17])는 원뿔대의 옆면의 넓이 공식을 다음과 같이 차원에 의한 검증으로써 점검하고 있다.

> 차원에 의한 검증
> R는 밑면의 반지름, r는 윗면의 반지름, h는 원뿔대의 높이, S는 원뿔대의 옆면의 넓이라면, $S=\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ 이다. 이를 차원에 의해 검증해 보면, $cm^2=1\cdot cm\sqrt{cm^2}$ 으로써 오류가 발견되지 않음으로써 이 공식은 차원의 검증을 통과한 것이다.

이상의 과정은 단위에 의한 검증의 가능성을 보여주며, 이는 반성적 활동의 한 일면이다. 또한 본 연구자는 polya([17])가 제안한 단위를 이용한 반성 활동 이외에 다음을 제안한다. 이른바 단위 연산에 의한 반성 자극 문제로써, 단위 연산의 의미를 반성해 봄으로써, 연산의 의미 이해를 돕는 기회까지 갖게 만들자는 취지를 가진다. 구체적으로 단위 연산에 의한 반성 자극 문제는 다음과 같다; $cm\times cm$는 무엇인가?, cm^2+cm는 무엇인가?, $km\div$시는 무엇인가? 이러한 물음에 대하여 답하기 위해 숙고할 기회를 제공함으로써, 단순히 연산의 절차를 이해하는데 그칠 것이 아니라, 연산의 결과가 갖는 개념적 의미까지 이해할 수 있도록 도와야 할 것이다.

이상에서 단위 활용의 이점을 언급하였지만, 단위 활용에서 유의해야 될 사항 역시도 존재한다. 본 연구에서 단위의 활용은 연산에 대한 절차적 접근에 그치는 이상의 개념적 접근의 필요성을 재고하기 위한 것이다. 그러나 자칫 연산의 개념적 측면을 강조하다보면, 자칫 인지적 장애를 유발할 수도 있다.

> 분수의 승법에 관한 톤스톨의 논의는 흥미가 있다. 이것을 설명하기 위한 전제로서 우리는 파치올리가 분수의 경우 승법을 계산하면, 그 곱은 피제수보다 작아지는 것에 매우 당혹했다는 것을 말하여야 할 것 같다. 그래서 파치올리는 원래 곱하다는 것은 '증가한다'는 뜻이라는 걸 성서에서 인용하여 증명했다. ....(중략)....... 후세의 저자들도 같은 곤란에 부딪쳤다([13]).

이는 수치의 개념적 징후에 초점을 맞출 때, 언제든지 발생할 수 있는 인지적 갈등으로 단위를 통해 연산 결과의 의미를 재고하고자 한다면, 그에 따른 부작용을 최소화하는 방향 모색 역시 필요하다. 수치가 갖는 의미와 아울러, 개념 이미지를 수정할 기회를 제공하는 것이 바람직한 교수라고 생각된다.

V. 결론

본 연구는 단위의 측면에 입각하여, 연산을 고찰해 봄으로써, 단위 연산이 갖는 특징을 명료화하였으며, 또한 수학에서 단위 연산의 본질적 가능성을 재고해 보았다. 아울러 연산에서 단위의 교수학적 활용 가능성을 논의할 수 있었다.

그 결과, 단위의 측면에서 덧셈과 뺄셈은 동질량에 대한 연산일 뿐 만 아니라, 연산의 결과 역시 동질량을 벗어나지 않는 연산임을 알 수 있었다. 이에 반해 곱셈과 나눗셈은 동질량 뿐만 아니라, 비동질량까지도 연산 가능한 연산으로, 그 결과 역시도 새로운 연산을 양산하는 것이었음을 알 수 있었다. 한편, 곱셈과 나눗셈이 덧셈과 뺄셈에 기원한 연산임을 고려할 때, 이들은 동질량의 보존적 성격을 지닌 덧셈과 뺄셈의 특징도 가지지만, 이러한 성격만으로 설명될 수 없는 예들의 존재로부터 곱셈과 나눗셈은 연산 발달 과정에서 덧셈과 뺄셈으로부터 독립된 연산으로서 상승하게 된 초월적 연산이라는 가설을 제안할 수 있었다.

또한 단위 연산의 본질적 가능성을 재고해 보았으며, 다음의 결과를 얻을 수 있었다. 단위 연산은 본질적으로 가능한 것은 아니며, 그것이 표면적으로 가능하게 보이는 것은 '단위 연산'을 가능하게 하는 연산 정의화(化)에 기인함을 알 수 있었다. 즉, 연산의 계산 가능성의 이점을 십분 활용할 목적으로, 이를 표면화시키는 방향으로 연산을 조작적으로 정의한 것이다. 이는 연산 단위의 정의가 아무렇게나 이루어지지 않고, 연산의 가능성을 표면화시키는 방향으로 진행되고 있음을 의미한다.

따라서 우리는 그 표면적 특성에 매혹되어, 연산이 가능하다는 착각에 사로잡힐 수 있다. 더욱이 그 대상이 학습자라면 더욱 그러하다. 이런 경향에 입각할 때, 결국 교수자는 학습자가 가지는 이와 같은 오개념을 바로잡기 위한 별도의 조치 마련이 필요하다. 아울러 단위 연산이 가능한 이유와 맥락에 대한 이해를 돕는 조치가 필요할 것이다. 즉, 학습자로 하여금 단위 연산은 근본적으로 이를 가능하게 하는 연산 정의화에 기인한다는 사실을 이해시키는 교수가 마련되어야 할 것이다. 이를 통해 궁극적으로 연산이 낳은 새로운 대상의 단위가 임의적으로 설정된 것이 아닌 조작적 설정임을 인식시켜야 할 것이다.

마지막으로 이러한 고찰을 기반으로 단위의 교수학적 활용 방안에 대해 논의할 수 있었다. 먼저, 단위를 통한 개념적 수치의 의미 이해를 돕는 것이 필요하다. 단위는 수치 자체의 집중을 방해하는 비본질적 요소로써의 측면을 지니고 있음과 동시에 단위는 수치의 개념적 성질을 보다 명확히 나타내는 양면성을 지니고 있다. 따라서 우리는 이점을 십분 활용할 필요가 있다.

둘째, 단위를 통해 연산의 의미 이해를 돕는 것이 필요하다. 수치에 초점을 둔 교육으로 인해 비록 연산 절차와 과정은 원만히 수행하지만, 연산 결과의 의미를 모르는 문제가 초래되었다. 따라서 연산의 결과 의미 이해를 돕는 별도의 교수가

필요하며, 우리는 이것을 단위에서 찾고자 한다.

셋째, 연산이 어느 대상에 대해 가능할 수 있는지를 숙고할 기회를 제공하는 것이 필요하다. 학생들은 연산을 할 때, 연산이 불가한 것도 연산할 수 있다고 생각하는 오류를 범할 수도 있다. 이를테면, (넓이) + (길이)가 대표적이다. 이런 오류에 대한 숙고의 기회를 제공함으로써, 연산에 대한 인식 개선을 도와야 할 것이다.

넷째, 단위는 반성의 새로운 측면을 가능하게 하는 매개 도구이다. 즉, 물리적 상황에서 탄생한 새로운 공식은 단위의 측면에서 점검 가능하다. 이 점을 교육 현장에서 십분 활용함으로써, 반성의 일환을 구체화하여 보여주는 교수가 병행되어야 할 것이다.

이렇듯 단위를 교수에 적절히 활용함으로써, 수치가 지닌 개념적 의미에 집중하고, 이를 통해 연산의 결과에 내재된 의미를 이해하는 기초를 마련해야 한다는 점은 수학의 발달 경향과 대치되는 교수의 측면이다. 즉, 추상화를 지향하는 수학의 발달은 수치를 단위에서 독립된 개체로써 작용하기를 원하지만, 교수의 측면에서 단위로부터 독립된 수치는 수치의 의미 이해와 그 수치에 의한 연산 결과 이해의 어려움을 초래하게 되었다. 이런 측면에서 수치의 의미와 그 연산 결과의 의미를 이해하는 매개 도구로 단위를 적절히 활용하자는 것이 본 연구의 취지이다.

본 연구로부터 다음과 같은 몇 가지 시사점을 얻을 수 있다. 첫째, 수학의 발전 방향이 교수 방향과 다를 수 있음을 알 수 있다. 수치의 단위로부터의 독립을 지향해 온 수학의 발전 방향과 달리, 교수 방향은 수치와 그 연산 의미 이해를 위해 단위를 적절히 활용하는 방안이 요구되는바, 이는 수학과 그 교수의 방향이 다를 수 있음을 확연히 보여준다. 둘째, 표면적으로 나타나는 수학적 현상 그대로를 인지하고 수용하게 되면 올바른 수학 학습이 결여될 수 있음을 알 수 있다. 수학자들이 애초 단위를 설정할 때, 연산 가능하도록 설정한 탓으로, 우리는 본질적으로 연산이 가능한 것으로 인식하기 쉽다. 그러나 사실 이러한 현상은 외현적일 뿐, 본질적으로 단위 연산은 수치 단위가 갖는 개념적 의미에 기반한 것이다. 셋째, 수학에서 본질적 수치 대신 부가적인 비본질적 대상물이 본질 이해에 도움이 될 수 있음을 알 수 있다. 수학은 수를 대상으로 학문인바, 수는 수학 연구의 주된 대상이다. 그런데 수에만 집중할 경우, 그 수의 의미와 수 사이의 연산의 의미가 퇴색되기 쉽다. 이런 경우, 수치에 부가된 단위가 도리어 수치의 본질을 암시하는 단초로 작용할 수 있게 되는 것이다.

참고문헌

[1] 강문봉·강흥규·김수미·박교식·박문환·서동엽·송상헌·유현주·이종영·임재훈·정동권·정은실·정영옥(2005). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

[2] 교육과학기술부(2010) 초등학교 수학 4-2. 서울: 두산동아.

[3] 권순애·김현주(2009). 9학년 학생들의 유도단위에 대한 이해도 조사. 새물리, 59(1), 18-26.

[4] 김성숙(2005). 역사적 관점으로 본 메소포타미아 수학. 한국수학사학회지, 18(4) 39-48.

[5] 네이버 국어사전(2010). http://krdic.naver.com/detail.nhn?docid=4004100

[6] 변희현(2005). 소수 개념의 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

[7] 변희현(2009). 측정의 관점에서 본 덧·뺄셈의 통합적 이해. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 19(2), 307-319.

[8] 이경화(2001). 다각형의 둘레와 넓이에 관한 수업 아이디어. 대한수학교육학회지 학교수학, 3(2), 423-445.

[9] 정원(2009). '계산 기술자'에서 '네델란드의 수학자'로: 시몬 스테빈을 통해 본 근대 초 네델란드에서의 실용 수학과 수학자의 지위 상승. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

[10] 정은실(2010). 초등학교 수학교과서에서의 양(量)의 계산에 대한 연구. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 20(4), 445-458.

[11] 한인기·신현용(2001). 다각형의 넓이 및 그 활용에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 12, 155-170.

[12] 허학도(2006). 직사각형의 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

[13] Cajori, F.(1894) *A History of Mathematics*. 정지호 역, 1977, 캐조리 수학사. 서울: 창원사.

[14] Dewey, J.(1901). *Psychology and social practice. Chicago*: University of Chicago Press.

[15] Freudenthal, H.(1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.

[16] Lamon, S. J.(1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive process. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg(Eds.), *Rational Numbers An Integration of Research*(pp. 131-156). New Jersey, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

[17] Polya, G.(1971). *How to solve it*. 우정호 역(2002). 어떻게 문제를 풀 것인가? 서울: 교우사.,

[18] Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist, M. M., & Smith, N. L.(1998). *Helping children learn mathematics*. (5th ed.). 강문봉 외 19인 역(1999). 초등 수학 학습 지도의 이해. 서울: 양서원.
[19] Schifer, D., & Syzmaszek, J.(2003). Structuring a rectangle: Teachers write to learn about their students' thinking. In D. H. Clements, & G. Bright(Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 143-156). Reston, VA: NCTM.
[20] Skemp, R. R.(1987). *The psychology of learning mathematics*. 황우형 역(1997). 수학학습심리학. 서울: 민음사.
[21] Schwartz, J. L.(1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert, M. Behr(Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades*(pp.41-52). Lawrence Erlbaum Associates: NCTM.
[22] White, M. A.(1998). Quantity calculus: Unambigous designation of units in graphs and tables. *Journal of Chemical Education, 75*(5), 607-609.

Roh, EunHwan
Department of Mathematics Education
Chinju National University of Education
Jinju 660-756, Korea
E-mail: idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr

Kang, JeongGi[4)]
Namsan Middle School
Chang-Won 642-110, Korea
E-mail: jeonggikang@gmail.com

Jeong, SangTae
Sacheon Dongsung Elementary School
Sacheon, 664-932, Korea
E-mail: sangtaejeong@gmail.com

4) Corresponding author