

## 유한 요소 해석을 통해 계산된 틸팅 패드 베어링의 피벗 강성과 Hertzian 접촉 모델 해석 결과 비교

이태원<sup>1</sup> · 김태호<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>국민대학교 기계설계학과 대학원, <sup>2</sup>국민대학교 기계시스템공학부

### Finite Element Analysis of Pivot Stiffness for Tilting Pad Bearings and Comparison to Hertzian Contact Model Calculations

Tae Won Lee<sup>1</sup> and Tae Ho Kim<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Graduate School, Dept. of Mechanics and Design, Kookmin University

<sup>2</sup>School of Mechanical Systems Engineering, Kookmin University

(Received May 7, 2014 ; Revised June 30, 2014 ; Accepted July 2, 2014)

**Abstract** – Recent studies emphasize the importance of pivot stiffness in the analysis of tilting pad bearings (TPBs). The present paper develops a finite element model of the pad pivot and compares the predicted pivot stiffness to the results of Hertzian contact model calculations. Specifically, a finite element analysis generates tetrahedral mesh models with ~40,000 nodes for a ball-socket pivot and ~50,000 nodes for a rocker-back pivot. These models assume a frictionless boundary condition in the contact area. Increasing the applied loads on the pad in conjunction with increasing time steps ensures rapid convergence during the nonlinear numerical analysis. Predictions are performed using the developed finite element model for increasing the differential diameters between the pad pivot (or ball) and the bearing housing (or socket). The predictions show that the pivot contact area increases with decreasing differential diameters and increasing applied loads. Further, the maximum deformation occurring at the pivot center increases with increasing differential diameters and increasing applied loads. The pivot stiffness increases nonlinearly with decreasing differential diameters and increasing applied loads. Comparisons of results of the developed finite element model to those of Hertzian contact model calculations assuming a small contact area show that the latter model underestimates the pivot stiffnesses predicted by the finite element models of the ball-socket and rocker-back pivots, particularly for small differential diameters. This result implies the need for caution during the design of pivot stiffness by the Hertzian contact model.

**Keywords** – tilting pad bearing (틸팅 패드 베어링), pivot stiffness (피벗 강성), ball-socket pivot (볼-소켓 피벗), rocker-back pivot (락커-백 피벗), finite element analysis (유한 요소 해석), Hertzian contact (헤르츠 접촉)

#### Nomenclature

$C_1$  : see equation (2)

$C_2$  : see equation (2)

$D_h$  : Housing or socket diameter (mm)

$D_p$  : Pivot or ball diameter (mm)

$E_h$  : Modulus of elasticity for housing (GPa)

$E_p$  : Modulus of elasticity for pivot (GPa)

$F_p$  : Load (N)

$L_R$  : Rocker back length (mm)

$K_p$  : Pivot stiffness (N/m)

$Z$  : Pad displacement at upper surface (m)

$\nu_h$  : Poisson's ratio for housing (-)

$\nu_p$  : Poisson's ratio for pivot (-)

\*Corresponding author : [thk@kookmin.ac.kr](mailto:thk@kookmin.ac.kr)  
Tel: +82-2-910-4723, Fax: +82-2-910-4839

## 1. 서 론

산업용 압축기 및 가스/스팀터빈 등의 고속 회전체 시스템에 널리 이용되고 있는 틸팅 패드 베어링(tilting pad bearing, TPB)은 연성 강성(cross-coupled stiffness) 효과가 매우 작거나 발생하지 않기 때문에 뛰어난 고속 회전 안정성을 갖는다. 그러나, 복잡한 구조로 인해 정확한 해석 모델 개발 및 성능 예측이 쉽지 않아 오랜 기간 동안 관련 연구가 꾸준히 진행되고 있다. 또한, 패드 개수, 프리로드의 정도, 하중의 방향 등과 같은 설계 인자와 운전 조건의 변화가 베어링의 성능에 미치는 영향이 매우 크기 때문에 다양한 해석적, 실험적 연구를 통해 베어링의 설계 개선이 이루어지고 있다. 특히, 최근에는 패드를 지지하는 피봇 강성을 고려한 해석적 연구가 활발하게 진행되고 있다.

Roark[1]는 Hertzian 접촉 모델을 이용하여 서로 다른 곡률을 갖는 두 개의 면으로 가정된 패드와 그를 지지하는 피봇 모델의 접촉 면적, 변형량, 그리고 구조 강성을 수학적으로 예측하였다. Kirk와 Reedy[2]는 Hertzian 접촉 응력 및 변형 이론식을 적용하여 피봇 형상에 따른 강성 계산식을 도출하였으며, 피봇이 틸팅 패드 저널 베어링(tilting pad journal bearing, TPJB)의 강성 및 감쇠 등 동적 계수에 미치는 영향을 예측하였다. Nicholas와 Wygant[3]는 Hertzian 접촉 모델을 적용하여 고하중을 받는 TPJB의 피봇 형상에 따른 강성과 접촉 응력을 계산하였다. 또한, 계산된 응력을 유한 요소 해석 결과와 비교하고 고찰하였다. 저자들은 부적절한 피봇 설계는 지나치게 큰 접촉 응력에 따른 균열을 유발할 수 있음을 지적하였다. Childs와 Harris[4]는 피봇을 고려하지 않은 TPJB모델의 강성 및 감쇠 계수를 예측한 후 이를 임의의 피봇 강성을 적용하여 교정하였다. 교정된 해석 결과는 강성 및 감쇠가 감소하여 실험 결과와 더 잘 일치하였다. San Andres[5]는 연성 피봇(flexure pivot)을 갖는 TPJB의 해석 모델을 개발하고 성능해석을 수행하였다. 연성 피봇은 베어링 하우징에 외팔보 형태로 형성되어 패드의 회전과 반경 및 원주방향 변형을 허용한다. 예측된 강성 및 감쇠 계수는 로터의 고속 구동 시험을 통해 측정된 실험결과와 잘 일치하였다. San Andres와 Tao[6] 그리고 San Andres등[7]은 임의의 피봇 강성을 가정한 후 TPJB의 성능 해석을 수행하였다. 해석 결과는 피봇의 강성을 고려하지 않았을 때보다 저널의 편심량은 증가하고 강성 및 감쇠는 감소함을 보였으며, 기존의 실험결과[4,8]

를 잘 예측함을 보였다. 최근에 Choi와 Kim[9]은 참고문헌[3]에 소개된 Hertzian 접촉 모델을 이용하여 피봇의 비선형 강성을 해석한 후, 이를 고려한 TPJB의 성능 해석을 수행하였다. 해석결과는 피봇을 고려하지 않았을 때보다 감소된 강성 및 감쇠 계수를 보여준다.

최근의 연구 동향은 피봇 강성이 TPJB의 성능에 미치는 영향을 규명하고자 개선된 해석 모델 개발 및 성능 예측에 초점을 맞추고 있다. 하지만, Hertzian 접촉 모델이 다양한 형상 및 운전 조건에서의 피봇 강성을 정확히 예측할 수 있는지에 대한 검토는 아직까지 수행되지 않았다. 따라서 본 연구에서는 패드와 이를 지지하는 피봇의 유한 요소 해석 모델을 개발하고 비선형 접촉 해석을 통해 강성을 예측한 후 Hertzian 접촉 모델을 이용한 계산 결과와 비교한 후 고찰하고자 한다.

## 2. 해석 모델

Fig. 1은 일반적인 TPJB의 도식도를 보여준다. 베어링은 회전축을 둘러싼 5개의 패드와 이들을 지지하는 5개의 피봇으로 구성되며 회전축과 패드 사이에는 윤활 틈새(clearance)가 존재한다. 축의 회전에 따라 윤활 틈새에서 형성되는 유체 동압(hydrodynamic pressure)은 축과 패드 사이에 유막을 형성, 하중지지 능력을 갖는다. 또한, 유체 동압은 각 패드를 지지하는 피봇에 반경 방향의 하중과 피봇을 기준으로 하는 패드 회전 모멘트를 발생한다. 참고문헌[9]는 Fig. 1에 표시된 중요 설계 인자들에 대한 상세한 설명을 제공한다.

피봇은 패드의 회전을 가능하게 하여 TPJB의 고속 회전 안정성을 향상시킨다. 따라서, 적절한 피봇의 선정은 베어링의 설계에 있어 매우 중요한 요소이다. 일

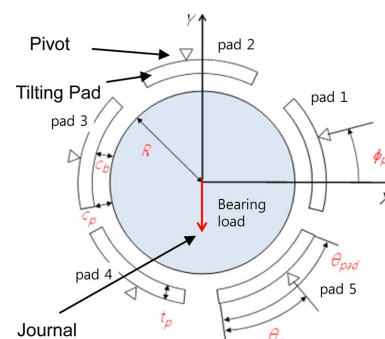


Fig. 1. Schematic view of typical 5-pad tilting pad journal bearing [9].

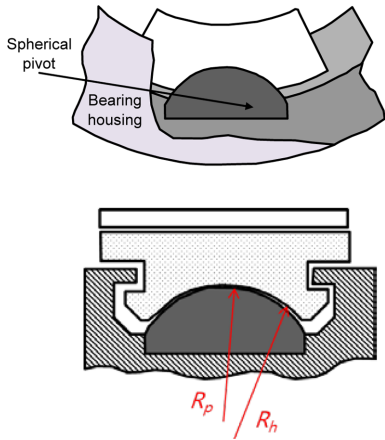


Fig. 2. Ball-socket (spherical) pivot[9].  $R_p$ : Pivot or ball radius ( $= 0.5D_p$ ),  $R_h$ : Housing or socket radius ( $= 0.5D_h$ ).

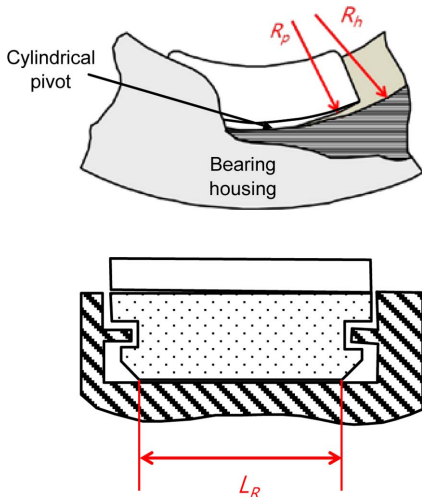


Fig. 3. Rocker-back (cylindrical) pivot[9].  $R_p$ : Pivot or ball radius ( $= 0.5D_p$ ),  $R_h$ : Housing or socket radius ( $= 0.5D_h$ ).

반적으로 고성능의 회전기계에 있어서는 Fig. 2와 Fig. 3과 같이 볼-소켓(Ball-socket or spherical) 피벗이나 락 커백(Rocker-back or cylindrical) 피벗이 사용된다[3,9]. 따라서, 본 논문에서는 상기 두 가지 형태의 피벗에 대하여 각각 유한요소 해석 모델을 개발하고 해석된 강성을 Hertzian 접촉 모델의 계산 결과와 비교하였다.

### 3. 해석 방법

#### 3-1. Ball-socket (spherical) pivot

Fig. 4는 각각  $60^\circ$ , 160.02 mm, 30.48 mm의 원주각,

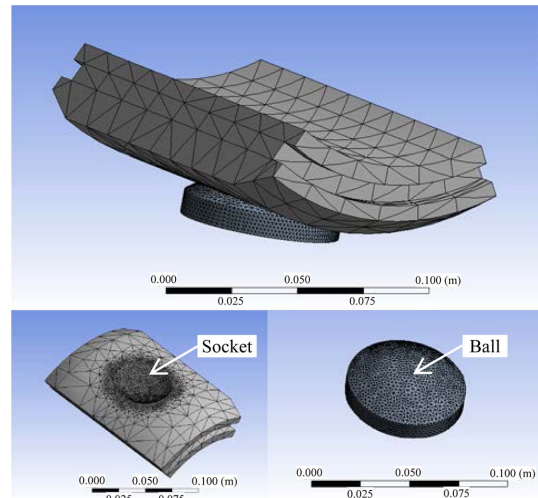


Fig. 4. Mesh generation of FEA model for ball-socket pivot.

Table 1. Design parameters for ball-socket pivot [3]

| Pivot type   | Ball-socket |
|--|-------------|
| Ball diameter, $D_p$ (mm)                            | 101.6       |
| Differential diameter, $D_h - D_p$ ( $\mu\text{m}$ ) | 25.4~127    |
| Ball modulus of elasticity, $E_p$ (GPa)              | 200         |
| Ball Poisson's ratio, $\nu_p$ (-)                    | 0.3         |
| Socket modulus of elasticity, $E_h$ (GPa)            | 103         |
| Socket Poisson's ratio, $\nu_h$ (-)                  | 0.34        |

최대 폭, 두께를 갖는 패드를 지지하는 볼-소켓 피벗의 유한요소 모델을 보여준다. 노드(node) 개수는 약 40,000개이며 복잡한 곡률 형상에 적합한 사면체 격자(tetrahedral mesh) 구조를 사용하였다. 또한, 비선형 접촉을 갖는 패드 하단의 소켓(socket)부와 피벗 상부의 볼(ball) 부근에는 조밀한 격자를 형성하여 해석의 수렴성 향상을 도모하였다.

Table 1은 본 논문에서 사용된 볼-소켓 피벗 모델에 대한 주요 설계 인자의 치수를 보여준다. 피벗 모델의 설계 치수는 참고문헌[3]을 따랐다. 볼의 직경( $D_p$ )은 101.6 mm이며 소켓과 볼의 곡률직경 차이( $D_h - D_p$ )는 25.4~127  $\mu\text{m}$ 의 범위를 갖는다. 볼과 소켓의 재질은 각각 강철(steel)과 청동(bronze)이 사용되었다.

Fig. 5는 볼-소켓 피벗의 유한요소 해석을 위해 부과한 하중 및 변위 경계 조건을 도식적으로 보여준다. 패드 곡소 부위에서의 갑작스러운 대변형을 방지하기

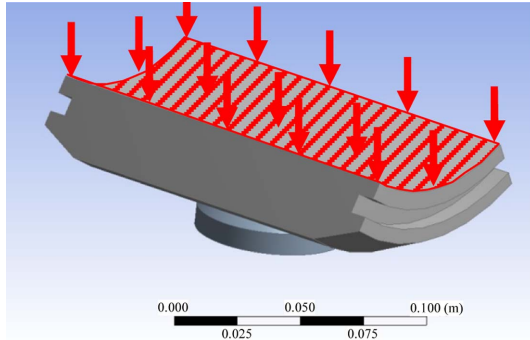


Fig. 5. Distributed force on rigid upper pad surface for ball-socket pivot.

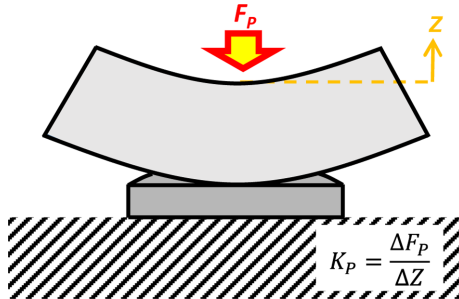


Fig. 6. Stiffness calculation model for ball-socket pivot.

위하여 패드 상단면에 분포하중을 부과하였으며 패드의 상부 표면은 굽힘과 비틀림 변형을 제한한 강체로 구성하였다. 또한, 소켓과 볼의 접촉면에서의 마찰은 무시하였다. 접촉 면적 변화에 따른 비선형 접촉 응력 변화의 수렴 해를 구하기 위해 Newton-Raphson 수치 해석법을 이용하여 반복 해석을 수행하였다.

Fig. 6은 볼-소켓 피봇의 강성( $K_p$ ) 계산 모델을 보여준다. 패드에 부과된 분포 하중( $F$ )을 적분하여 피봇 집중 하중( $F_p$ )을 계산한 후, 변위( $Z$ )와의 관계로부터 피봇의 강성 계산이 가능하다.  $Z$  좌표는 하중이 부과되기 전의 패드 표면 공간상에 위치하여 위로 향함에 유의할 필요가 있다.

Hertzian 접촉 모델을 기반으로 계산되는 볼-소켓 피봇의 강성은 부과 하중과 피봇의 형태 및 재질에 의해 결정되며 계산식은 식 (1), 식 (2)와 같다[3].

$$K_p = 1.442 \sqrt[3]{\frac{C_1 F_p}{C_2}} \quad (1)$$

$$C_1 = \frac{D_h D_p}{D_h - D_p} \quad C_2 = \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_h^2}{E_h} \quad (2)$$

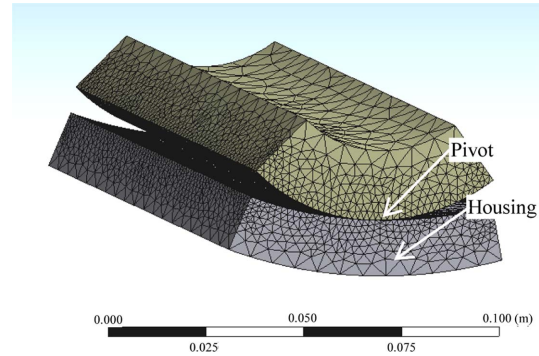


Fig. 7. Mesh generation of FEA model for rocker-back pivot.

Table 2. Design parameters for rocker-back pivot [3]

| Pivot type                                | Rocker back |
|---|-------------|
| Housing diameter, $D_h$ (mm)              | 228.6       |
| Differential diameter, $D_h - D_p$ (mm)   | 1.0~152.4   |
| Rocker-back Length, $L_R$ (mm)            | 120         |
| Pivot modulus of elasticity, $E_p$ (GPa)* | 200         |
| Pivot Poisson's ratio, $\nu_p$ (-)*       | 0.3         |

\*Note: same material for pivot and housing.

### 3-2. Rocker-back (cylindrical) pivot

Fig. 7은 각각  $30^\circ$ , 120 mm, 19.05 mm의 원주각, 폭, 두께를 갖는 패드를 지지하는 락커-백 피봇의 유한요소 모델을 보여준다. 약 50,000개의 노드로 구성된 사면체 격자구조를 사용하였으며, 볼-소켓 피봇 모델과 마찬가지로 피봇과 하우징 내면의 접촉부 부근에는 조밀한 격자를 형성하였다.

Table 2에서 피봇 모델의 설계 치수는 볼-소켓 피봇과 동일하게 참고문헌[3]을 따르며 하우징의 내경( $D_h$ )은 228.6 mm, 하우징과 피봇의 곡률직경 차이는 1.0~152.4 mm의 범위를 갖는다. 패드 하단부에 구성된 피봇과 하우징은 모두 강철이 사용되었다.

락커-백 피봇의 유한요소 모델을 이용한 강성 계산 모델은 Fig. 5 및 Fig. 6의 경우와 동일하다. Hertzian 접촉 모델을 이용한 강성 계산 방법은 참고문헌[3]을 인용하여 식 (3)에 나타내었다.

$$K_p = \frac{\pi E L_R}{2(1 - \nu_p^2) \left[ \frac{2}{3} + \ln \left[ \frac{(D_h - D_p) 4 E_p L_R}{2.15^2 F_p} \right] \right]} \quad (3)$$

### 4. 해석 결과

#### 4-1. Ball and socket pivot

Fig 8은 볼-소켓 접촉 모델 해석을 위해 연산 단계에 따라 Z방향으로 부과한 하중 변화를 보여준다. 해석의 수렴성을 높이기 위하여 초기에는 작은 하중을 부과하며 점차 하중구배를 비선형적으로 증가시켰다. 각 연산 단계에서는 접촉 면적 해석의 수렴을 위해 최대 1000회의 반복 해석을 수행하였다.

Fig. 9는 127 μm의 곡률직경 차이를 갖는 볼-소켓 피벗 모델에 Fig. 8의 연산단계에 따라 부과된 하중을 주었을 때의 피벗 접촉 노드 수 변화를 보여준다. 하중이 증가함에 따라 소켓 및 볼 피벗이 변형하여 접촉 노드 수가 증가함을 알 수 있다. 예를 들어 15번째 연산단계에서 최대 하중인 24,554 N에 대한 피벗 접촉면에서의 노드 개수는 996개이다.

Fig. 10은 127 μm, 76.2 μm, 25.4 μm의 곡률직경 차이를 갖는 볼-소켓 피벗 모델에 대한 하중에 따른 볼 피벗 변형량을 도식적으로 보여준다. 각 그림에 피

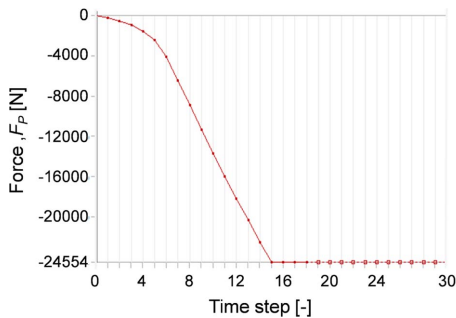


Fig. 8. Applied force ( $F_p$ ) on pad versus time step for rocker-back pivot.

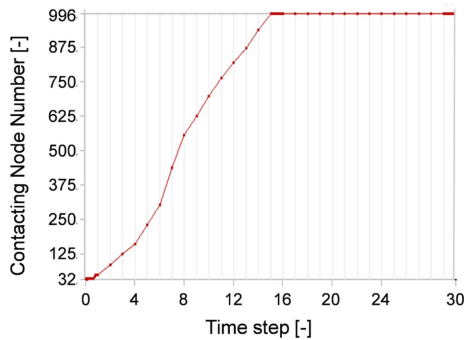


Fig. 9. Contact node number versus time step for ball-socket pivot.

벗 중심에서의 최대 변형량을 표시하였다. 해석결과는 곡률직경 차이가 감소할 수록 그리고 하중이 증가할수록 넓은 접촉 면적을 가짐을 보여준다. 한편, 피벗 중심에서의 최대 변형량의 절대값은 곡률직경 차이가 증가할수록 그리고 하중이 증가할수록 증가함을 알 수 있다.

Fig. 11은 증가하는 하중에 대하여, 곡률직경의 차이에 따른 볼-소켓 피벗 강성의 해석 결과를 보여준다. 곡률직경 차이가 감소할수록 그리고 하중이 증가할수록 피벗 강성이 비선형적으로 증가함을 알 수 있다. 일반적으로 Hertzian 접촉 모델을 통해 계산된 강성은 유한요소 모델의 해석 결과보다 작는데 그 차이는 곡률직경 차이가 감소하여 접촉 면적이 증가함에 따라 커진다. 이는 참고문헌[10]에서 언급되었듯이 Hertzian

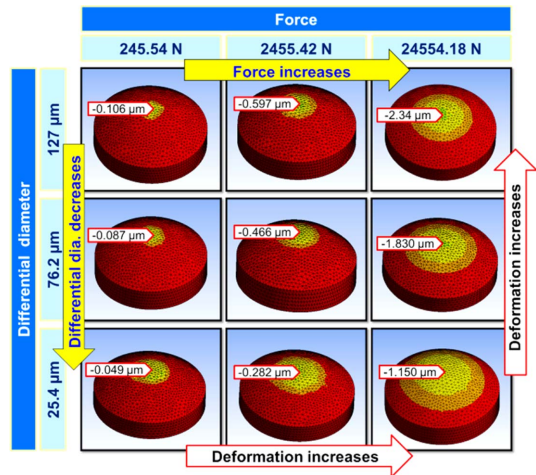


Fig. 10. Ball pivot deformation versus force for decreasing differential diameters (ball-socket pivot).

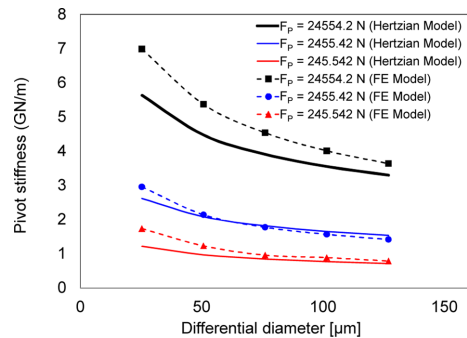


Fig. 11. Predicted ball-socket pivot stiffness versus differential diameter for increasing loads. Comparison to Hertzian contact model calculation.

접촉 이론은 작은 접촉 면적을 가정하기 때문에 사료된다.

4-2. Rocker-back pivot

락커-백 피봇의 강성 해석 방법은 볼-소켓 피봇의 경우와 동일하다. Fig. 12와 Fig. 13은 각각 연산 단계에 따른 Z 방향 하중과 곡률직경 차이가 127 mm인 락커-백 피봇 모델의 하중에 따른 피봇 접촉 노드 수 변화를 보여준다.

Fig. 14는 곡률직경 차이가 127 mm, 25.4 mm, 1 mm 인 락커-백 피봇 모델에 대한 하중에 따른 피봇 변형량을 도식적으로 보여준다. 볼-소켓 피봇과 마찬가지로 곡률직경 차이가 감소할 수록 그리고 하중이 증가할 수록 넓은 접촉 면적을 가지며, 피봇 중심에서의 최대 변형량은 곡률직경 차이가 증가할 수록 그리고 하중이 증가할 수록 증가한다.

증가하는 하중에 대하여, 곡률직경의 차이에 따른 락커-백 피봇 강성의 해석 결과를 Fig. 15에 나타내었다. 볼-소켓 피봇과 마찬가지로 곡률직경이 감소할 수록 그리고 하중이 증가할수록 피봇 강성이 증가한다. 일반적으로 Hertzian 접촉 모델을 통해 계산된 강성은 유

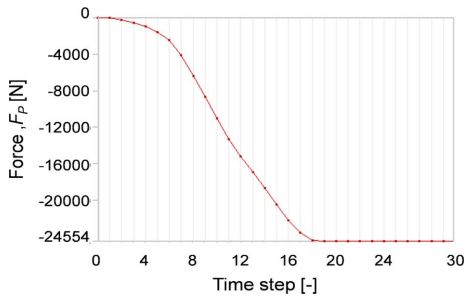


Fig. 12. Applied force ( $F_p$ ) on pad versus time step for rocker-back pivot.

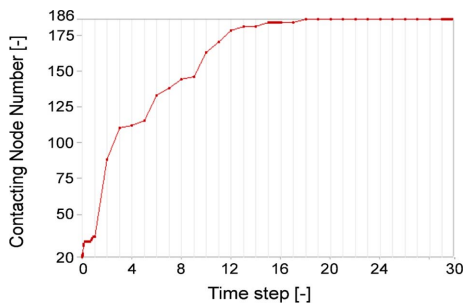


Fig. 13. Contacting node number versus time step for rocker-back pivot.

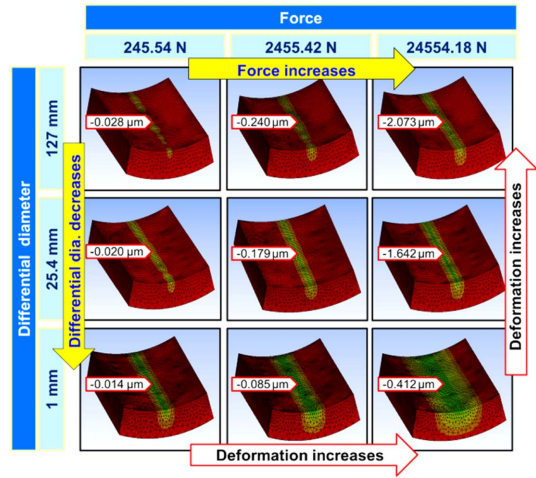


Fig. 14. Pivot deformation versus force for decreasing differential diameters (rocker-back pivot).

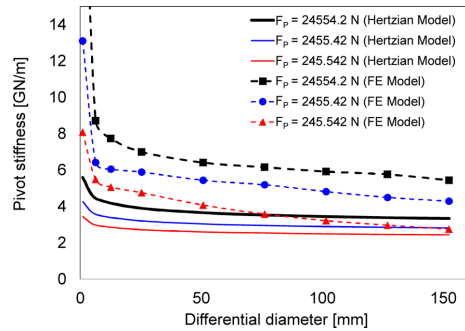


Fig. 15. Predicted rocker-back pivot stiffness versus differential diameter for increasing loads. Comparison to Hertzian contact model calculation.

한요소 모델의 해석 결과보다 작고 그 차이는 곡률직경 차이가 감소하여 접촉 면적이 증가함에 따라 커진다.

결론

본 연구에서는 TPB에 사용되는 볼-소켓 피봇과 락커-백 피봇에 대한 유한요소 해석 모델을 개발하였으며, 비선형 해석을 통해 계산된 강성을 Hertzian 접촉 모델의 계산 결과와 비교하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- 1) 볼-소켓 피봇과 락커-백 피봇은 곡률직경 차이가 감소할 수록 그리고 하중이 증가할 수록 넓은 접촉 면적을 가지며, 피봇 중심에서의 최대 변형량은 곡률 직경 차이가 증가할 수록 그리고 하중이 증가할 수록

증가한다.

2) 피벗 강성은 곡률직경 차이가 감소할 수록 그리고 하중이 증가할 수록 비선형적으로 증가하며, 일반적으로 Hertzian 접촉 모델을 통해 계산된 강성은 유한요소 모델의 해석 결과보다 작다.

3) Hertzian 접촉 모델을 통해 계산된 강성과 유한요소 모델의 해석 결과의 차이는 곡률직경 차이가 감소하여 접촉 면적이 증가함에 따라 커지는데, 이는 Hertzian 접촉 이론이 작은 접촉 면적을 가정하기 때문으로 사료된다.

4) 본 연구 결과는 작은 곡률직경 차이를 갖는 패드 피벗의 경우 Hertzian 접촉 모델보다 유한 요소 모델 해석이 적합함을 보여주며, TPB의 피벗 설계에 활용될 수 있다.

### Acknowledgement

본 연구는 2013년도 산업통상자원부의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제(No. 20134040200580)와 한국과학기술연구원(KIST)에서 지원하는 “3 pad top foil 가스 포일 베어링의 동특성 및 열해석” 연구과제의 일환으로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### References

- [1] Young, W. C., Budynas, R. G., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7th Edition, Chap. 13, McGraw-Hill, New York, 2001. (ISBN-13: 9780070725423)
- [2] Kirk, R. G., Reedy, S. W., “Evaluation of Pivot Stiffness

- for Typical Tilting-Pad Journal Bearing Designs”, ASME J. Vib. Acoust. Stress, Reliab. Des., Vol. 110, No. 2, 1988. (165-171)
- [3] Nicholas, J. C., Wygant, K. D., “Tilting Pad Journal Bearing Pivot Design for High Load Applications”, Proc. 24th Turbomachinery Symposium, Turbomachinery Laboratory, Texas A&M University, College Station, TX, 1995. (33-47)
- [4] Childs, D., Harris, J., “Static Performance Characteristics and Rotordynamic Coefficients for a Four-Pad Ball-in-Socket Tilting Pad Journal Bearing”, ASME J. Eng. Gas Turbines Power, Vol. 131, 2009. (062502)
- [5] San Andres, L., “Hybrid Flexure Pivot-Tilting Pad Gas Bearings: Analysis and Experimental Validation”, ASME J. Tribol., Vol. 128, 2006. (551-558)
- [6] San Andres, L., Tao, Y., “The Role of Pivot Stiffness on the Dynamic Force Coefficients of Tilting Pad Journal Bearings”, ASME J. Eng. Gas Turbines and Power, Vol. 135, 2013. (112505)
- [7] San Andres, L., Tao, Y., and Li, Y., “Tilting Pad Journal Bearings: On Bridging the Hot Gap Between Experimental Results and Model Predictions”, ASME Paper No. 2013 (GT2014-25566)
- [8] Harris, H., “Static Characteristics and Rotordynamic Coefficients of a Four-Pad Tilting-Pad Journal Bearing with Ball-in-Socket Pivots in Load-Between-Pad Configuration”, M.S. thesis, Texas A&M University, College Station, TX, 2008.
- [9] Choi, T. G., Kim, T. H., “Analysis of Tilting Pad Journal Bearing Including Pivot Stiffness”, *J. Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng.*, Vol. 30, No. 2, 2014. (77-85)
- [10] Dwyer-Joyce, R. S., *Tribological Design Data Part 3: Contact Mechanics*, 1st Edition, pp. 2, Institution of Mechanical Engineers, London, 1997.