직교이방성 구형판의 좌굴 해석 (I)

Buckling Analysis of a Orthotropic Rectangular Plates

장석윤 (Chang Suk-Yoon) 명예회장 | 서울시립대학교 명예교수 | changsy@uos.ac.kr

1. 서론

복합 신소재 구조물은 화이바와 매트릭스로 구성된 복합구조체로서 화이바의 배치 상태나 여러 층으로 구성된 적층 구조체로서 1개 층내에서도 화이바의 각도와 여러 화이바가 중첩하여 여러 방향으로 배열된 층의 시스템의 내용에 따라 매우 복잡한 구조특성을 갖게 된다. 이러한 층들이 적층되면서 비등방성 적층구조체가 되어 적층 내용에 따라 구조체의 거동(Behavior)이 다양하게 발생하므로 이런 문제들을 구조적 목적에 합리적이어야 한다. 즉 다양한 외력 내 역학적으로 합리적인 구조 형식이 되도록 면밀하게 설계되어야 하나 구조해석이나 구조물 제조 과정에 문제가 있어 합리적인 구조체가 아닐 경우 문제가 발생하게 된다. 따라서 이러한 문제를 거시적으로 단순화하여 이론을 정립하여 해결 할 수밖에 없게 된다. 이러한 문제를 예측 가능한 구조 시스템으로 이상화하고 제조 과정도 단순화함으로서 문제 해결을 역학적으로 합리적으로 규명하도록 하여 정립할 필요가 있다. 따라서 적층도 대칭적층, 각층의 화이바 각도도 단순화하여 복잡한 거동을 유발시키지 않도록 합리적리고 단순화한 구조 형식을 고려할 수 밖에 없다. 따라서 그 대표적인 구조인 판이 직교이방성 대칭적층 판이다. 직교하는 방향으로 화이버를 배치하고 적층상태도 대칭으로 배열하여 구조체의 거동을 단순화하여 예측 가능토록 함으로서 합리적인 구조물을 설계할 수 있을 것이다. 따라서 대칭적층 직교이방성판으로 구성된 FRP 구조 형식은 재료의 특성상, 수직 및 전단 강성이 높은 강도에 비하면 비교적 약한 편이어서 특히 구조물의 안정성이 문제가 되어 면밀한 구조 해석이 요구된다.

지금까지는 단일 재료로 구성된 구조물은 비교적 해석 이론이 많이 정립되었으나 복합구조물에서는 지금까지 고전적인 방법으로는 몇 몇 특별한 경우에 한하여 제시된 바 있다. 따라서 이에 대한 필요성을 절감하여 비교적 최근에 제시된 연구 논문을 정리하여 복합구조설계에 필히 필요한 부분만을 이론의 배경과 해석결과를 정리하여 소개하고자 한다.

2. 직교이방성 구형판의 좌굴 기본 이론

일반적으로 판의 문제를 변형 에너지의 문제로 해결할 경우 변형 에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U=\frac{1}{2}\int_{0}^{L_x}\int_{0}^{L_y}\int_{h_c}^{h_t}(\sigma_x\epsilon_x+\sigma_y\epsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})dzdydx \quad (1)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\epsilon^0\\ \epsilon^0\\ \gamma^0_{xy}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_y\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[\overline{Q}]\begin{Bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \quad (3)$$

식 (2)와 (3) 을 (1)에 대입하면 다음과 같다.

$$U=\frac{1}{2}\int_{0}^{L_x}\int_{0}^{L_y}\begin{Bmatrix}\epsilon^0_x\\ \epsilon^0_y\\ \gamma_{xy}\\ k_x\\ k_y\\ k_{xy}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}&B_{11}&B_{12}&B_{16}\\ A_{12}&A_{22}&A_{26}&B_{12}&B_{22}&B_{26}\\ A_{16}&A_{26}&A_{66}&B_{16}&B_{26}&B_{66}\\ B_{11}&B_{12}&B_{16}&D_{11}&D_{12}&D_{16}\\ B_{12}&B_{22}&B_{26}&D_{12}&D_{22}&D_{26}\\ B_{16}&B_{26}&B_{66}&D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\epsilon^0_x\\ \epsilon^0_y\\ \gamma_{xy}\\ k_x\\ k_y\\ k_{xy}\end{Bmatrix}dydx \quad (4)$$

여기서 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}는 축강성, 연계 강성 및 휨강성을 각각 의미한다. 4변이 단순 지지이고 x 및 y방향으로 Lx, Ly인 4각형판의 적층판에서 적층이 대칭상태인 대층 적층판일 경우, $B_{ij}=0$ 에 대하여 판 주위에서 면내 하중이 N_{xo}, N_{yo}의 수직 하중과 N_{xy0}의 전달 하중이 균일하게 분포하여 작용할 경우를 가정하면, 이 하중들이 점진적으로 증가될 경우 하중은 λ를 하중의 매개변수로 하는 하중 $\lambda N_{x0},\lambda N_{yo},\lambda N_{xyo}$ 로 표시 할 수 있다. “Whitney”는 식 (1)에서 단순지지이고 대칭 적층판에서 판에 수직으로의 하중이 작용할 경우의 변형 에너지를 다음과 같이 유도하였다.

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{Lx}\int_{0}^{Ly}\{\kappa_x\kappa_y\kappa_{xy}\}\begin{pmatrix}D_{11}&D_{12}&D_{16}\\ D_{12}&D_{22}&D_{26}\\ D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\end{Bmatrix}\ dydx \quad (5)$$

식 (5)를 처짐 방정식으로 변환할 경우 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{Lx}\int_{0}^{Ly}[D_{11}(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2})^2+D_{22}(\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2})^2+D_{66}(2\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\,\partial y})^2$$

$$+2(D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}+D_{16}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x\,\partial y}+D_{26}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\frac{2\partial^2 w^0}{\partial x\,\partial y})]$$

$$dydx \quad (6)$$

한편, 면내하중을 받는 판의 경우 면내 하중, N_x, N_y, N_{xy}의 외력이 판의 경계에 작용할 경우의 에너지 Ω는 다음과 같다.

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_{0}^{Lx}\int_{0}^{Ly}[N_x(\frac{\partial w^0}{\partial x})^2+N_y(\frac{\partial w^0}{\partial y})^2+$$

$$2N_{xy}\frac{\partial w^0}{\partial x}\frac{\partial w^0}{\partial y}]dydx \quad (7)$$

이들 면내하중이 경계면에서의 하중이 λN_{x0}, λN_{y0}, λN_{xy0} 일 경우는 다음과 같다.

$$N_x=-\lambda N_{x0},\ N_y=-\lambda N_{y0},\ N_{xy}=-\lambda N_{xy0} \quad (8)$$

다음으로, 처짐값을 얻기 위하여 Ritz 해법을 사용할 경우 경계면에서의 경계조건을 고려한 경우 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$w^0=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}w_{ij}\sin\frac{i\pi x}{L_x}\frac{j\pi y}{L_y} \quad (9)$$

여기서 w_{ij}는 상수로서 포텐셜 에너지 원리에 의하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial (U+\Omega)}{\partial w_{ij}} = 0 \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(G_{mnij} - \lambda b_{mnij})w_{ij} = 0 \tag{11}$$

$$\begin{cases} i,m = 1,2,3,\cdots I \\ j,n = 1,2,3,\cdots J \end{cases}$$

편의상,

$$K = (i-1)J + j \begin{cases} i = 1,2,3,\cdots I \\ j = 1,2,3,\cdots J \end{cases} \tag{12}$$

$$l = (m-1)J + n \begin{cases} m = 1,2,3,\cdots I \\ n = 1,2,3,\cdots J \end{cases} \tag{13}$$

식 (11)는 다음과 같이 표시 할 수 있다

$$\sum_{k=1}^{I\times J} G_{kl} w_k = \lambda \sum_{k=1}^{I\times J} b_{kl} w_k \tag{14}$$

$$l = 1,2,3,\cdots I \times J$$

$$b_{lk} = \frac{1}{4} L_x L_y \pi^2 [N_{x0}(\frac{i}{L_x})^2 + N_{y0}(\frac{i}{L_y})^2]\delta_{lk} + L_x L_y \pi^2 N_{xy0}(\frac{i}{L_x}\frac{n}{L_y} r_{mi} r_{jn} + \frac{j}{L_y}\frac{m}{L_x} r_{im} r_{nj}) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} G_{lk} = &\frac{1}{4} L_x L_y \pi^4 [D_{11}(\frac{i}{L_x})^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \\ &(\frac{i}{L_x})^2(\frac{j}{L_y})^2 + D_{22}(\frac{j}{L_y})^4]\delta_{lk} \\ &-2L_x L_y \pi^4 D_{16}[(\frac{i}{L_x})^2(\frac{m}{L_x})(\frac{n}{L_y}) r_{im} r_{jn} \\ &+(\frac{m}{L_x})^2(\frac{i}{L_x})(\frac{j}{L_y}) r_{mi} r_{nj}] \\ &-2L_x L_y \pi^4 D_{26}[(\frac{j}{L_y})^2(\frac{m}{L_x})(\frac{n}{L_y}) r_{im} r_{jn} \\ &+(\frac{n}{L_x})^2(\frac{i}{L_x})(\frac{j}{L_y}) r_{mi} r_{nj}] \end{aligned}$$

$$\delta_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2i}{i^2 - j^2}\dfrac{1}{\pi} & \text{if } (i-j) \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } (i-j) \text{ is even} \end{cases}$$

$$k = (i-1)J + j \quad \begin{cases} i = 1,2,3\cdots I \\ j = 1,2,3\cdots J \end{cases}$$

$$l = (m-1)J + n \quad \begin{cases} m = 1,2,3\cdots I \\ n = 1,2,3\cdots J \end{cases} \tag{16}$$

식 (11)은 다음과 같이 표시 할 수 있다.

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1(I\times J)} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{(I\times J)1} & \dots & G_{(I\times J)(I\times J)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1(I\times J)} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{(I\times J)1} & \cdots & b_{(I\times J)(I\times J)} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{(I\times J)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

여기서, J x I 의 가장 작은 값이 좌굴 하중이 된다. 편의상 단수지지상태의 직교 이방성 판의 좌굴을 고려할 경우 경계에서의 하중도 $N_x = -\lambda N_{x0},\ N_y = -\lambda N_{yo},\ N_{xy} = 0$ 인 특별한 경우의 좌굴을 고려할 경우의 직교이방성 대칭 적층판의 좌굴 하중매개 변수 $(\lambda_{cr})_{i,j}$는

$$(\lambda_{cr})_{i,j} = \frac{\pi^2[D_{11}(\frac{i}{L_x})^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(\frac{i}{L_x})^2(\frac{j}{L_y})^2]}{N_{xo}(\frac{i}{L_x})^2 + N_{yo}(\frac{j}{L_y})^2} + \frac{\pi^2[D_{22}(\frac{j}{L_y})^4]}{N_{xo}(\frac{i}{L_x})^2 + N_{yo}(\frac{j}{L_y})^2} \tag{18}$$

$(\lambda_{cr})_{i,j}$ 값은 i, j $(i,j = 1,2,3,\dots)$ 각기 다른 값에 따라 계산해야 하나 가장 작은 값이 좌굴 하중이다.

-다음호에 계속-