

계수기용 비인벌류트 치형의 내치차 설계와 물림해석

이성철*

인하공업전문대학 기계과

Design and Meshing Analysis of a Non-involute Internal Gear for Counters

Sung-chul Lee[†]

Dept. of Mechanical Engineering, Inha Technical College

(Received May 31, 2014 ; Revised June 27, 2014 ; Accepted June 30, 2014)

Abstract – A counter gear transmits the rotation angle, so the angular velocity ratio of the gear does not necessarily need to be constant in the meshing process. As a pinion has a small number of teeth when combined with an internal gear for counters, tooth interference can occur with the use of an involute curve. This paper introduces circular arcs that represent a tooth profile and fillet for the profile design of a pinion through the combination of arcs with lines. The straight line of a rack tooth represents the profile of a mating internal gear. Thus, the circular arc and line maintain contact during the rotation of the counter gear. This paper presents an analysis of the meshing of the circular arc tooth and rack tooth along with the properties of the counter gear, such as the change in rotational velocity and amount of backlash. The contact ratio of the counter gear is 1 because the tooth contact occurs between circular arcs and line. The initial position of tooth contact, which denotes the simultaneous contact of two teeth, is found. As the rotation of the pinion, only one tooth keeps the contact situation. This meshing property is analyzed by the geometrical constraints of the tooth profile in contact and the results are presented as graphical diagrams in which tooth-arc movements are superimposed.

Keywords – backlash (백래시), circular arc tooth (원호치형), counter (계수기), tooth interference (치간섭), tooth mesh (치물림)

Nomenclature

c : Center distance (mm) (센터간 거리)
 r : Pinion pitch circle radius (mm)
(피니언 피치원 반경)
 r_a : Tip circle radius (mm) (이끝원 반경)
 r_f : Root circle radius (mm) (이뿌리원 반경)
 r_p : Pitch circle radius (mm) (피치원 반경)
 t_b : Space width(mm) (공간폭)
 t_{min} : Min. chordal tooth thickness (mm)

(최소 현이두께)

t_p : Chordal tooth thickness(mm) (현이두께)
 x_a : X coordinate of tooth arc (치형원호 X좌표)
 y_a : Y coordinate of tooth arc (치형원호 Y좌표)
 z : Number of teeth (잇수)
 α : Pressure angle (압력각)
 ρ_a : Radius of tooth arc(mm) (치형원호의 반경)

Subscripts

1 : Pinion(피니언)
2 : Internal gear(내치차)

*Corresponding author : sclee@inhac.ac.kr
Tel: +82-32-870-2134, Fax: +82-32-870-2500

1. 서 론

기계식 계수기에 사용되는 기어는 회전각의 전달이 주목적으로 피니언과 기어가 반드시 일정한 속도비로 회전할 필요는 없으며, 두 기어가 간섭없이 물리면서 잇수에 따른 회전만 수행하면 된다.

계수기용 기어는 잇수가 적으므로 인벌류트 형상으로 설계하면 치간섭이 발생할 우려가 있다[1,2]. 그리고 계수기는 크기가 작으며, 대부분 사출성형 제품으로 여기에 사용되는 플라스틱 기어의 성형을 위해서는 치형 형상의 캐비티를 제작해야 한다[3,4]. 플라스틱 기어의 사출용 캐비티는 주로 와이어 방전 가공으로 제작하고 있으며, 와이어 방전가공용 NC코드 작성을 위해서는 치형 형상을 직선과 원호의 조합으로 구성하여야 한다[5].

본 논문에서는 계수기용 내치차와 피니언의 치형을 직선과 원호의 조합곡선으로 설계하고 물림시 치의 접촉 특성과 간섭 여부를 해석하고자 한다.

2. 치형설계

2-1. 내치차의 치형설계

계수기용 기어 중에서 피니언의 잇수 6개, 내치차의 잇수 20개의 조합을 설계 대상으로 한다. 잇수 6개의 기어는 잇수가 적어서 인벌류트 곡선으로 치형을 설계하기 어려우며, 여기서는 원호와 직선의 조합으로 치형을 구성한다[6].

내치차의 잇수는 20개이므로 인벌류트 곡선으로 치형을 설계할 수 있지만 피니언이 인벌류트 치형이 아니면 인벌류트 곡선의 물림특성을 기대할 수 없기 때문에 본 논문에서는 내치차의 가공 편의를 위하여 내치차 치형을 가장 단순한 치형 형상인 랙기어의 치형

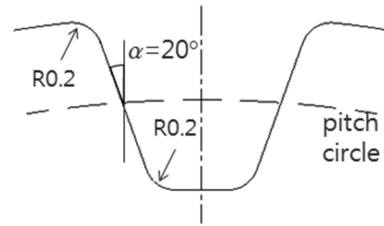


Fig. 1. Configuration of an internal gear.

과 같이 직선으로 설계한다.

계수기용 기어의 기본 설계 제원은 Table 1과 같다. Fig. 1은 내치차의 설계 결과로 피치원에서의 현이두께는 $t_p=1.05$, 치형은 기준선과 20도의 각도를 이루는 직선으로 설계하고 이끝과 이뿌리에는 각각 반경 0.2의 라운드를 준 간단한 형상이다.

2-2. 피니언의 치형설계

비인벌류트 곡선으로 치형에 많이 사용되고 있는 것은 사이클로이드와 노비코프 치형이다[7]. 계수기에서는 물림시 각속도비가 반드시 일정해야 할 필요가 없으므로 여기서는 가공의 편의를 위하여 단순 원호와 직선의 조합으로 피니언의 치형을 설계하고자 한다.

기어의 물림시 피치원 부근에서의 치형이 물림특성을 주도하므로 피니언의 피치원 상에 중심을 둔 원호를 설계하여, 이 원호가 접촉을 담당하도록 한다.

Fig. 2는 피니언의 기본 형상을 나타낸 것인데 치형을 구성하는 원호는 각 중심의 위치로 표시하였다. 피니언의 치형은 피치원에 중심을 둔 원호 A를 기본으로, 이 원호와 이끝원에 동시에 접하는 원호 B, 이뿌리 부분인 원호 F의 3개 원호를 기준으로 설계한다.

원호 A의 반경은 $r_a=0.25$ 로 한다. 원호의 중심이 피니언의 피치원 상에 있으므로 현이두께 $t_p=1.15$ 에 대

Table 1. Counter gear dimensions

| | Pinion | Internal gear |
|---|--------|---------------|
| Number of teeth, z | 6 | 20 |
| Pith circle radius, r_p (mm) | 2.2 | 7.385 |
| Tip circle radius, r_a (mm) | 2.5 | 7.9 |
| Root circle radius, r_f (mm) | 1.4 | 6.8 |
| Chordal tooth thickness, t_p (mm) | 1.15 | 1.05 |
| Min. chordal tooth thick., t_{min} (mm) | 0.7 | - |

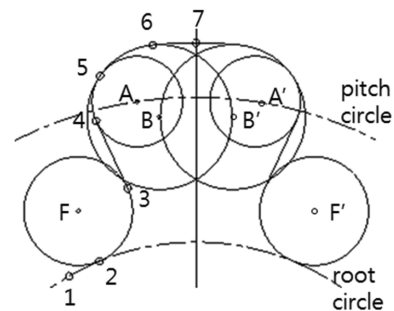


Fig. 2. Configuration of a pinion.

Table 2. Profile data of the pinion

| Point | X(mm) | Y(mm) |
|-------|--------|-------|
| 1 | -0.7 | 1.212 |
| 2 | -0.535 | 1.294 |
| 3 | -0.378 | 1.697 |
| 4 | -0.552 | 2.070 |
| 5 | -0.530 | 2.318 |
| 6 | -0.240 | 2.488 |
| 7 | 0.0 | 2.5 |
| A | -0.325 | 2.176 |
| B | -0.202 | 2.090 |
| F | -0.650 | 1.571 |

해서 중심위치는 다음과 같이 구해진다.

$$x_a = -\left(\frac{t_{p1}}{2} - \rho_a\right)$$

$$y_a = \sqrt{r_{p1}^2 - x_a^2} \tag{1}$$

원호 B의 중심위치는 원호 A와 이끝원에 동시에 접하는 조건에서 구해지며, 원호 F는 최소 현이두께가 0.7이며, 이뿌리원과 접하는 경우에 대해서 계산하면 된다. 원호 B의 반경은 0.4, F는 0.3이며, 각 원호의 접점이나 공통 접선을 구하여 이를 치형으로 구성한다.

피니언의 치형은 Fig. 2에 나타낸 바와 같이 1~7까지의 구간으로 구성되는데 3-4구간만 직선이고 나머지는 원호이다. 그림에서 2는 원 F와 이뿌리원의 접점이며, 3과 4는 원호 F와 A의 공통접선, 5는 원호 A와

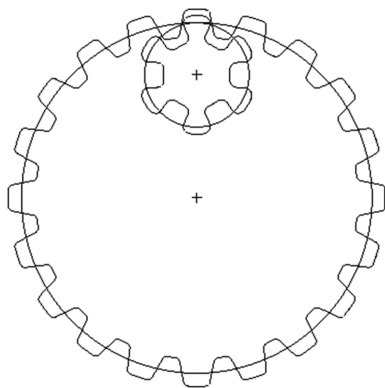


Fig. 3. Internal gear at the rotation angle 0°.

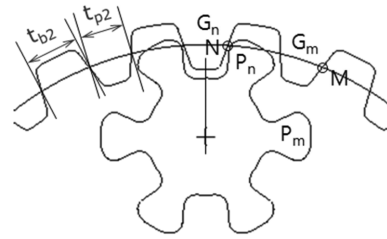


Fig. 4. Internal gear at the rotation angle 30°.

B의 접점, 6은 원호 B와 이끝원의 접점이다. 피니언의 치형을 구성하는 각 점에 대한 좌표값은 Table 2와 같이 구해진다.

피니언의 직선구간 3-4가 기준선과 이루는 각도는 24.9° 이므로 내치차와 물림시 원호 A의 구간인 4-5부분만 접촉을 하게 되며, 이를 치형원호라 부르기로 한다.

피니언과 내치차의 중심거리는 $c=5.185$ 이며, 두 기어를 체결한 결과는 Fig. 3 및 4와 같다. Fig. 3은 피니언이 0°, Fig. 4는 피니언이 30° 회전한 위치이며, 내치차의 현이두께 $t_{b2}=1.05$ 일 때 공간폭 $t_{b2}=1.268$ 로 피니언의 현이두께 $t_{p1}=1.15$ 보다 충분히 크다.

3. 물림 특성

3-1. 물림 시작 위치

물림과정을 해석하기 위해서는 두 개의 치가 동시에 접촉하는 위치를 구하여야 한다. Fig. 4의 상태에서 피니언을 반시계방향으로 회전시키면 피니언의 P_n 과 내치차의 G_n 치가 서로 접촉되며, 회전에 따라 P_m 과 G_m 치가 접촉부로 진입한다.

Fig. 5는 두개의 치가 동시에 접촉하는 상태를 나타

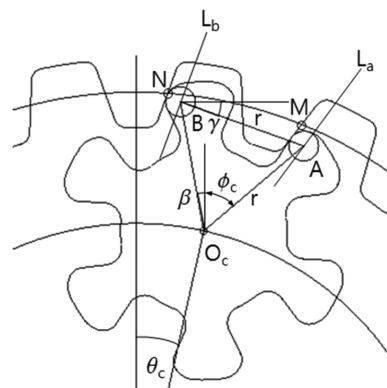


Fig. 5. Configuration of the initial tooth contact.

낸 것인데, 기하학적인 관계를 쉽게 파악할 수 있도록 내치차는 고정시키고 피니언의 중심이 회전하면서 물리는 것으로 시뮬레이션하였다. Fig. 5에서 A는 접촉이 시작되는 치의 치형원호이며, B는 접촉이 종료되는 치의 치형원호이다. 치형 원호 A와 B의 중심은 각각 내치차의 치면과 평행한 직선 L_a 와 L_b 상에 위치하여야 한다.

직선 L_a 의 방정식은 내치차의 $M(x_m, y_m)$ 점을 통과하는 치면의 직선 방정식을 구한 후 이를 치형원호 반경 ρ_a 만큼 평행 이동시키면 다음과 같이 구해진다.

$$y = a_1x + b_1 \tag{2}$$

여기서

$$a_1 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(\alpha + \frac{2\pi}{z_2}\right)\right)$$

$$b_1 = y_m - a_1x_m - \frac{\rho_a}{\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{z_2}\right)}$$

피니언 중심이 내치차 기준선에 대해 θ 회전 하였을 때 치형원호 B가 피니언 기준선과 이루는 각을 β 라 하면

$$\begin{aligned} x_b &= c \sin\theta - r \sin\beta \\ y_b &= c \cos\theta + r \cos\beta \end{aligned} \tag{3}$$

(x_b, y_b) 는 직선 L_b 상에 있어야 하므로 Fig. 5의 N 점의 좌표 (x_n, y_n) 를 기준으로 한 다음의 직선식을 만족하여야 한다.

$$y_b = a_2x_b + b_2 \tag{4}$$

여기서

$$a_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$b_2 = y_n - a_2x_n - \frac{\rho_a}{\sin\alpha}$$

식 (3)과 (4)를 수치적으로 풀면 b 가 구해진다. Fig. 5에서 $\beta + \gamma = \pi/6$ 이며, 치형원호 A의 중심좌표는 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} x_a &= x_b + r \cos\gamma \\ y_a &= y_b - r \sin\gamma \end{aligned} \tag{5}$$

(x_a, y_a) 는 직선 L_a 상에 있어야 하므로 식 (2)에 대

Table 3. Position of the initial tooth contact

| Item | Data |
|---------------------|----------------|
| θ [deg.] | 12.603 |
| β [deg.] | 10.259 |
| Pinion center O_c | X1.131, Y5.060 |
| Center A | X2.810, Y6.482 |
| Center B | X0.740, Y7.225 |

입하면 다음 식이 만족되어야 한다.

$$y_a = a_1x_a + b_1 \tag{6}$$

치형원호 A와 B가 내치차에 동시에 접촉하는 위치 θ 는 식 (3)-(6)을 만족하는 θ 를 수치적으로 계산하여 구하며, 그 결과는 Table 3과 같다.

3-2. 물림 해석

계수기 기어는 직선과 원호의 접촉으로 회전이 전달 되기 때문에 두 치에서 동시에 접촉이 진행되는 구간이 없으며, 물림률은 1이 된다. Fig. 5의 초기상태 이후의 회전에서는 치형원호 A만 접촉을 계속하게 된다.

Fig. 6은 초기상태로부터 피니언 중심위치가 η 회전한 것으로 이 때 치형원호 A의 중심은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} x_a &= c \sin\theta + r \sin\phi \\ y_a &= c \cos\theta + r \cos\phi \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, $\theta = \theta_c + \eta$

접촉 시 치형원호 A의 중심은 항상 내치차 치면과

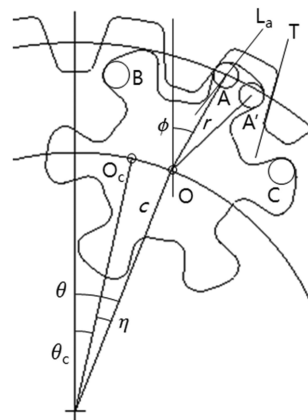


Fig. 6. Meshing diagram when $\eta = 9^\circ$.

평행한 직선 L_a 상에 위치하여야 한다. 따라서 식 (7)을 식 (6)에 대입하여 정리하면 치형원호 A의 중심이 피니언의 기준선에 대해 이루는 각 ϕ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{d}{e}\right) - \zeta \tag{8}$$

여기서

$$d = c \cos\theta - a_1 c \sin\theta - b_1$$

$$e = r\sqrt{a_1^2 + 1}$$

$$\zeta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{a_1}\right)$$

내치차의 잇수는 20개이므로 $\eta = 18^\circ$ 의 회전에 따라 한 사이클의 물림이 완료된다. 내치차 18° 의 회전에 대해 피니언은 60° 회전하므로 한 사이클의 물림을 20 등분, 즉, 내치차 0.9° 회전을 한 스텝으로 하여 물림 해석을 수행하였다.

Fig. 7은 한 물림 사이클에서 치형원호의 운동 궤적을 중첩하여 나타낸 것이다. 그림에서 A와 A'는 접촉 상태에 있는 치의 좌우측 치형원호의 궤적이며, B는 물림이 종료된 치의 궤적, C는 접촉부로 진입하는 치의 치형원호 궤적이다.

Fig. 8은 회전에 따라 치형원호 A와 내치차의 접촉

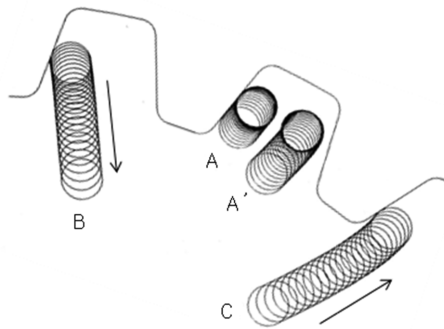


Fig. 7. Meshing diagrams of tooth arcs.

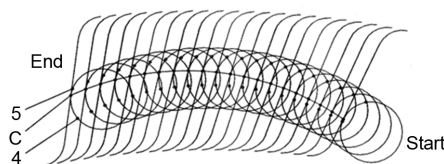


Fig. 8. Simulation of tooth contact.

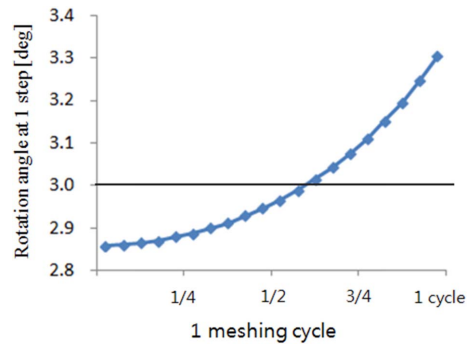


Fig. 9. Rotation angles of the pinion and the gear.

상태를 나타낸 것이다. 그림에서 4와 5는 Fig. 2 에서와 같이 치형을 형성하는 치형원호 구간이며, C는 접촉점을 나타낸다. 그림을 살펴보면 물림시 접촉은 항상 치형원호의 구간 내에서 이루어지는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 9는 내치차의 한 스텝 회전에 따른 피니언의 회전각을 나타낸 것이다. 내치차의 0.9° 회전에 따라 피니언의 3° 회전이 일정한 속도비를 만족시키는 조건인데 원호와 직선의 치접촉 특성을 갖는 계수기 기어에서는 물림초기의 피니언 회전각은 3° 보다 작고 중반 이후에는 3° 보다 커진다. 즉, 피니언 회전에 따라 물림 사이클 초기에는 내치차 회전이 약간 빠르며, 중반 이후에는 약간 느려지게 된다.

3-3. 백래시

백래시는 피니언의 치형원호(Fig. 2의 A')와 이끝 원호부(Fig. 2의 B')를 대상으로 검토하였다. Fig. 6에 도시한 바와 같이 치형원호 A'의 중심과 내치차의 우측치면 직선인 T까지의 거리와 이끝원호 중심의 궤적

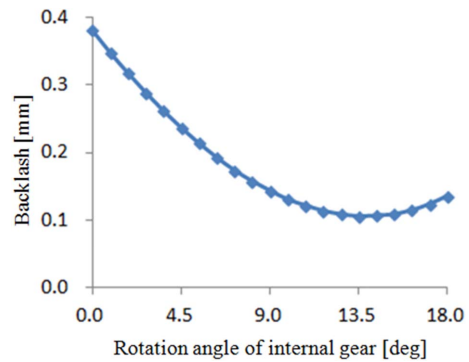


Fig. 10. Backlash of the gear set.

에서 T까지의 거리를 계산한 후, 각각의 반경 ρ_a 와 ρ_b 를 ρ 값에서 작은 값이 백래시가 된다.

백래시 계산 결과는 Fig. 10과 같으며, 충분한 백래시가 형성되어 있는 것을 알 수 있다. 치형원호 중심과 이끝원호 중심 두 위치를 대상으로 백래시를 계산하였는데 모든 접촉 과정에서 치형원호 A와 치면과의 틈새가 백래시에 해당되었다. 따라서 접촉 시 치형원호에 의해서 물림특성이 결정됨을 알 수 있다.

4. 결 론

계수기용 기어에서 피니언 잇수 6개, 내치차 잇수 20개의 조합을 설계 대상으로 하였다. 피니언은 잇수가 적어서 인벌류트 치형으로는 설계가 어렵기 때문에 원호와 직선의 조합으로 치형을 설계하였다. 내치차도 가공의 편의를 위하여 직선으로 치형을 설계하였다.

피니언과 내치차에서 두개의 치가 동시에 접촉하는 위치를 수치적으로 구하였으며, 이를 초기위치로 하여 내치차의 회전에 따른 물림 특성을 해석하였다.

본 설계의 내치차와 피니언에서 치접촉은 직선과 원호의 접촉으로 피니언의 치형원호 중심은 내치차의 직선 치형에 대해 일정한 거리를 유지하면서 물림이 진행된다. 한 사이클의 물림 해석을 통하여 피니언의 치

형원호 구간에서만 치접촉이 일어나고 백래시도 치형원호 구간에서의 거리로 계산되어 치형원호에 의해 물림특성이 결정됨을 알 수 있었다.

피니언과 기어의 물림 시뮬레이션과 백래시 검토를 통하여 치간섭이 발생하지 않는 것을 확인하였다.

References

- [1] Colbourne, J. R., *The Geometry of Involute Gears*, Chap. 12, pp. 259, Springer-Verlag, New York, 1987. (ISBN 0-387-96522-X)
- [2] Stokes, Alec, *Gear Handbook: Design and Calculations*, Chap. 3, pp. 21, Butterworth Heinemann, Oxford, 1992. (ISBN 0-7506-1149-9)
- [3] Adams, C. E., *Plastic Gearing*, Marcel Dekker, Inc., 1986. (ISBN 0-8247-7498-1)
- [4] Precision Engineering Soc., *Handbook of Forming Plastic Gears*, Sigma Press 1995. (ISBN 4-915666-25-5C3058)
- [5] Lee, S. C., "Design of Noncircular Gears for Wire EDM", *J. Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng.*, Vol. 24, No. 5, 2008. (221-227)
- [6] Jensen, P. W., *Classical and Modern Mechanisms for Engineers and Inventors*, Chap. 4, pp. 92, Marcel Dekker, Inc., 1991. (ISBN 0-8247-8527-4)
- [7] Maitra, G. M., *Handbook of Gear Design*, McGraw-Hill, New Delhi, 1985. (ISBN 0-07-451782-1)