

## 주파수영역 전자법의 3차원 모델링

장한누리<sup>1</sup> · 김희준<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>세종대학교 그린에너지연구소 (전 부경대학교 에너지자원연구소)  
<sup>2</sup>부경대학교 에너지자원공학과

### Three-dimensional Electromagnetic Modeling in Frequency Domain

Hannuree Jang<sup>1</sup> and Hee Joon Kim<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Green Energy Research Institute, Sejong University (Formerly, Energy Resources Institute, Pukyong National University)  
<sup>2</sup>Department of Energy Resources Engineering, Pukyong National University

**요약:** 전자탐사 자료로부터 지하구조를 정확하게 해석하기 위해서는 적절한 모델링 기술이 필요하다. 본보에서는 주파수영역 전자탐사 3차원 모델링에 유한차분법이나 유한요소법을 이용할 경우 필요한 기초 사항에 대해 소개한다. 인공송신원에서 특이성을 피하기 위해 지배방정식을 전기장의 2차장으로 정식화하고 그 결과 유도되는 연립방정식을 풀기 위한 반복해법과 직접해법에 대해 설명한다. 그리고 반복해법에 발산보정을 도입하면 그 수렴성을 대폭 향상시킬 수 있으며, 이는 유한차분법에서 지형효과를 모델링할 때 특히 유용하다. 마지막으로 여기서 소개한 유한차분법을 이용한 3차원 모델링 알고리즘을 항공전자탐사에 적용한 예를 보여준다.

**주요어:** 3차원, 유한차분, 유한요소, 주파수영역 전자탐사, 모델링

**Abstract:** Development of a modeling technique for accurately interpreting electromagnetic (EM) data is increasingly required. We introduce finite difference (FD) and finite-element (FE) methods for three-dimensional (3D) frequency-domain EM modeling. In the controlled-source EM methods, formulating the governing equations into a secondary electric field enables us to avoid a singularity problem at the source point. The secondary electric field is discretized using the FD or FE methods for the model region. We represent iterative and direct methods to solve the system of equations resulting from the FD or FE schemes. By applying the static divergence correction in the iterative method, the rate of convergence is dramatically improved, and it is particularly useful to compute a model including surface topography in the FD method. Finally, as an example of an airborne EM survey, we present 3D modeling using the FD method.

**Keywords:** 3D, finite difference, finite-element, frequency-domain EM, modeling

## 서 론

전자탐사는 최근의 반도체를 비롯한 관련기술의 급속한 발전으로 인해 측정기기를 비롯한 제반 기술이 착실하게 발전하고 있으며, 그 결과 양질의 자료를 고밀도로 샘플링하여 자료 처리의 고정도화를 지향하는 방향으로 진행되고 있다. 이와 더불어 자료 해석의 신뢰성을 높이는 일이 요구되어 특히 지층

전기비저항구조의 3차원성을 고려한 해석법의 개발은 현재 시급한 과제로 대두되고 있다.

컴퓨터에 의한 전자탐사의 3차원 모델링은 1970년대부터 시작되어 이제까지 여러 종류의 수치계산법이 연구되어 왔다. 그 중에서도 유한차분(finite difference)법과 유한요소(finite-element)법은 편미분방정식에 기초하여 모델영역 전체를 이산화(discretize)하기 때문에 복잡한 구조에 대한 전자기장의 계산에 적합하다(Newman and Alumbaugh, 1995). 종래는 이들 두 방법은 계산시간이 많은 것이 단점이었지만, 최근에는 계산능력이 비약적으로 발전함에 따라서 PC로도 3차원 모델링을 손쉽게 할 수 있게 되었다(Sasaki, 1999).

본보에서는 주파수영역 전자탐사의 3차원 모델링을 유한차분법이나 유한요소법을 이용하여 수행하는데 필요한 기초적 사항과 이들 방법의 장단점에 대해 설명한다. 인공송신원을 이용한 전자탐사의 경우 송신원에서의 특이성(singularity)을 피

2013년 5월 10일 접수; 2014년 5월 30일 수정; 2014년 7월 8일 채택

\*Corresponding author

E-mail: hejkim@pknu.ac.kr

Address: 45 Yongso-ro, Nam-gu, Busan 608-737, Korea

©2014, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

하기 위해 지배방정식을 전자기장의 2차장으로 정식화하는 것이 유리하다. 여기서는 이 지배방정식을 유한차분법이나 유한요소법을 이용하여 모델영역에 대해 이산화하는 방법과 그 결과 얻어지는 연립방정식을 풀기 위한 반복해법(iterative solver)과 직접해법(direct solver)에 대해 소개한 후 반복해법의 수렴을 가속화하는데 유용한 발산보정(divergence convergence)에 대해 설명한다. 마지막으로 항공전자(airborne EM)탐사를 예로 들어 유한차분법을 이용한 3차원 모델링법에 대해 소개한다.

## 지배방정식

각주파수  $\omega (= 2\pi f)$ 로 정현파(sine wave)적인 시간변화를 하는 전자기장은 시간인자를  $e^{j\omega t}$ 라고 하면 아래의 Maxwell의 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}. \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{E}$ 는 전기장,  $\mathbf{H}$ 는 자기장,  $\mathbf{J}$ 는 전류원의 전류밀도,  $\sigma$ 는 매질의 전기전도도,  $\varepsilon$ 는 유전률,  $\mu_0$ 는 진공에서의 투자율( $4\pi \times 10^{-7}$  H/m)이다. 전자탐사에서 통상적으로 취급하는 주파수범위(약 100 kHz 이하)에서는  $\sigma \gg \omega\varepsilon$ 이므로 변위전류(displacement current, (2)식 우변의 제 2항)를 무시할 수 있는 준정적근사(quasi-static approximation)가 성립한다. (1)식을 자기장에 대해 정리하고 (2)식에 대입하면 아래와 같은 전기장에 관한 Helmholtz 방정식이 유도된다.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu_0\sigma\mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{J}, \quad (3)$$

평면파를 취급하는 자기지전류(magnetotelluric, MT)법의 경우는 전류원을 고려할 필요가 없으므로  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ 이다. 하지만 자기쌍극자와 같이 계산영역 내에 전류원이 존재할 경우 그 전류원의 위치가 특이(singular)점이 되고 그 근방에서는 전기장이 급격하게 변화한다. 이 급격한 전기장의 변화를 모사하기 위해서는 충분히 작은 격자 간격으로 이산화하지 않으면 정확도가 많이 떨어진다. 한편 (3)식을 그대로 이산화하는 대신 전기장을 1차장  $\mathbf{E}_p$ 와 2차장  $\mathbf{E}_s$ 로 나누어

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s, \quad (4)$$

라고 하면

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s + i\omega\mu_0\sigma\mathbf{E}_s = -i\omega\mu_0(\sigma - \sigma_p)\mathbf{E}_p, \quad (5)$$

를 얻을 수 있다. 여기서  $\sigma_p$ 는 배경매질의 전기전도도이며, 1차장  $\mathbf{E}_p$ 는 배경매질에 대한 전기장이다. 배경매질로서 1차원 층상구조를 가정하면  $\mathbf{E}_p$ 는 해석적으로 구할 수 있다. 준정적 근사가 성립하는 주파수범위에서 수평다층구조에 대한 1차장의 계산을 위해서는 필터 DZHANK(Anderson, 1982)를 이용

한 배정밀도(double precision) EM1D가 편리하다(Kim *et al.*, 2009; Kim, 2011). 이는 송수신 위치를 불문할 뿐만 아니라 수치해의 정확도도 대단히 높다. 그러나 필터 계수가 무려 801개에 달해 3차원 역산과 같이 대단히 많은 양의 1차장 계산을 반복하는 경우에는 계산시간 면에서 부담스러울 수 있다. (5)식의 우변은 등가전류원을 나타내고 있으며 실제의 전류원 위치에서는 0이 되므로 특이점은 존재하지 않는다. 참고로 전류원이 없는 곳에서는 (2)식 양변의 발산을 취하면 전류의 보존 법칙, 즉  $\nabla \cdot \sigma\mathbf{E} = 0$ 이 성립한다.

유한차분법이나 유한요소법에서는 (1)식과 (2)식(1차의 연립 편미분방정식)을 기초로 전기장과 자기장을 동시에 구할 수도 있지만, 이들은 공기층에서 미약하게 밖에 결합되어 있지 않아 반복해법으로 연립방정식을 풀면 그 수렴성이 떨어질 수 있다(Newman and Alumbaugh, 1995). 그래서 일반적으로는 전기장에 관한 2차 편미분방정식인 (3)식(MT의 경우) 혹은 (5)식에 기초하여 정식화한다. 그리고 자기장은 구해진 전기장으로 부터 Ampere의 법칙인 (1)식의 유한차분을 통해 구하거나, 유한요소법의 경우는 (1)식을 토대로 전기장의 선형결합에서 형상함수(shape function)에 회전(curl)을 취해 계산하게 된다.

전기전도도가 서로 다른 매질의 내부경계에서는 전기장의 접선(tangential, 평행)성분과 전류밀도의 법선(normal, 수직)성분은 연속이어야 한다. 즉 매질 1과 매질 2의 전기전도도를  $\sigma_1, \sigma_2$ , 전기장의 수직성분을  $E_{1n}, E_{2n}$ 로 나타내면 매질의 경계에서 전류밀도의 연속조건에 의해

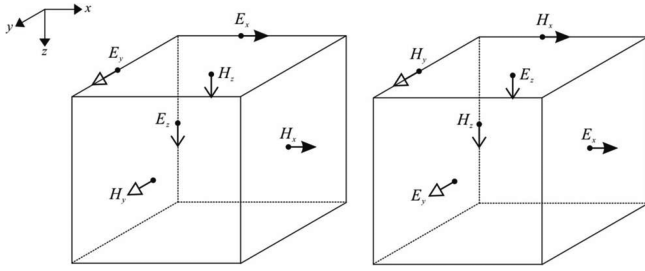
$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}, \quad (6)$$

가 성립한다. 이는 전기장의 수직성분은 이 경계에서 불연속이 되는 것을 의미한다. 한편, 계산영역의 외부 경계조건으로는 일반적으로 전기장의 접선성분을 지정하는 Dirichlet 조건을 이용한다. 시간적으로 변동하는 전자기장의 경우는 지표면에서 에너지의 유출이 있기 때문에 정상전류의 경우처럼 자연(normal) 경계조건을 적용하지 못하고 공기층도 계산영역에 포함시켜야 한다.

## 유한차분법

전자기장을 이산화하기 위해 유한차분법에서 이용되는 격자 중 Fig. 1과 같이 전기장과 자기장의 각 성분을 셀(cell)의 모서리와 면에 할당하는 것을 staggered 격자라고 한다(Yee, 1966). 단 그림에는 자기장도 표시되고 있지만 이는 (5)식에 기초한 정식화에는 직접적으로는 관계없고 (2)식에 의한 계산시에만 필요하다. Staggered 격자에는 전기장 성분을 모서리 중앙에 정의하는 type I과 면의 중심에 정의하는 type II가 있다(Sasaki, 1999; Kim *et al.*, 2004).

셀의 꼭지점을 index  $(i, j, k)$ 로 나타내고 그 좌표를  $(x_i, y_j, z_k)$ , 셀의 전기전도도를  $\sigma_{i,j,k}$ 라고 하자. Type I에서는 셀의 경



**Fig. 1.** Two types of staggered grids. In type I (left), electric fields are defined along cell edges while magnetic fields on the centers of cell faces, whereas in type II (right), magnetic fields are specified along cell edges while electric fields on the centers of cell faces (After Han *et al.*, 2009).

계에서 전기장의 접선성분이 정의되므로 경계에서의 연속조건이 만족되고 전기장의 불연속 문제를 피할 수 있다. 이 경우 전기전도도의 대표값으로서 모서리에 접하는 4개 셀의 평균값(등가 전기전도도)을 병렬회로에 의해 구한다. 한 예로  $x$ 방향과 평행한 모서리 중앙에서 격자점  $(i + 1/2, j, k)$ 의 좌표를  $(x_{i+1/2}, y_j, z_k)$ 라고 하면, 이 격자점에서의 평균 전기전도도  $\bar{\sigma}$ 는 아래와 같다.

$$\bar{\sigma}_{i+1/2,j,k} = (\sigma_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k + \sigma_{i,j-1,k}\Delta y_{j-1}\Delta z_k + \sigma_{i,j,k-1}\Delta y_j\Delta z_{k-1} + \sigma_{i,j-1,k-1}\Delta y_{j-1}\Delta z_{k-1})/(\Delta y_{j-1}+\Delta y_j)/(\Delta y_{k-1}+\Delta y_k). \quad (7)$$

여기서  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ ,  $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ 이다.  $\bar{\sigma}$ 는 격자점 주변 4개의 셀을 병렬로 접속할 때의 합성 전기전도도를 의미한다.

한편 type II에서는 경계면에서 전기장의 수직성분을 명시적으로 정의해야 한다. 이는 전류밀도의 수직성분이 경계면에서 연속인 점을 이용하여 물리적으로 모순이 없는 가상적인 전기장의 수직성분을 경계면에서 구하는 것이다. 이 경우 경계면에서의 전기전도도로서 경계면에 인접하는 두 개 셀의 등가 전기비저항을 직렬회로에 의해 구할 필요가 있다. 한 예로  $x$ 방향과 수직인 면의 중심  $(i, j + 1/2, k + 1/2)$ 에서 평균 전기전도도  $\bar{\sigma}$ 는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\sigma}_{i,j+1/2,k+1/2} = \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{\Delta x_i/\sigma_{i,j,k} + \Delta x_{i-1}/\sigma_{i-1,j,k}}. \quad (8)$$

이  $\bar{\sigma}$ 는 경계면 양쪽의 셀을 직렬로 접속할 때의 합성 전기전도도를 나타내고 있다. 경계면 양쪽의 전기장  $E_1, E_2$ 는 전류밀도의 연속조건에 의해

$$\bar{\sigma}_{i,j+1/2,k+1/2}E_{x(i,j+1/2,k+1/2)} = \sigma_{i-1,j,k}E_1 = \sigma_{i,j,k}E_2, \quad (9)$$

와 같이 구해진다.

각 격자점에서 평균 전기전도도가 주어지면 편미분방정식에 대응하는 유한차분식은 쉽게 구해진다(Newman and Alumbaugh, 1995). 그리고 각 격자점에 대한 전기장의 이산값을 미지수로

하는 유한차분식을 모두 모으면 연립 1차방정식이 구성된다. 그 계수행렬은 대각성분만이 복소수인 대칭 희소(sparse) 행렬이며 일행 당 0이 아닌 비영성분은 최대 13개이다. Han *et al.* (2012)은 해양 석유자원을 위한 해양전자탐사의 3차원 모델링법을 유한차분법에 기초하여 작성하였다.

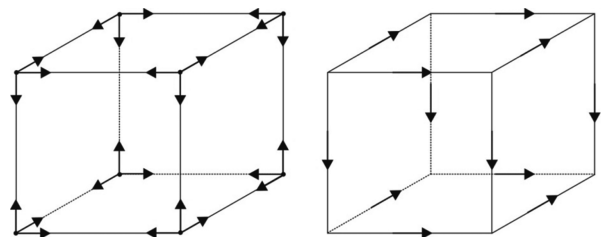
### 유한요소법

Staggered 격자망에 기초한 유한차분법에서는 위에서 언급한 것처럼 매질의 경계에서 전기전도도의 평균값을 이용하므로 전기장의 경계조건을 근사적으로밖에 만족하지 못하는데 반해 이상체의 물성을 정확하게 구현하기 위해서는 유한요소법을 이용하는 것이 유리하다. 더 나아가 실제 전자탐사에서 자주 접하게 되는 지표의 기복을 표현하기 위해서도 유한요소법은 유리하다.

유한요소법은 복잡한 형태나 경계를 비교적 쉽게 취급할 수 있기 때문에 여러 분야에서 널리 이용되고 있다. 그러나 전자탐사의 모델링에서는 전기장의 연속성을 가정해야 하는 제약에 따른 문제점이 일찍부터 지적되었다(Reddy *et al.*, 1977; Pridmore *et al.*, 1981). 즉 절점에 바탕을 둔 일반적인 유한요소법에서는 전기장의 수직성분이 불연속이라는 내부경계조건이 만족되지 않으며, 따라서 current channeling 현상이 적절하게 고려되지 않는 셈이다.

계산영역을 직방체요소로 분할하는 경우를 생각해 보자. Fig. 2(a)에 나타난 8절점 직방체요소에서는 각 절점에 전기장의 3성분을 할당하기 때문에 인접한 요소 간에서 전기장은 연속이 된다. 그러나 전기전도도가 서로 다른 매질의 경계에서는 전기장의 수직성분은 불연속이어야 하기 때문에 경계면에서 물리적인 모순이 생긴다. 이와 같이 수치계산상으로는 정확하게 구해진다 해도 물리적으로 봤을 때 적절치 않는 해를 거짓해(spurious solution)라고 한다.

한편 유한요소법에는 절점에 바탕을 둔 통상의 방법 외에 변요소(edge element)를 이용하는 방법도 있다. 이 변유한요소법에서는 Fig. 2(b)와 같이 요소의 모서리에 전기장을 정의한다. 이 경우 전기장은 요소의 경계면에 항상 접하고 있으므로 접선성분의 연속성이 보장되어 수직성분의 불연속이 허용된다. 변요소는 모서리에 접선성분을 정의하는 점에서 staggered



**Fig. 2.** Eight-node (left) and 12-edge (right) elements.

격자의 type I과 유사하다. Fig. 2(b)에 표시한 것처럼 전기장의  $x$ 성분을  $E_1 - E_4$ ,  $y$ 성분을  $E_5 - E_8$ ,  $z$ 성분을  $E_9 - E_{12}$ 로 나타내면 요소 내의 전기장은 8절점 직방체요소의 형상함수  $N_1 - N_8$ 을 이용하여

$$\begin{aligned} E_x &= \bar{N}_1 E_1 + \bar{N}_2 E_2 + \bar{N}_3 E_3 + \bar{N}_4 E_4, \\ E_y &= \bar{N}_5 E_5 + \bar{N}_6 E_6 + \bar{N}_7 E_7 + \bar{N}_8 E_8, \\ E_z &= \bar{N}_9 E_9 + \bar{N}_{10} E_{10} + \bar{N}_{11} E_{11} + \bar{N}_{12} E_{12}. \end{aligned} \quad (10)$$

라고 나타낼 수 있다. 여기서  $\bar{N}_1 = N_1 + N_3$ ,  $\bar{N}_2 = N_5 + N_5$ ,  $\bar{N}_3 = N_2 + N_4$ ,  $\bar{N}_4 = N_6 + N_8$  등이다. 예를 들어  $\bar{N}_1$ 은 변 1 ~ 3에서는 1, 변 5 ~ 7, 2 ~ 4, 6 ~ 8에서는 0이 되는  $y$ 와  $z$ 의 1차함수이다.

(10)식을 (5)식의 근사해라고 하면 이는 엄밀하게는 원래의 편미분방정식을 만족하지 않으므로 잔여  $\varepsilon$ 가 생긴다. 가장 좋은 해는 이 잔여를 요소의 영역  $V$ 에 대해 최소로 하는 것이다. Galerkin의 방법은 이 잔여를 최소화하기 위한 방법의 하나로서 형상함수에 대해

$$\int_V \bar{N}_j \varepsilon dv = 0, \quad (11)$$

라고 한다. (5)식에 Galerkin의 방법을 적용하면 전기장의 이산값  $E_1 - E_{12}$ 를 미지수로 하는  $12 \times 12$ 의 요소방정식이 만들어진다. 그리고 전체 연립방정식의 계수행렬은 희소 행렬이지만 일행 당 비영성분은 최대 33개로 최대 13개인 유한차분법의 약 2.5배에 달한다. 따라서 유한요소법에서 필요로 하는 기억용량과 계산량은 유한차분법에 비해 훨씬 커진다.

유한요소법의 기하학적 유연성은 직방체요소가 아니라 4면체(tetrahedral)나 6면체(hexahedral) 요소를 사용할 때 극대화된다. Fig. 3은 6면체요소의 전체(global) 및 국부(local)좌표계를 나타낸 것이다. 변유한요소법에서는 Fig. 3a와 같이 요소의 모서리에 전기장을 정의하기 위해 제  $e$ 번째 요소 내의 전기장  $\mathbf{E}^e$ 는 모서리의 전기장  $E_1^e - E_{12}^e$ 의 선형 결합으로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^{12} E_i^e \Phi_i^e. \quad (12)$$

여기서  $\Phi_i^e$ 는 변요소 기저함수(basis function)함수이다.

전체좌표계( $x, y, z$ )에 대응하는 국부좌표계( $\xi, \eta, \zeta$ )에서는 Fig. 3b와 같이 단위 길이의 입방체요소로 나타낸다. 이 좌표 변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다(Nam *et al.*, 2007a).

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^8 \phi_j^e(\xi, \eta, \zeta) x_j^e, \\ y &= \sum_{j=1}^8 \phi_j^e(\xi, \eta, \zeta) y_j^e, \\ z &= \sum_{j=1}^8 \phi_j^e(\xi, \eta, \zeta) z_j^e. \end{aligned} \quad (13)$$

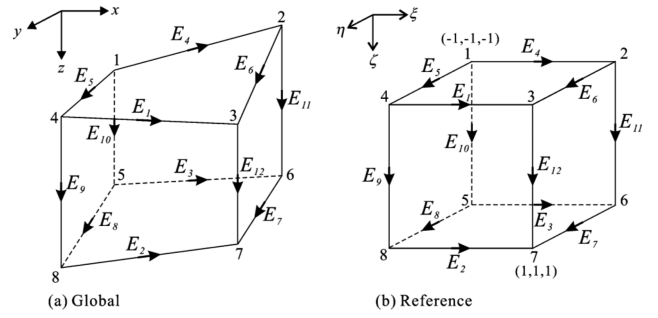


Fig. 3. Edge elements in (a) the global coordinate system and (b) the reference coordinate system (After Nam *et al.* (2007)).

여기서  $\phi_j^e$ 는 아래와 같은 제  $j$ 번째의 스칼라 내삽함수(interpolation function)이다.

$$\phi_j^e(\xi, \eta, \zeta) = (1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)(1 + \zeta_j \zeta)/8. \quad (14)$$

여기서  $(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)$ 는 제  $j$ 번째 격자점의 좌표이다. 그리고 변요소 기저함수는 아래와 같다(Nam *et al.*, 2007a).

$$\begin{aligned} \phi_i^e(\eta, \zeta) &= l_i \nabla \xi (1 + \eta_j \eta)(1 + \zeta_j \zeta)/8, \quad i = 1 - 4, \\ \phi_i^e(\xi, \zeta) &= l_i \nabla \eta (1 + \xi_j \xi)(1 + \zeta_j \zeta)/8, \quad i = 5 - 8, \\ \phi_i^e(\xi, \eta) &= l_i \nabla \zeta (1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)/8, \quad i = 9 - 12. \end{aligned} \quad (15)$$

Son *et al.* (2002)와 Nam *et al.* (2007a)은 변유한요소법에 기초하여 3차원 MT 모델링 알고리즘을 개발하여 보다 정확한 이상체의 구현뿐만 아니라 지표 지형의 묘사도 가능케 하였다. Nam *et al.* (2007a)의 알고리즘을 이용하여 Nam *et al.* (2007b)은 MT 탐사에서 지형효과를 분석하였으며, Nam *et al.* (2009)은 제주도에서 지열자원의 부존 여부를 확인하기 위해 수행한 MT 탐사 결과를 해석하고자 제주도의 지표와 해저 지형을 고려한 모델링을 수행하고 현장자료와의 비교연구를 시도하였다. 그리고 Nam *et al.* (2011)은 보조장인 자기장을 정확하게 계산하는 방법을 보여주었다.

## 연립방정식의 반복해법

유한차분법이나 유한요소법에서는 최종적으로 아래 형식의 연립 1차방정식을 풀게 된다.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{x}$ 는 전기장 3성분(유한요소법의 경우 국부좌표계로 변환된 것)으로 된 벡터,  $\mathbf{b}$ 는 소스에 관한 벡터,  $\mathbf{A}$ 는 대칭 희소 복소행렬이다. (16)식은 대규모 연립방정식이 때문에 그 해법으로는 일반적으로 Conjugate Gradient(CG)법 계열의 반복법이 이용된다. ICCG (Incomplete Cholesky CG)법은 가장 대표적인 반복법이지만  $\mathbf{A}$ 가 Hermitian (positive-definite) 행렬이 아니기 때문에 CG법은 정규방정식(normal equation)을 경유하

지 않으면 적용하지 못한다. 이에 비해 BCG (Bi-Conjugate Gradient)법은 non-Hermitian 행렬을 직접 다룰 수 있으며, 특히 대칭 복소행렬의 경우에는 통상의 CG법에서 공액(conjugate) 전치(transpose)  $h$ 를 단순 전치  $t$ 로 바꾼 알고리즘과 같아진다(Smith, 1996). 그 결과 기본적으로는 실수의 연립방정식에 대해 사용되는 일반적인 CG법의 프로그램을 그냥 복소수용으로 바꾼 것을 사용할 수 있다. 이것은 이미 전기비저항법의 모델링에 익숙한 사람에게서는 유용한 특성이다.

ICBCG법에서는 BCG법의 수렴을 촉진하기 위해서  $\mathbf{A}$ 에 대해 불완전 Cholesky 분해(decomposition)의 전처리(pre-conditioner)를 실시한다. 그러나  $\mathbf{A}$ 는 positive-definite이 아니기 때문에 통상의 불완전 Cholesky 분해를 그대로 적용하지 못한다. 그래서  $\mathbf{A}$ 를 전기장의 3성분에 대응하여

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{xx} & \mathbf{N}_{xy} & \mathbf{N}_{xz} \\ \mathbf{N}_{yx} & \mathbf{M}_{yy} & \mathbf{N}_{yz} \\ \mathbf{N}_{zx} & \mathbf{N}_{zy} & \mathbf{M}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

로 나타냈을 때 대각 블록  $\mathbf{M}_{xx}$ ,  $\mathbf{M}_{yy}$ ,  $\mathbf{M}_{zz}$  이외의 성분을 모두 강제로 0으로 놓으면 positive-definite 행렬이 되어 불완전 Cholesky 분해를 실시할 수 있다(Mackie *et al.*, 1994). 이 전처리에 의해 BCG법의 수렴성은 대폭 향상된다. 이 외에도 QMR (quasi-minimum residual)법이 Jacobi scaling과 같은 전처리와 함께 이용된다(Newman and Alumbaugh, 1995).

반복해법의 수렴성은  $\mathbf{A}$ 의 조건수(condition number)에 의존하고 조건수가 크면 클수록 수렴은 느려진다. 전자기장의 3차원 문제에서는 주파수가 낮을수록 조건수가 커지고 해의 정확도는 떨어질 경향이 있는 것은 잘 알려져 있다(Smith, 1996). 이는 (3)식에서  $\omega \rightarrow 0$ 일 때 전기전도도 분포를 나타내는 항이 없어져 이 식을 풀지 못하게 되는 것으로 쉽게 이해할 수 있다. 직류(DC)의 경우는 전하의 보존법칙(전류의 연속조건)

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = 0, \quad (18)$$

을 명시할 필요가 있지만  $\omega$ 가 작더라도 0이 아니면 이론상 (3)식 양변의 발산을 취하면 (18)식이 자동적으로 만족됨을 알 수 있다. 그러나 이산화된 근사방정식에서는  $\omega$ 를 포함하는 항이 다른 항에 비해 지나치게 작으면 잔여  $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$ 는 충분히 작아진다 해도 수치오차로 인해 (18)식이 성립하지 않을 수 있다. 따라서 이러한 경우에는 (16)식을 풀 때 (18)식을 제약조건으로 추가할 필요가 있는데 이를 위한 방법 중 하나가 Smith (1996)에 의해 제안된 발산보정(divergence correction)이다(Kim *et al.*, 2004).

### 발산보정

(16)식의 반복해가 (18)식을 만족하는지 여부는 지하내부 각

격자점에서 전류밀도의 발산을 실제로 계산해보면 알 수 있다. 어느 격자점에서 전류밀도의 발산  $\phi_e$ 가 0이 아니면 그 격자점에는 가상적인 전류원(source 또는 sink)이 존재하는 셈이다. 따라서 (18)식이 성립하기 위해서는 그 격자점에 극성(polarity)이 반대인 전류원을 상정하여 이로 인해 생기는 전기장을 보정값으로 더하면 된다. 전기장은 스칼라 포텐셜의 기울기로 주어지므로 전기장의 보정값을 구하는 문제는 결국 Poisson 방정식

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = -\phi_e, \quad (19)$$

를 푸는 문제로 귀착된다. 한편 공기층에서는 전기장에 관해서

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (20)$$

가 성립해야 한다. 그래서 공기층의 각 격자점에서 전기장의 발산  $\phi_a$ 를 계산하여

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\phi_a, \quad (21)$$

를 푼다. 단 지표면에서는 전기장의 접선성분이 연속이어야 하기 때문에 (19)식을 풀어서 구해지는 포텐셜을 (21)식의 경계조건으로 주어야 한다. 전기탐사의 3차원 모델링과 마찬가지로  $\phi$ 는 유한차분법(Dey and Morrison, 1979)에 의해 구할 수 있으며 연립방정식의 해법으로는 ICCG법을 쓸 수 있다. 그러나 보통의 전기탐사 모델링과 다른 점은 소스항이 복소수이기 때문에 실수부와 허수부 각각에 대해 개별적으로 풀어야 하는 것과 공기층에서도 포텐셜을 구해야 하는 것이다.

이상의 방법으로 (16)식의 반복해를 보정하면 반복해는 지하내부에서 전류밀도의 보존법칙, 공기층에서는 전기장에 관한 (20)식을 만족한다. 그리고

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \nabla \phi) = \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (22)$$

가 성립하는 것으로도 알 수 있듯이 우변과 같이 전기장을 보정해도 계산되는 자기장은 거의 변화하지 않는다. 이 발산보정은 ICBCG법 반복계산 도중에서 2 ~ 20회 마다 실시한다(Sasaki, 1999). 보정값은 어느 정도의 정확도만 있으면 되고 ICCG법의 반복회수는 10 ~ 20회면 충분하다. 참고로 발산보정은 유한차분법과 함께 실시하는 것이 일반적이었지만 최근 Farquharson and Miensopust (2011)은 변요소 유한요소법에 적용하여 수렴성이 대폭 향상되는 것을 보였다.

### 직접해법

직접해법에서는 계수행렬을 분해(factorization)해야 하고 이 분해된 행렬을 저장하는 과정에서 상대적으로 많은 기억용량이 필요하게 된다. 단 계수행렬이 대칭인 경우에는 LU분해 대신 LDL' 분해를 적용할 수 있어 기억용량을 절반으로 줄일 수 있다. 필요한 기억용량은 기본적으로  $N_x N_y N_z \times N_x N_z$  수준이다

(단  $N_x > N_y, N_z$ ). 여기서  $N_x, N_y, N_z$ 는 각각  $x, y, z$  방향 셀의 개수이다. 두 번째 항의 셀 수는 세 방향 중 셀 수가 보다 적은 두 방향이 선택될 수 있도록 셀에 일련번호를 매기는 것이 기억용량을 줄이는데 효과적이다. 이에 비해 반복해법에서는 계수행렬의 0이 아닌 요소에 대해서만 그 값과 위치를 저장하면 되기 때문에 필요한 기억용량이 상대적으로 훨씬 적으며 두 번째 항의 숫자가 앞서 말한 것처럼 유한차분법은 13, 유한요소법은 33에 불과하다. 그러나 반복해법은 연립방정식의 조건수에 따라 수치해의 수렴성이 좌우되며, 전처리나 발산보정을 사용하여 수렴속도를 증가시킨다 해도 직접해법에 비해 수치해의 정확도가 낮은 것이 보통이다.

직접해법은 기본적으로 LU분해와 후퇴대입(backward substitution)으로 구성되는데 한번 LU분해가 이루어지면 다수의 우변항에 대해 후퇴대입만으로 해를 구할 수 있다. 후퇴대입은 LU분해에 비해 계산량이 훨씬 적기 때문에(3차원의 경우 수십 분의 1 수준, Chung *et al.* (2014)) 직접해법은 다중 송신원을 사용하는 탐사의 모델링에서 매우 효율적이다. 한편 역산에 필요한 전자기장의 감도는 수반방정식(adjoint equation)에 의해 역시 모델링을 이용하여 계산할 수 있다(McGillivray *et al.*, 1994). 예를 들면  $x$ 방향 전기장  $E_x$ 의  $m$ 번째 역산 블록의 전기전도도  $\sigma_m$ 에 대한 감도는 아래 식과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial E_x}{\partial \sigma_m} = \int_V \mathbf{E}^J(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV, \quad (23)$$

여기서  $\mathbf{E}$ 는 실제 송신원에 의한 전기장,  $\mathbf{E}^J$ 는 관측점에 놓인  $x$ 방향 가상 단위 전기쌍극자  $J_x$ 에 의한 전기장이고  $V$ 는 역산 블록의 부피,  $\mathbf{r}$ 은 관측점에서 전기장을 계산하는 위치까지의 거리 벡터이다. 따라서 감도행렬 계산에는 실제 송신원 외에 가상 송신원에 대한 모델링이 필요하기 때문에 직접해법의 이점은 극대화될 수 있다. 그러한 예로서 Chung *et al.* (2011)은 변요소 유한요소법과 직접해법을 이용하여 전자탐사의 3차원 모델링과 역산 알고리즘을 구현하였다.

## 지형효과

지표면의 불규칙한 지형이 전자탐사의 측정결과에 큰 영향을 미치는 것은 잘 알려져 있다. Sasaki (1999)가 보여준 지상 전자탐사의 모델링 예에 의하면 지형의 영향은 매우 커서 자기장성분에 따라서는 지하의 양도체의 응답을 거의 은폐할 정도이다. 그러나 지표 지형에 의한 전자기장 응답을 모델링하는 효율적인 수단이 없었기에 지형효과에 관한 연구는 그리 많지 않고 사실상 무시되는 것이 실정이었다. 앞으로 전자탐사의 신뢰성을 향상시켜 그 적용성을 확대해 나가기 위해서는 지형의 영향을 명확히 밝히는 것과 동시에 지형효과를 고려한 해석을 실시할 필요가 있다.

Newman and Alumbaugh (1995)는 지형효과의 모델링을 유한차분법에 의해 시도하였다. 유한차분법은 그 정식화가 단순하기 때문에 형식적으로는 (비록 계단식이지만) 지형도 쉽게 취급할 수 있다. 그러나 지형이 포함된 경우 구성되는 연립방정식은 일반적으로 그 성질(계수행렬의 조건)이 나쁜 것이 일반적이다. 이는 주로 지표면에서의 경계조건(전류밀도의 수직 성분은 연속이 됨)을 만족하기 어려운 것에 기인한다. 그래서 지형모델에 대해서는 current channeling이 우세한 저주파수에서 발산보정이 필수적이다(Sasaki, 1999). 이는 주파수가 낮아 질수록 전자유도에 비해 galvanic 효과가 우세해져 전하의 보존법칙을 만족하는 것이 보다 엄격하게 요구되기 때문이다. Sasaki (1999)는 발산보정을 반복해법(ICBCG법)에 도입함으로써 지형효과를 포함한 반복해법의 수렴성이 대폭 개선되는 것을 보여주었다.

지형효과를 올바르게 모델링할 경우에는 계단식으로밖에 표현하지 못한 유한차분법에 비해 유한요소법이 더 효과적이다. Nam *et al.* (2007a)은 변유한요소법에 기초하여 3차원 MT 모델링 알고리즘을 개발함으로써 지표 보다 정밀한 지형의 모사를 가능케 하였다. 그리고 Nam *et al.* (2011)은 기존의 알고리즘을 개선하여 보조장인 자기장을 보다 정확하게 계산할 수 있도록 수정하였으며, 특히 지형이 있는 경우에도 수직자기장을 정확히 계산할 수 있도록 하였다. 지형이 복잡한 국내에서 전자탐사의 자료 해석을 위해서는 지형에 의한 전자기장 자료의 왜곡을 정확히 모델링하는 것이 특히 중요하다.

## 항공전자탐사 모델링에

항공전자탐사에서는 복수의 송수신 코일을 이용하여 여러 주파수에 대해 측정한다. 송신코일에 교류전류를 흘려 1차 자기장을 만들면 지층내부에서 전자기유도 현상에 의해 2차 자기장이 발생한다. 2차 자기장은 지하의 전기비저항 분포에 의

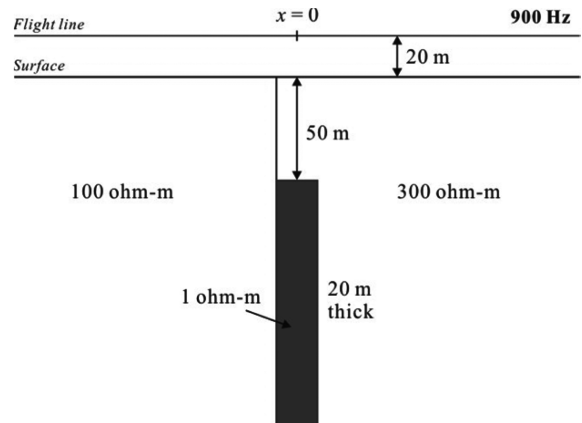
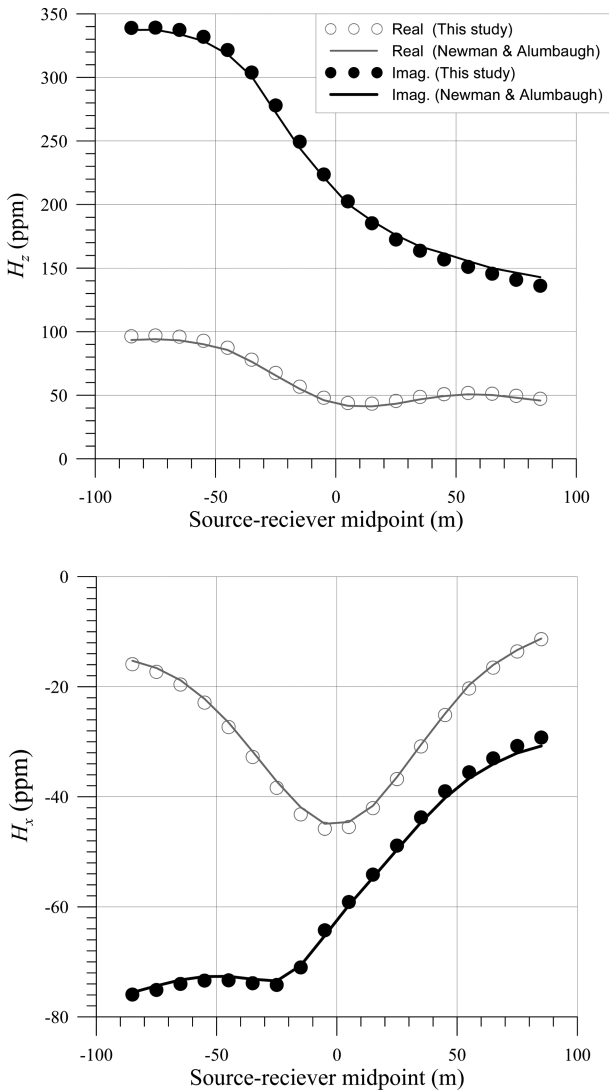


Fig. 4. The 2-D model used to simulate airborne EM responses (Redrawn from Newman and Alumbaugh, 1995). The transmitter-receiver separation is 10 m, and the flight height is 20 m.



**Fig. 5.** Finite-difference solutions of horizontal coplanar (upper) and vertical coaxial (lower) systems for the model in Fig. 3, compared to the numerical results from Newman and Alumbaugh (1995).

존하기 때문에 1차장에 대한 2차장의 비율을 수신코일에 의해 측정하면 전기비저항에 관한 정보를 얻을 수 있다. 코일 배열로는 수평공면(horizontal coplanar) 또는 수직동축(vertical coaxial)형이 일반적이다. 코일 크기는 송수신 간격에 비하면 충분히 작기 때문에 송신코일은 자기쌍극자라고 볼 수 있다.

Fig. 4는 Newman and Alumbaugh (1995)와 Sasaki (1999)가 모델링 알고리즘 검증에 이용한 모델이다. 단층 좌측이 100 ohm-m, 우측이 300 ohm-m이며 단층을 따라서 1 ohm-m의 저비저항 맥이 깊이 50 m에 존재한다. 송수신코일의 간격은 10 m, 비행고도는 20 m, 그리고 주파수는 900 Hz이다. 여기서 소개하는 모델링법은 앞서 설명한 유한차분법에 기초하고 있으며, 이는 이미 전기비저항법의 모델링에 익숙한 사람에게는 큰 어려움이 없는 방법이다. 균질 반무한공간에 대한 1차장 계

산에 필요한 Hankel  $J_0$ 와  $J_1$  변환 적분의 평가에는 길이가 각각 61과 47개인 Guptasarma and Singh (1997)의 필터를 사용하였다. Sasaki (1999)와 마찬가지로 계산영역을  $34 \times 34 \times 39$ 의 셀로 분할하고, 제곱 잔여가  $10^{-6}$  이하가 되면 수렴한 것으로 판단하였다.

Fig. 5는 Fig. 4의 모델에 대한 계산결과를 나타낸 것이다. 그림의 값은 전체자기장에서 공기층에 대한 1차장을 뺀 2차장의 1차장에 대한 비율을 ppm 단위로 표시한 것이다. 모델링 결과는 Newman and Alumbaugh (1995)의 결과와 잘 일치하고 있다. 참고로 그들은 반복해법으로 QMR법을, 그리고 전처리로 Jacobi scaling을 이용하였으며 발산보정은 사용하지 않았다. 송신 총 18점에 대해 자기장을 계산하는데 필요한 시간은 Note book PC (Intel P8800 2.66 GHz, 64 bit, 4G RAM)로 1분 남짓이다.

### 결론

본보에서는 주파수영역 전자탐사의 3차원 모델링을 유한차분법이나 유한요소법을 이용하여 수행하는데 필요한 기초적 사항에 대해 설명하였다. 인공송신원을 이용한 전자탐사의 경우 송신원에서의 특이성을 피하기 위해 지배방정식을 2차장으로 정식화하는 것이 유리하다. 일반적으로는 전기장의 2차장에 관한 Helmholtz 방정식을 유도하고 자기장은 구해진 전기장으로부터 Maxwell 방정식의 유한차분을 통해 구하게 된다. 그리고 유한차분법이나 유한요소법을 이용하여 2차장 지배방정식을 모델 영역에 대해 이산화하는 방법과 그 결과 얻어지는 연립방정식을 풀기 위한 반복해법과 직접해법에 대해 소개하였다. 반복해법은 직접해법에 비해 필요한 기억용량은 상대적으로 적으나 그 수렴성은 연립방정식의 조건수에 따라 좌우된다. 변유한요소법은 요소 모서리에 전기장의 접선성분을 할당하는 점에서 유한차분법에서 사용하는 staggered 격자의 type I과 유사하다. 반복해법의 수렴성은 발산보정에 의해 대폭 향상되는데 이는 유한차분법에서 지표지형을 모델링할 때 특히 유용하다. 그러나 지형효과를 올바르게 모델링할 경우에는 계단식으로밖에 표현하지 못한 유한차분법에 비해 유한요소법이 더 효과적이다. 마지막으로 항공전자탐사를 예를 들어 유한차분법을 이용한 3차원 모델링법에 대해 소개하였고, 그 모델링이 신속 정확하게 이루어지는 것을 보여주었다. 이 모델링법은 GEM-3와 같은 지상 loop-loop 탐사에도 그대로 적용 가능하다.

### 감사의 글

이 연구는 2010년도 교육부의 재원으로 한국연구재단의 지원(NRF 2010-0021937)을 받았으며, 일부 산업통상자원부의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원(20112010300050)

을 받아 수행하였습니다.

## References

- Anderson, W. L., 1982, Fast Hankel transforms using related and lagged convolutions, *ACM Trans. Math. Software*, **8**, 344-368.
- Chung, Y., Son, J.-S., Lee, T. J., Kim, H. J., and Shin, C., 2011, 3D CSEM modeling and inversion algorithms for a surface-to-borehole survey, *81st Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 645-649.
- Chung, Y., Son, J.-S., Lee, T. J., Kim, H. J., and Shin, C., 2014, Three-dimensional modelling of controlled-source electromagnetic surveys using an edge finite-element method with a direct solver, *Geophysical Prospecting*, doi: 10.1111/1365-2478.12132.
- Dey, A., and Morrison, H. F., 1979, Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures, *Geophysics*, **44**, 753-780.
- Farquharson, C. G., and Miensoopust, M. P., 2011, Three-dimensional finite-element modelling of magnetotelluric data with a divergence correction, *J. Appl. Geophys.*, **75**, 699-710. doi: 10.1016/j.jappgeo.2011.09.025
- Guptasarma, D., and Singh, B., 1997, New digital linear filters for Handel  $J_0$  and  $J_1$  transforms, *Geophysical Prospecting*, **45**, 745-762.
- Han, N., Nam, M. J., Kim, H. J., Song, Y., and Suh, J. H., 2009, A comparison of accuracy and computation time of three-dimensional magnetotelluric modeling algorithms, *J. Geophys. Eng.*, **6**, 136-145. doi:10.1088/1742-2132/6/2/005.
- Han, N., Nam, M. J., Ku, B., and Kim, H. J., 2012, Three-dimensional modeling of marine controlled-source electromagnetic surveys based on finite difference method, *Jigu-Mulli-wa-Mulli-Tamsa*, **15**, 66-74. (in Korean with English abstract)
- Kim, H. J., Nam, M. J., Song, Y., and Suh, J. H., 2004, Review on the three-dimensional magnetotelluric modeling, *Mulli-Tamsa*, **7**, 148-154. (in Korean with English abstract)
- Kim, H. J., Choi, J., Han, N., Song, Y., and Lee, K. H., 2009, Primary solution evaluations for interpreting electromagnetic data, *Jigu-Mulli-wa-Mulli-Tamsa*, **12**, 361-366. (in Korean with English abstract)
- Kim, H. J., 2011, A scheme for computing primary fields in modeling of marine controlled-source electromagnetic surveys, *Jigu-Mulli-wa-Mulli-Tamsa*, **14**, 185-190. (in Korean with English abstract)
- Mackie, R. I., Smith, J. T., and Madden, T. R., 1994, Three-dimensional electromagnetic modeling using finite difference equations: The magnetotelluric example, *Radio Science*, **29**, 923-935.
- McGillivray, P. R., D. W. Oldenburg, R. G. Ellis, and T. M. Habashy, 1994, Calculation of sensitivities for the frequency-domain electromagnetic problem, *Geophys. J. Int.*, **116**, 1-4.
- Nam, M. J., Kim, H. J., Song, Y., Lee, T. J., Son, J.-S., and Suh, J. H., 2007a, Three-dimensional magnetotelluric modeling including surface topography, *Geophysical Prospecting*, **55**, 277-287.
- Nam, M. J., Kim, H. J., Song, Y., Lee, T. J., and Suh, J. H., 2007b, Effects of 3D topography on Magnetotelluric responses, *Mulli-Tamsa*, **10**, 275-284. (in Korean with English abstract)
- Nam, M. J., Kim, H. J., Song, Y., Lee, T. J., and Suh, J. H., 2009, Three-dimensional topographic and bathymetric effects on magnetotelluric responses in Jeju Island, Korea, *Geophys. J. Int.*, **176**, 457-466.
- Nam, M. J., Han, N., Kim, H. J., and Song, Y., 2011, Modeling of magnetotelluric data based on finite element method: Calculation of auxiliary fields, *Jigu-Mulli-wa-Mulli-Tamsa*, **14**, 164-175. (in Korean with English abstract)
- Newman, G. A., and Alumbaugh, D. L., 1995, Frequency-domain modeling of airborne electromagnetic responses using staggered finite differences, *Geophysical Prospecting*, **43**, 1021-1042.
- Pridmore, D. F., Hohmann, G. W., Ward, S. H., and Sill, W. R., 1981, An investigation of finite-element method, *Geophysics*, **46**, 1009-1024.
- Reddy, I. K., Rankin, D., and Phillips, R. J., 1977, Three-dimensional modeling in magnetotelluric and magnetic variational sounding, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **51**, 313-325.
- Sasaki, Y., 1999, Three-dimensional frequency-domain electromagnetic modeling using the finite-difference method, *Butsuri-Tamsa*, **52**, 421-431. (in Japanese with English abstract)
- Smith, J. T., 1996, Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part II: Biconjugate gradient solution and an accelerator, *Geophysics*, **61**, 1319-1324.
- Son, J.-S., Song, Y., Chung, S.-H., and Suh, J. H., 2002, Three-dimensional high-frequency electromagnetic modeling using vector finite elements, *Mulli-Tamsa*, **5**, 280-290. (in Korean with English abstract)
- Yee, K. S., 1966, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media, *IEEE Trans. Antenn. Prop.*, **AP-14**, 302-307.