East Asian Math. J.
Vol. 30 (2014), No. 4, pp. 475-491
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2014.032

최소시간 강하선 문제의 실증적 · 수학적 고찰

Empirical and Mathematical Study on the Brachistochrone Problem

이 동 원 · 이 양 · 정 영 우[1)]

ABSTRACT. We can easily see the ‘cycloid slide’ in the many mathematics and science museums. The educational materials, however, do not give us any mathematical principle.
For this reason, we, in this thesis, first study the brachistochrone problem in the history of mathematics, and suggest a method of how to teach the principle using ‘the dynamic geometry software GSP5’ in order to help students understand the idea that the cycloid is the brachistochrone.
Secondly, we examine the origin of the calculus of variations and apply it to prove the brachistochrone problem in order to build up the teachers’ background knowledge. This allows us to increase the worth of history of mathematics and recognize how useful the learning is which uses technological tools or materials, and we can expect that the learning which makes use of cycloid slide will be meaningful.

Ⅰ. 서론

역사 속에서 최소시간 강하선 문제(The Brachistochrone Problem[2)])는 1696년 스위스의 수학자 요한 베르누이(Johann Bernoulli)에 의해 Acta Eruditorum에 다음과 같이 제시되었다.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M

2014년 7월 30일 투고, 2014년 8월 26일 심사완료.
2010 Mathematics Subject Classification: 97A30, 97-03
Key word: brachistochrone problem, Johann Bernoulli, Calculus of Variations, GSP5
1) 교신저자
2) 일반적으로 brachistochrone을 ‘최단강하선’ 또는 ‘최속강하선’ 또는 ‘최단시간 강하곡선’이라 번역하지만, 본 연구에서는 시간에 중점을 두어 ‘최소시간 강하선’으로 번역한다.

©2014 The Youngnam Mathematical Society
(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

viam AMB, per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore preveniat ad alterum punctum B(The Inter-IREM Commision(1997) 재인용).

이 문제는 '최단거리'에 관한 인간의 직관과는 달리 '최소시간'이란 관점에서는 직선이 아닌 곡선이 그러한 경로가 됨을 보여준다. 요한 베르누이는 이 곡선이 사이클로이드임을 말하고 있다.

베르누이가 제시한 이 문제에 대해서 그의 형인 야곱 베르누이를 비롯한 당시의 몇몇 수학자가 해답을 제시하였는데, 이 과정 속에서 오늘날 최소시간 강하선의 수학적 증명을 가능하게 하는 변분법(Calculus of Variations)이 발전하였다. 물론 범함수(functional)에 대한 적분의 극값 문제를 연구하는 분야인 변분법을 이용하여 최소시간 강하선이 사이클로이드임을 밝히는 수학적 증명은 전문성 신장을 위한 교사지식의 측면에서는 중요하지만, 중등학교 학생들의 수준에는 적합하지 않다. 그러므로 학생들에게 수학적 개념을 발견하게 하고 체험하게 하는 교구가 여러 수학·과학 관련 체험관이나 수학체험전 등에서 활용되고 있다.


[그림 1] 국립서울과학관


[그림 2] 군포수학체험관


[그림 3] 만들기 교구

여기서 어떤 학생들은 가장 짧은 경로인 직선보다 더 긴 경로인 사이클로이드가 더 빠른 경로라는 사실에만 집중하여 구슬을 이용한 반복적인 실험에만 치중하는 반면, 또 다른 학생들은 이러한 현상의 원인에 대한 호기심을 가질지도 모른다. 그러나 이 교구는 최소시간 강하선이 사이클로이드라는 결과만을 확인시켜줄 뿐, 왜 사이클로이드가 최소시간 강하선인지에 대한 수학적 원리를 설명하지는 못한다. 사이클로이드 모양의 미끄럼틀을 따라 하강하는 구슬의 가속도가 직선 모양의 미끄럼틀을 따라 하강하는 구슬의 가속도보다 더 크다는 설명은 충분하지 못하다. 따라서 교사는 학생들의 수준을 고려한 적절한 설명을 준비해야 하고, 이것이 수학사적 내용과 동반될 때 사이클로이드 미끄럼틀을 통한 최소시간 강하선 학습이 학생들

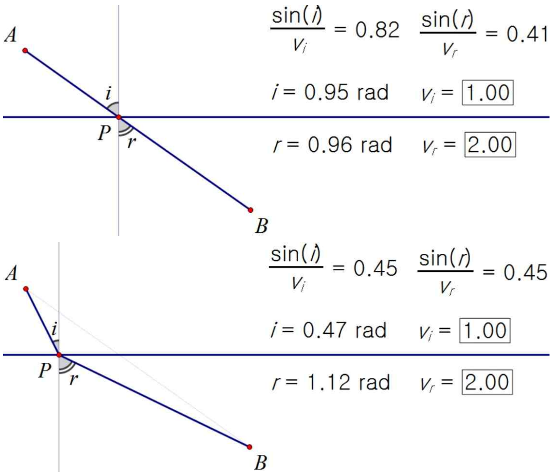
에게 유의미하게 된다.

본 연구에서는 학생들에게 가르칠 교수학적 지식으로서 요한 베르누이가 문제를 제시한 이듬해인 1697년에 동일한 학술지에 제시했던 방법을 탐구형 기하소프트웨어 GSP 5로 구현하여 학생들의 이해를 돕고, 이것이 실제로 사이클로이드임을 정당화 한다. 또한 사이클로이드 미끄럼틀을 통하여 최소시간 강하선 문제를 지도해야 할 교사의 학문적 배경지식으로서 변분법의 기원과 발전 그리고 이것을 이용한 수학적 증명을 소개한다.

Ⅱ. 요한 베르누이의 방법과 GSP 5를 활용한 정당화

1. 스넬의 법칙

요한 베르누이의 방법을 이용하여 최소시간 강하선 문제를 해결하기 위해서는 우선 빛의 굴절에 대한 성질인 ‘스넬의 법칙(Snell’s law)’을 이해해야 한다.

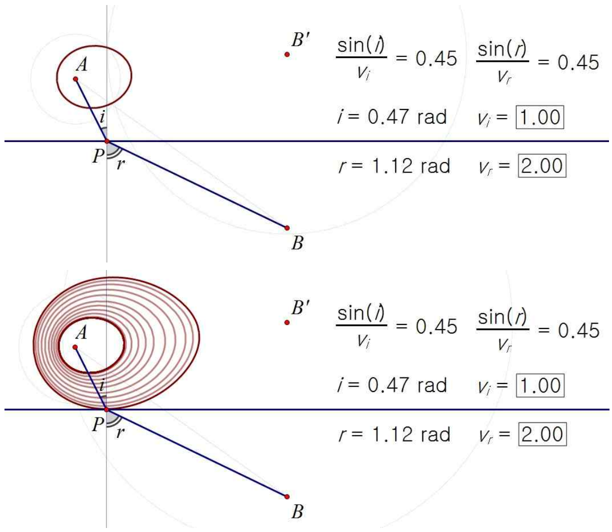


[그림 4] 스넬의 법칙

[그림 4]와 같이 점 A로부터 점 B로 향하는 빛이 서로 다른 두 매질을 통과할 때, 각 매질의 굴절률에 의해 결정되는 빛의 속력을 각각 v_i와 v_r이라 하자. GSP 5의 ‘매개변수’ 기능을 활용하면 각 매질에 대한 빛의 속력을 입력할 수 있다. 이 때 빛이 굴절되는 두 매질의 경계에 대한 입사각 i와 반사각 r에 대하여 $\dfrac{\sin(i)}{v_i}$ 의 값과 $\dfrac{\sin(r)}{v_r}$의 값이 같아지도록 점 P를 옮기면 점 A로부터 점 B로 향하는

굴절된 경로 APB를 얻게 된다. 스넬의 법칙에 따르면, 이 굴절된 경로 APB가 바로 점 A로부터 점 B로 향하는 최소시간 경로이다. 빛은 최소시간 경로를 택한다는 '페르마의 원리(Fermat's principle)'에 의해 이 경로는 점 A로부터 점 B로 향하는 빛의 이동경로가 된다.

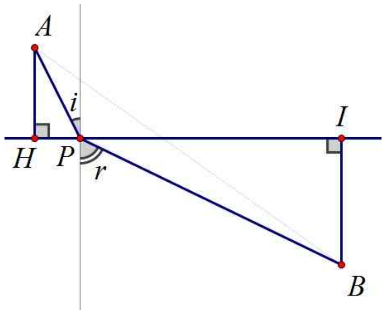
스넬이 법칙을 따르는 경로가 최소시간 경로가 됨을 검증하는 방법에는 준타원(quasi-ellipse)을 활용하는 방법과 미분을 이용하는 방법이 있다. 우선, GSP 5로 준타원을 작도하여 스넬의 법칙을 검증해 보자.



[그림 5] 준타원을 이용한 스넬의 법칙 검증

빛이 경로 APB를 따라 이동하는 시간은 $\dfrac{AP}{v_i}+\dfrac{PB}{v_r}$이고, [그림 5]의 경우는 빛의 이동시간이 $\dfrac{AP}{1}+\dfrac{PB}{2}$이다. 이제 [그림 5]와 같이 점 A와 두 매질의 경계면에 대한 점 B의 대칭점 B'를 두 초점으로 하고, $2AP+B'P$의 값이 일정한 준타원을 작도하자. 여기서 $2AP+B'P$의 값을 키워나가면 준타원은 경계면 위의 점 P에서 접함을 확인할 수 있다. 따라서 준타원의 정의에 의해 경로 APB는 최소시간 경로이고, 빛은 이 경로를 따라 이동한다.

준타원은 실제로 중등학교 교육과정에서 다루어지지 않는 주제이므로 이것을 이용한 검증은 고등학교에서 타원을 배운 상위권 학생들이나 영재교육을 받는 학생들을 대상으로 소개하는 것이 적절하다. 일반계 고등학교의 학생들에게 적절한 스넬의 법칙 검증방법으로는 미분을 이용한 방법이 있다.



[그림 6] 미분을 이용한 스넬의 법칙 검증

[그림 6]과 같이 두 매질의 경계면에 대한 점 A와 B의 수선의 발을 각각 H, I라고 하자. 빛이 경로 APB를 따라 이동하는 시간은 $\frac{AP}{v_i}+\frac{PB}{v_r}$이고, 여기서 $HP=x$라 두면 선분의 길이 x에 대한 시간 T의 관계식은 다음과 같다.

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+AH^2}}{v_i}+\frac{\sqrt{(HI-x)^2+BI^2}}{v_r}$$

시간 T의 최솟값을 구하기 위해 $T'(x)=0$을 만족하는 x의 값을 찾으면

$$\frac{1}{v_i}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+AH^2}}+\frac{1}{v_r}\frac{(-2)(HI-x)}{2\sqrt{(HI-x)^2+BI^2}}=0$$

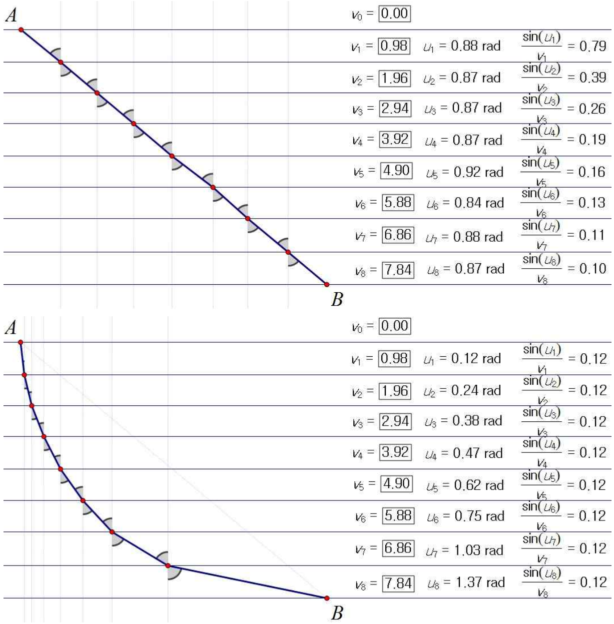
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{v_i}\frac{x}{\sqrt{x^2+AH^2}}=\frac{1}{v_r}\frac{(HI-x)}{\sqrt{(HI-x)^2+BI^2}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{v_i}\frac{HP}{AP}=\frac{1}{v_r}\frac{PI}{PB}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{v_i}\sin(i)=\frac{1}{v_r}\sin(r)$$

따라서 선분의 길이 x에 대하여 $\frac{\sin(i)}{v_i}=\frac{\sin(r)}{v_r}$이 성립할 때, 시간 T는 최소가 된다.

2. 최소시간 강하선 문제에 대한 요한 베르누이의 방법



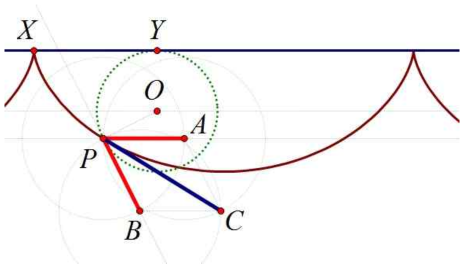
[그림 7] 요한 베르누이 방법의 시연

이제 스넬의 법칙을 이용하여 요한 베르누이의 방법을 살펴보자. 그는 광학적 성질인 스넬을 법칙을 역학적 문제인 최소시간 강하선 문제에 적용하였다. [그림 7]과 같이 물체가 점 A로부터 점 B로 향하여 하강할 때, 그는 이 물체가 하강하는 공간을 여러 개의 층으로 나누었다. 여기서 각 층 사이의 간격은 각 층에서 하강하는 물체의 속력이 일정함을 가정할 수 있도록 충분히 좁다고 하자. 최소시간 강하선 문제에서 물체는 오로지 중력만의 영향을 받으므로 GSP 5의 '매개변수 창'에 물체가 위층에서 아래층으로 하강할수록 일정하게 증가하는 속력을 입력하자. '측정'과 '계산' 기능을 이용하여 각 층에서 결정되는 $\dfrac{\sin(u)}{v}$의 값이 일정하도록 각 층들의 경계선과 점 A와 점 B 사이를 잇는 경로의 교점들을 [그림 7]과 같이 옮기면, 스넬의 법칙에 의하여 이 경로는 점 A로부터 점 B로 향하는 최소시간 경로가 된다. 요한 베르누이는 각 층 사이의 간격이 좁아질수록 이 경로가 사이클로이드에 가까워짐을 주장하였다.

3. 요한 베르누이의 방법에 대한 시각적 정당화

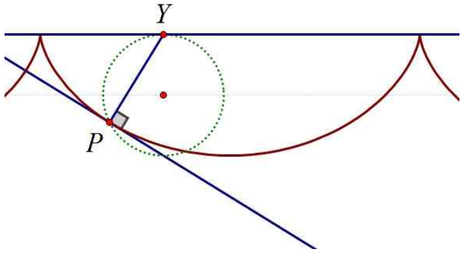
다음으로 사이클로이드 위의 임의의 점에 대한 $\dfrac{\sin(u)}{v}$의 값이 일정함을 확인하여 요한 베르누이의 주장이 참임을 확인하자. 여기서 u는 사이클로이드 위의 임의의

의 점에 대한 접선과 이 점을 지나는 지면에 대한 수선이 이루는 각이다. 따라서 우선 사이클로이드의 접선을 작도해야 한다. 사이클로이드의 접선을 작도하는 방법은 1634년 프랑스 수학자 로베르발(Roberval)이 Traite des indivisible에서 제안했던 벡터의 합을 이용한 방법과 1638년 데카르트가 제안한 방법이 있다. 먼저 로베르발의 방법을 살펴보자.



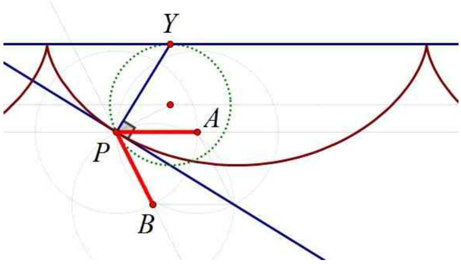
[그림 8] 로베르발의 접선 작도법

사이클로이드는 지면 위를 미끄러지지 않고 구르는 룰렛(roulette) 위의 한 점에 대한 자취이다. 여기서 일어난 운동을 [그림 8]을 통하여 살펴보면, 룰렛 위의 점 P가 룰렛의 둘레를 따라 움직이는 원운동과 룰렛이 지면을 따라 수평방향으로 이동하는 직선운동이 있다. 룰렛 위에서의 점 P의 운동방향은 원의 접선방향인 벡터 $\overrightarrow{PB}$와 같고, 지면과 수평방향으로 이동한 룰렛의 운동방향은 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 같다. 따라서 지면을 미끄러지지 않고 구르는 룰렛 위의 점 P의 운동방향은 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 합벡터이고, 이것은 두 벡터가 이루는 평행사변형의 대각선 벡터 $\overrightarrow{PC}$와 같다. 여기서 룰렛은 지면을 미끄러지지 않고 구르므로 호의 길이 $\widehat{PY}$와 선분의 길이 XY는 서로 같다. 따라서 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 크기는 서로 같고, 두 벡터가 이루는 평행사변형은 마름모이다. 즉 사이클로이드의 접선은 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 이등분선이다.



[그림 9] 데카르트의 접선 작도법

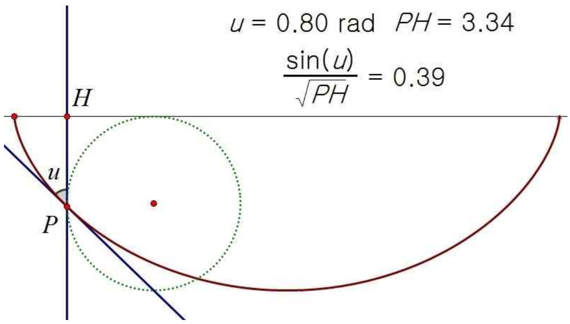
1638년 데카르트는 메르센(Père Mersenne)에게 보낸 편지에서 자신의 작도법을 설명하였는데, 그는 사이클로이드 위의 임의의 점에 P에 대한 접선이 점 P와 룰렛과 지면의 접점인 Y를 연결한 선분 PY의 수선임을 주장했다(그림 9). 이 방법은 1830년 프랑스 수학자 미셸 샤르(Michel Chasles)에 의해 일반화 되는데, 샤르는 점 Y를 회전이동의 순간중심(instantaneous center of rotation)이라 하였다.

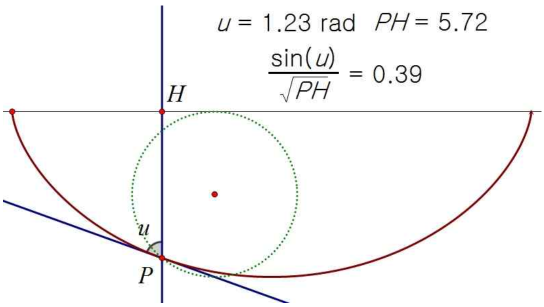


[그림 10] 두 접선 작도법의 비교

GSP 5를 이용하여 실제로 로베르발과 데카르트의 방법을 비교해 보면, [그림 10]과 같이 데카르트의 방법으로 작도한 접선이 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 이등분선과 일치함을 쉽게 확인할 수 있다.

이제 사이클로이드 위의 임의의 점에 대한 접선을 작도했으므로, [그림 11]과 같이 '측정' 기능을 이용하여 각 u를 측정하자.





[그림 11] 요한 베르누이의 방법과 사이클로이드의 비교

여기서 이 물체의 질량을 m이라 할 때, 중력가속도 g와 수직방향으로 물체가 하강한 거리 PH에 대한 물체의 위치에너지는 $mg(-PH)$이고, 운동에너지와 위치에너지의 합이 일정하다는 역학적 에너지 보존의 법칙에 의해 $\frac{1}{2}mv^2+mg(-PH)$의 값은 일정하다. 하강을 시작하는 점에서 물체의 에너지가 0이므로

$$\frac{1}{2}mv^2+mg(-PH)=0$$

이다. 따라서 물체의 하강속력 v는

$$v=\sqrt{2gPH}$$

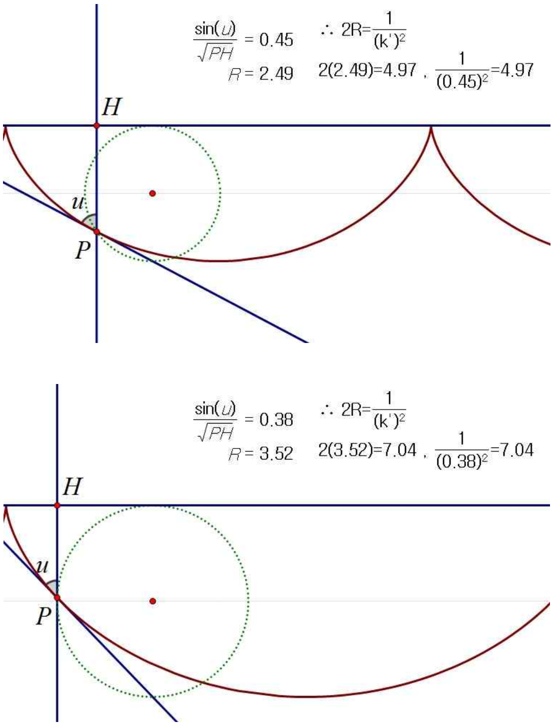
이므로 $\frac{\sin(u)}{v}$의 값 대신 $\frac{\sin(u)}{\sqrt{PH}}$의 값이 일정함을 확인하면 충분하다. [그림 11]에서 볼 수 있듯이, 선분 PH 의 값을 측정하고 '계산' 기능을 이용하여 사이클로이드 위의 임의의 점 P에 대한 $\frac{\sin(u)}{\sqrt{PH}}$의 값을 계산하면 점 P를 움직여도 $\frac{\sin(u)}{\sqrt{PH}}$의 값이 일정함을 확인할 수 있다.

실제로 여기서 $\frac{\sin(u)}{\sqrt{PH}}=k$라 하면, 이 값은 굴러가는 룰렛의 반지름 R과

$$2R=\frac{1}{k^2}$$

의 관계가 성립한다. 이 또한 '계산' 기능을 이용하여 확인할 수 있는데, [그림 12]와 같이 룰렛의 반지름에 변화를 주면 $\frac{\sin(u)}{\sqrt{PH}}$값이 변하지만, $2R=\frac{1}{k^2}$인 관계

는 항상 성립함을 볼 수 있다.



[그림 12] 룰렛의 반지름과 $\frac{\sin(u)}{\sqrt{PH}}$ 값의 관계

Ⅲ. 수학적 정당화

이 장에서는 최소시간 강하선 문제로부터 탄생하게 된 변분법의 기원과 발전과정을 간략하게 살펴보고, 이를 이용하여 최소시간 강하선이 사이클로이드임을 밝히는 수학적 증명을 소개한다. 이러한 내용은 교사의 교과 전문성 신장과 교수 · 학습의 배경 지식을 위한 것이다.

1. 변분법

1696년 요한 베르누이가 제안한 최소시간 강하선 문제에 대하여 당시 뉴턴, 라이프니츠, 로피탈 그리고 요한 베르누이의 형인 야곱 베르누이가 해답을 제시했는데, 특히 야곱 베르누이의 방법이 일반적이었다. 그는 등주곡선(isoperimetral curves)에 대한 연구에서 최소시간 강하선 문제와 유사한 특성을 가진 여러 가지 문제들에 대한 일반적인 법칙들을 제시하였고, 이 과정 속에서 수학의 새로운 분야인 변분법이 탄생하였다. 이후 요한의 제자인 오일러가 이러한 아이디어들을 재조직 및 단순화 하였고, 마침내 변분법을 학문적으로 정립하였다.

미적분학에서 몇 개의 독립변수에 대한 함수의 극값을 찾는 문제의 일반화인 변분법은 함수들의 집합을 정의역으로 하는 함수인 범함수, 특히 정의역이 곡선들의 집합인 함수에 대한 적분이 극값을 가지게 하는 적절한 곡선을 찾는데 그 목적을 둔다. 변분법을 이용하여 해결할 수 있는 문제에는 최소시간 강하선 문제를 비롯하여, 고정된 길이의 곡선으로 둘러싸인 가장 넓은 폐곡선을 찾거나 고정된 겉넓이를 가지면서 부피가 최대인 도형을 찾는 등주문제(isoperimetric problem), 평면 또는 구면 위에서 두 점 사이의 가장 짧은 거리를 갖는 곡선을 구하는 측지선(geodesics)문제 등이 있으며, 최소시간 강하선 문제는 이러한 변분법의 결정적인 기원이다. 이제 이 방법을 이용하여 최소시간 강하선 문제의 답이 사이클로이드임을 증명하자.

2. 변분법을 이용한 수학적 증명

변분법의 목적은 독립변수 y와 이 값에 의존하는 임의의 함수 또는 경로 x, 그리고 y에 대한 x의 도함수 x'를 포함하는 범함수 $F(y,x,x')$에 대하여 경로 x 위에서 $F(y,x,x')$의 선적분이 극값을 가지게 하는 특별한 경로를 찾는 것이다[3]. 본고에서는 이 특별한 경로를 최적경로라 하겠다. 최적경로를 찾도록 해주는 방정식이 바로 오일러-라그랑주 방정식이다. 이 방정식은 1744년 오일러에 의해 처음으로 유도되었고, 이후 1788년 라그랑주가 역학에 적용하였다.

가. 오일러-라그랑주 방정식

[그림 13]과 같이 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 잇는 임의의 경로들 중 최적경로 $x(y, 0)$이라 할 때, 이 경로에 인접한 이웃경로 $x(y, \epsilon)$를 다음과 같이 정의하자.

$$x(y, \epsilon)= x(y, 0)+ \epsilon\eta(y)$$

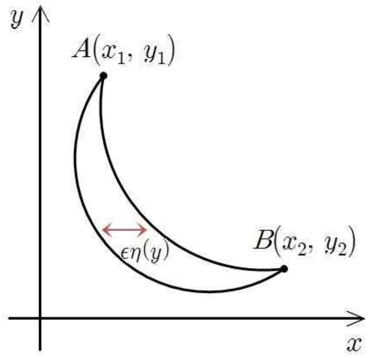
여기서 $\eta(y)$는 이웃경로의 임의성을 정의하기 위해 도입한 새로운 함수이고, 이 함수에 의해 변화되는 경로들이 모두 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나도록

$$\eta(y_1)= \eta(y_2)= 0$$

3) 오일러-라그랑주 방정식을 소개하는 대부분의 문헌에는 독립변수 x에 대한 경로 y를 포함하는 범함수 $F(x,y,y')$ 를 이용하여 오일러-라그랑주 방정식을 유도하지만, 본 연구에서는 계산의 편의를 위해 변수 x와 y를 서로 바꾸어 사용한다.

을 만족한다. 또한 ϵ는 이웃경로 $x(y,\epsilon)$가 최적경로 $x(y,0)$와 단지 무한소의 차이가 생기도록 충분히 작다고 하자. 즉 $\epsilon\to 0$일 때, 이웃경로 $x(y,\epsilon)$는 최적경로 $x(y,0)$가 된다.

이제 미적분학에서 함수가 특정한 x의 값에 대하여 극값을 가질 때 $\frac{dy}{dx}=0$인 것처럼, 이웃경로 $x(y,\epsilon)$ 위에서 범함수 $F(y,x(y,\epsilon),x'(y,\epsilon))$의 선적분



[그림 13]

$$T(\epsilon)=\int_{y_1}^{y_2}F(y,\, x(y,\,\epsilon),\, x'(y,\,\epsilon))dy$$

이 최적경로 $x(y,0)$에 대하여 $\left[\frac{\partial T(\epsilon)}{\partial\epsilon}\right]_{\epsilon=0}=0$임을 이용하자. 즉 범함수 $F(y,x(y,\epsilon),x'(y,\epsilon))$의 선적분은 $\epsilon=0$일 때, 극값을 가진다. 그러면

$$\frac{\partial T(\epsilon)}{\partial\epsilon}=\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x(y,\,\epsilon)}{\partial\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial x'(y,\,\epsilon)}{\partial\epsilon}\right)dy$$

이다. 여기서 $x(y,\epsilon)=x(y,0)+\epsilon\eta(y)$이므로 $\frac{\partial x(y,\,\epsilon)}{\partial\epsilon}=\eta(y)$, $\frac{\partial x'(y,\,\epsilon)}{\partial\epsilon}=\eta'(y)$이고, 따라서

$$\frac{\partial T(\epsilon)}{\partial\epsilon}=\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta(y)+\frac{\partial F}{\partial x'}\eta'(y)\right)dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial F}{\partial x}\eta(y)dy+\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta'(y)dy$$

이다. 부분적분법을 적용하면

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta'(y)dy=\left[\frac{\partial F}{\partial x'}\eta(y)\right]_{y_1}^{y_2}-\int_{y_1}^{y_2}\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta(y)dy$$

이고, $\eta(y_1)=\eta(y_2)=0$에 의해

$$\frac{\partial T(\epsilon)}{\partial\epsilon}=\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial F}{\partial x}\eta(y)dy-\int_{y_1}^{y_2}\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}\eta(y)dy=\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\eta(y)dy$$

이다. 가정에 의해 $\epsilon\to 0$이면 이웃경로 $x(y,\epsilon)$는 최적경로 $x(y,0)$이 되고, 이 때

범함수의 적분은 극값을 가지므로 $\left[\frac{\partial T(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0}=0$이 된다. 즉

$$\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\eta(y)dy=0$$

이다. 여기서 $\eta(y)$는 임의의 함수이므로

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}=0$$

이 되어야 한다. 이 편미분방정식을 '오일러-라그랑주 방정식'이라 부른다. 간단하게 말하면, 경로 x 위에서 범함수 $F(y,x,x')$에 대한 선적분이 극값을 가진다면, 즉 x가 최적경로라면, 범함수 $F(y,x,x')$는 x에 대하여 오일러-라그랑주 방정식을 만족한다.

그러나 오일러-라그랑주 방정식이 최적경로의 존재성을 보장하지는 않는다. 즉 오일러-라그랑주 방정식의 성립은 최적경로의 존재를 위한 필요조건이지 충분조건은 아니다.[4)]

나. 최소시간 강하선 문제의 증명

좌표평면 위의 점 $A(x_1, y_1)$로부터 점 $B(x_2, y_2)$에 이르는 최소시간경로 x를 생각하자. 여기서 x는 독립변수 y에 의존한다. 우리는 이 경로가 사이클로이드임을 보일 것이다. 이제 이 경로를 유한개의 선분으로 이루어진 꺾은선으로 표현하고, 그 중 한 선분의 길이를 [그림 14]와 같이 $\triangle s$라고 하면

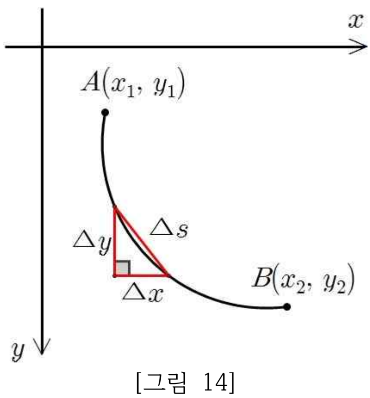
$$\triangle s=\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}=\left(\sqrt{\left(\frac{\triangle x}{\triangle y}\right)^2+1}\right)\triangle y$$

이다. 이제 $\triangle y\rightarrow 0$이면

$$ds=\left(\sqrt{(x')^2+1}\right)dy$$

이다. 여기서 x'은 y에 대한 x의 도함수다.

이 경로를 따라서 오직 중력만의 영향을 받는 물체가 점 $A(x_1, y_1)$로부터 점 $B(x_2, y_2)$를 향하



[그림 14]

4) 자세한 설명은 George B. Arfken · Hans J. Weber(김장환 역, 2006). Essential Mathematical Methods for Physicists(기초수리물리학)의 889쪽의 예를 참고하여라.

여 하강할 때, 하강시간을 T라고 하면

$$T=\int_0^T dt=\int_x \frac{ds}{v}$$

이다. 앞에서 밝힌 바와 같이 하강하는 물체의 위치에너지가 운동에너지로 전환되는 양이 같기 때문에, 물체의 질량 m과 중력가속도 g에 대하여 $mgy=\frac{1}{2}mv^2$, 즉 $v=\sqrt{2gy}$가 되고, 따라서 물체의 하강시간 T는 다음과 같이 표현된다.

$$T=\int_{y_1}^{y_2}\frac{\sqrt{(x')^2+1}}{\sqrt{2gy}}dy=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{\frac{(x')^2+1}{y}}\,dy$$

여기서 x는 하강시간 T를 최소가 되게 하는 경로, 즉 범함수의 적분이 극값을 갖게 하는 최적경로이므로 범함수

$$F(y,\,x,\,x')=\sqrt{\frac{(x')^2+1}{y}}$$

는 오일러-라그랑주 방정식 $\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}=0$을 만족한다. 분명히 $\frac{\partial F}{\partial x}=0$이므로 $\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'}=0$이 되고, 따라서

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=\frac{x'}{\sqrt{y\left((x')^2+1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{y\left(1+\left(\frac{1}{x'}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{y\left(1+(y')^2\right)}}$$

은 상수이다. $\frac{\partial F}{\partial x'}=k$라 두면 다음의 미분방정식을 얻게 된다.

$$y\left(1+(y')^2\right)=\frac{1}{k^2}$$

끝으로 이 미분방정식의 해가 사이클로이드임을 보이자. 이 식을 y'에 대해서 정리하면

$$(y')^2=\frac{1-k^2y}{k^2y}$$

$$\Leftrightarrow \ y' = \pm \sqrt{\frac{1-k^2y}{k^2y}}$$

이다. 여기서 $y = \frac{1}{k^2}\sin^2\alpha$라 두면 $y' = \pm \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$이고 $\frac{dy}{d\alpha} = \frac{2}{k^2}\sin\alpha\cos\alpha$이므로 다음 식이 성립한다.

$$\pm \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{k^2}\frac{d\alpha}{dx}$$

이 식을 정리하면

$$\frac{dx}{d\alpha} = \pm \frac{2\sin^2\alpha}{k^2} = \pm \frac{1}{k^2}(1-\cos 2\alpha)$$

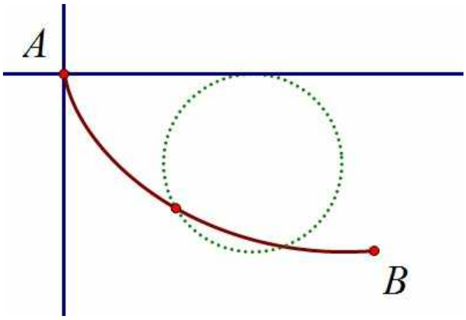
$$\Leftrightarrow \ x = \pm \frac{1}{k^2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + C = \pm \frac{1}{2k^2}(2\alpha - \sin 2\alpha) + C$$

을 얻게 된다.

계산의 편의를 위해 출발점 A를 원점으로, 그리고 물체가 x축의 양의 방향으로 하강한다면, 즉 $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $x_1 < x_2$ 그리고 $y_1 > y_2$을 가정하면 $C = 0$이고 $x = \frac{1}{2k^2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$이다. 여기서 $\frac{1}{2k^2} = R$, $2\alpha = \theta$라 두면, 다음과 같은 사이클로이드의 매개변수 방정식을 얻게 된다.

$$x = R(\theta - \sin\theta), \ y = \frac{1}{k^2}\sin^2\alpha = \frac{1}{2k^2}(1-\cos 2\alpha) = R(1-\cos\theta)$$

이 사이클로이드는 [그림 15]과 같이 출발점이 원점이고 룰렛이 x축을 따라 양의 방향으로 굴러가는 곡선이다. 또한 Ⅱ장 3절에서 언급한 룰렛의 반지름 R에 대한 관계식 $2R = \frac{1}{k^2}$을 다시 한 번 확인할 수 있다.



[그림 15]

Ⅳ. 결론 및 제언

수학교육에서 교구를 활용한 체험수학의 중요성은 나날이 강조되고 있다. 하지만 교구를 조작하거나 체험하는 수학교육에서 수학적 원리가 동반되지 않는 학습은 무의미하다. 본 연구에서는 수학사를 통하여 최소시간 강하선 문제를 해결한 베르누이 형제의 방법을 살펴보았고, 이 중 중등학교 학생들의 수준에 적절하다고 판단되는 요한 베르누이의 방법을 탐구형 기하소프트웨어인 GSP 5를 활용하여 시각적으로 구현하였다. 그리고 이 방법으로 구현한 최소시간 강하선이 사이클로이드임을 실증적(實證的)으로 정당화하였다. 이 활동은 그동안 학생들에게 결과만을 제시했던 사이클로이드 미끄럼틀을 통한 최소시간 강하선의 탐구활동에 직관적인 원리와 GSP 5의 '측정' 및 '계산' 기능을 활용한 실증적 활동을 제시함으로써 이 교구를 통한 학습을 수학적으로 유의미하게 할 것이다.

또한 야곱 베르누이의 아이디어를 바탕으로 오일러와 라그랑주에 의해 정립된 변분법이라는 새로운 분야의 탄생과 발전과정, 그리고 이것을 이용한 최소시간 강하선 문제의 수학적 증명을 살펴보았다. 이 방법은 편미분, 선적분 등 중등학교의 교육과정을 넘어서는 개념들이 등장하므로 학생들에게 지도하기에는 무리가 있다. 그러나 교사의 전문성 신장이라는 측면에서 교사는 가르칠 지식의 역사적 · 발생적 과정과 수학적 원리를 깊이 있게 내면화해야 하고, 최소시간 강하선의 지도를 위한 교사의 배경지식으로서 그 문제의 역사적 기원과 변분법을 이용한 수학적 증명을 소개하였다. 즉 이러한 여러 지식들을 갖추고 있을 때, 교사는 여러 가지 맥락을 되살려 최소시간 강하선 문제를 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 학생들에게 이 문제의 진정한 의미를 전달할 수 있다.

향후 수행되어야 할 연구과제로서 이러한 지도방안의 교수학적 연구가 이루어져야 할 것이다. 요한 베르누이의 방법을 통하여 최소시간 강하선 문제의 원리를 탐

구하는 수업의 설계와 GSP 5를 활용한 학생들의 활동모델이 제작되어야 하고, 고등학교 교육과정과 학생들의 이해 수준을 고려한 구체적인 학습시점이 연구되어야 한다. 이를 통하여 교사와 학생들이 수학사의 가치를 제고하게 되고, 공학적 도구를 활용한 학습의 유용성을 인식하게 될 뿐만 아니라 수학적 원리를 동반한 진정한 교구학습의 이루어지기를 기대한다.

참 고 문 헌

[1] 문승혜(2013). 변분법과 최단강하곡선에 대한 고찰, 전북대학교 교육대학원 석사학위논문.

[2] 문희태(2009). 고전역학, 서울대학교 출판부.

[3] George B. Arfken · Hans J. Weber(김장환 역, 2006). *Essential Mathematical Methods for Physicists*(기초 수리물리학), 홍릉과학출판.

[4] Patrick Hamill(강지훈 · 송승기 · 양우철 역, 2011). *Intermediate dynamics* (일반역학), 청범.

[5] The Inter-IREM Commision(1997). *History of Mathematics Histories of Problems*, Paris: Ellipses.

Lee, Dong Won
Changshin High School
Changwon, 630-803, Republic of Korea

Lee, Yang
Pusan National University
Busan, 609-735, Republic of Korea

Chung, Young Woo
Kyungsung University
Busan, 608-736, Republic of Korea
e-mail : young38woo@daum.net