

분수의 나눗셈과 관련된 초등학교 6학년 학생들의 인지구조 분석 - 단어연상검사(Word Association Test) 적용 -

이효진(춘천근화초등학교)

이광호(한국교원대학교)

I. 서론

분수의 나눗셈은 초등학교 수와 연산 영역의 최상위 내용이다. 이 단원을 통하여 곱셈적 사고와 비례적 사고, 더 나아가 대수적 사고를 계발할 수 있다. 그러나 분수의 나눗셈은 가르치기 어렵고 배우기 어려운 주제(신준식, 1996; Ma, 1999; Flores, 2002; 방정숙, Li, 2008; 김민경, 2009)이며, 학교 현장에서는 분수의 나눗셈에 대한 의미도 모른 채 형식적인 계산 알고리즘만 가르치고 학습하는 경우가 많다. 이러한 상황에서 많은 선행연구자들은 학생들이 분수의 나눗셈을 어떻게 어느 정도 이해하고 있는지에 관심을 가져왔다.

구체적으로 분수의 나눗셈에 관한 학생들의 이해를 분석한 선행연구들을 살펴보면, 대부분의 학생들이 분수의 나눗셈 알고리즘으로 문제를 해결하다보니 분수의 나눗셈 의미를 충분히 이해하지 못하고(김민경, 2009) 분수의 나눗셈에 대한 능숙한 계산 기능에 비해 높은 연산 감각을 갖고 있지 못하며(방정숙, 이지영, 2009a) 학생들이 분수의 나눗셈을 등분할, 측정, 곱셈의 역, 분수의 나눗셈 절차로 이해하고 있는데, 그 중에서도 분수의 나눗셈 절차로 이해하는 학생이 가장 많았다(김경미, 황우형, 2011). 즉 대부분의 선행연구는 분수의 나눗셈 문제를 어떻게 이해하고 해결하고 있는지 문제해결장면에 초점을 둘뿐 그렇게 문제를 해결하는 이유, 어떤 개념들이 서로 어떻게 유기적으로 연상되어 문제를 해결하게 하는

지 그 기제(mechanism)에 대한 연구는 거의 이루어지지 않았다. 그러나 최근에 김경미, 황우형(2012)은 이전에 학습한 자연수의 연산이 분수의 연산에 어떠한 영향을 미치는지 연구하여 이전의 자연수 지식이 분수의 곱셈과 분수의 나눗셈 개념 이해를 방해하고 있다는 결과를 얻기도 하였다.

한편 수학을 이해하는 것은 아이디어, 사실, 절차 등을 일종의 관계성 또는 연결성에 의하여 파악하는 것으로(Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, & Murray et al., 1997) 인지적 연계성을 구성하는 것이다(Haylock, 1982). 따라서 학생의 인지적 연계성, 즉 인지구조를 안다는 것은 학습자의 포괄적인 성취 수준을 아는 것에 비해서 학생을 보다 구체적이고 구조적으로 이해할 수 있다(김성훈, 2005). 특히 정형주(2000)는 학습자가 느끼는 어려움의 정도에 대한 이해를 인지구조에 대한 이해로부터 시작할 수 있다고 할 정도로 학생들의 인지구조를 분석하는 것은 학생들의 이해의 정도를 파악하는 데 있어서 중요하다.

최근에 분수의 나눗셈에 대한 학습자의 인지구조를 분석한 연구(이영주, 이광호, 이효진, 2012)가 진행되었다. 이영주 등(2012)은 면담을 통해 분수의 나눗셈 문제 해결과 관련된 나눗셈, 분수, 분수의 연산에 대한 이해의 정도를 파악하여 6학년 3명의 사전인지구조를 분석하였으며 분수의 나눗셈 문제 해결 과정에서 사전인지구조와 어떻게 연결되는지 분석함으로써 학생들의 분수의 나눗셈 이해를 구체적이고 구조적으로 이해할 수 있는 시각을 제시하였다. 그러나 3명의 학생만을 대상으로 하였기에 6학년 학생들의 인지구조로 일반화시키기 어려우며, 개념과 개념 간의 연결 여부만 제시되어 있어서 학생들의 인지구조의 차이를 설명하기에는 어려움이 있었다. 훌륭한 문제해결자의 인지구조는 그렇지 못한 사람들보

* 접수일(2014년 03월 18일), 수정일(2014년 06월 07일), 게재확정일(2014년 08월 12일)

* ZDM분류 : C32

* MSC2000분류 : 97C30

* 주제어 : 분수의 나눗셈, 인지구조, 단어연상검사

* 본 연구는 이효진의 석사논문을 요약한 것이다.

다 더 많은 연결을 포함하고 있으며 복잡하다(Bahar, Johnstone, & Sutcliff, 1999)고 하는데 학생들의 수준에 따라 인지구조 안에서 개념간의 연결, 연결의 강도 등은 구체적으로 어떠한 차이를 나타내는데 대한 연구가 좀 더 이루어질 필요가 있다.

따라서 본 연구의 목적은 분수의 나눗셈과 관련된 개념들이 어떻게, 얼마나 강하게 연결되어 있는지 조사하고 분석함으로써 분수의 나눗셈 문제해결 능력의 수준에 따라 학생들의 인지구조에 어떠한 차이가 있는지 이해하는 것이다. 이를 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

- 1) 분수의 나눗셈과 관련된 개념 사이의 자동성 획득은 어떠한가?
- 2) 분수의 나눗셈과 관련된 개념들의 연결강도는 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. 인지심리학과 인지구조

인지심리학의 초점은 어떻게 우리가 정보를 획득하며, 저장하고, 사용하는 것인지에 관한 것으로 연구대상이 행동이 아닌 마음이다(Martindale, 1991). 마음은 개인의 문제이며 개인이 정보를 획득하고 저장하고 사용하는 기제를 분석하기 위해 어떤 형태로든 인지구조를 상정할 필요가 있다.

오늘날 학습에서 인지주의적 시각이 강조되고 있는 이유는 인간이 정보를 처리하고 저장함으로써 인지구조를 변화시켜 나간다는 관점이 행동주의적 원리보다는 다양한 학습 현상을 보다 정밀하게 설명할 수 있기 때문이다(임규혁, 임웅, 2007). Ausubel & Robinson은 학습이 유의미하게 일어나기 위해 가장 중요한 것은 학습이 일어나는 바로 그때의 학습자에게 내재되어 있는 인지구조(임규혁, 임웅, 2007)라고 봄으로써 학습자가 가지고 있는 인지구조를 파악하는 것의 중요성을 언급하였다.

인지구조는 학생들의 장기기억에서 개념사이의 관계를 보여주는 가상적인 구조이다(Shavelson, 1974). 이 구조는 수동적으로 만들어지는 것이 아니라 능동적으로 구조화된다는 점에서 각 개인마다 차이가 있다. 즉 각 개인은 분수의 나눗셈과 관련하여 각기 다른 인지구조를

형성하고 있다고 볼 수 있다. 또한 인지구조의 발달에 대한 Piaget의 요지는 나이가 들어가면서 단지 더 많은 지식을 획득하는 것이 아닌 새롭고 더욱 복잡한 인지구조를 발달시킨다는 것이다(Resnick & Ford, 1981). 이것은 학생의 수준에 따라 인지구조의 복잡성에 차이가 있다는 것을 말해준다. 이러한 관점에 따라 그동안 교육자와 인지과학자들은 '인지구조'를 통해 이미 획득한 지식을 표현하려고 시도해왔으며 학생들의 인지구조를 탐구하여 그들의 사전지식, 교사의 교수방법의 효과, 학생들의 지식 발달 과정 등을 조사해 왔다(Wu & Tsai, 2005).

2. 인지구조 연구방법과 단어연상검사

인지구조는 보이지 않는 Black Box와 같아서 직접 관찰하기 어렵기 때문에 그동안 인지구조를 연구하는 방법이 다양하게 제기되어 왔다. Ifenthaler, Masduki, & Seel(2011)은 인지구조를 밖으로 끌어내고 표면화하는 방법에 따라 [표 1]과 같이 언어로 인지구조를 끌어내는 언어 접근법(natural language approaches)과 그림으로 인지구조를 끌어내는 그래프적 접근법(graphical approaches)으로 구분하였다.

[표 1] 인지구조 연구 방법(Ifenthaler, Masduki, & Seel, 2011)
[Table 1] Research Methods for cognitive structure

언어 접근법	1) Thinking Aloud Protocols
	2) Word Association
	3) Structure Formation Technique
	4) MITOCAR
그래프적 접근법	1) Concept Mapping Tools
	2) Test for Causal Diagrams
	3) DEEP
	4) Pathfinder

두 종류의 접근법에 속한 방법들이 모두 타당성과 신뢰성이 확보되었지만 언어접근법에 더욱 주목할 필요가 있다. 왜냐하면 언어는 인지과정의 핵심과정이고 인지의 주된 도구이며 인지를 담는 형식(한광희, 1997)이기 때문이다. 특히 언어접근법 중 단어연상검사(Word Association Test)는 인지구조를 분석하는 가장 오래되고 보편적인 방법으로(Shavelson, 1974; Bahar et al., 1999;

Bahar & Tongaç, 2009) 많은 연구자들이 학생들의 인지구조를 조사하기 위해 활용해왔다(Shavelson, 1974; Geeslin & Shavelson, 1975; Cachapuz & Maskill, 1987; Bahar et al., 1999; Bahar & Tongaç, 2009; Aydin & Taşar, 2010; Ercan, Taşdere, & Ercan, 2010).

단어연상검사는 검사하려는 주제와 관련한 개념이 서로 어떻게 연결되어 있는지를 파악함으로써 인지구조를 분석하는 방법이다. 단어연상검사를 활용하여 인지구조를 분석한 선행연구(Geeslin & Shavelson, 1975; Bahar et al., 1999; Aydin & Taşar, 2010)에 제시된 절차들을 정리하면 [표 2]와 같다.

[표 2] 단어연상검사의 절차
[Table 2] Procedures of word association test

1단계	연구 주제와 관련된 핵심개념 선정하기 검사지의 상단에 핵심단어를 1개씩 제공하며, 학생들은 그 핵심단어와 가장 관련이 된다고 생각하는 것부터 어떤 관련이 있는지 적게 한다.
2단계	- 검사지 상단에 제시되는 핵심단어는 자극단어(stimulus word)라고 한다. - 이 때, 각 핵심단어마다 연구자가 30초~1분씩 통제한다.
3단계	반응의 빈도수와 관련성 계수를 계산한다. 가장 빈도수가 높은 단어를 찾고 가장 높은 빈도수보다 낮게 cut-off point를 정한다.
4단계	핵심개념이 모두 제시될 때까지 단계적으로 cut-off point 낮춘다.
5단계	cut-off point 단계마다 제시된 개념 간의 연결을 이용하여 인지구조를 그린다.

핵심단어는 보통 10개에서 11개가 추출되며 주제가 포함되는 경우와 그렇지 않은 경우가 혼재하며 연구대상은 개인이 아닌 집단을 대상으로 연구가 이루어졌다. cut-off point는 4단계에서 5단계로 설계되어 있었다.

3. 단어연상검사 결과의 의미

단어연상검사는 연결의 수(number), 방향(direction), 강도(strength)를 측정하는 신뢰로운 방법이다(Novak & Govin, 1984; Mervis & Rosch, 1981). 즉 단어연상검사를 통해 연결의 수, 방향, 강도 등을 파악할 수 있다는 것이다.

1) 빈도수 : 연결의 수와 방향

단어연상검사의 결과를 정리하는 한 가지 방법은 각 단어에 대한 반응 빈도수를 측정하는 것이다(Shavelson, 1974). 단어연상검사에서 단어A와 단어B의 연결 빈도수는 단어A에서 단어B가 연상된 수와 단어B에서 단어A가 연상된 수의 합으로 결정된다. 예를 들어, 분수의 나눗셈과 분수의 곱셈 연결 빈도수는 분수의 나눗셈에서 분수의 곱셈이 연결된 빈도수와 분수의 곱셈에서 분수의 나눗셈이 연결된 빈도수를 합하여 결정된다. 이러한 과정 속에서 빈도수를 파악할 수 있을 뿐만 아니라 어떤 단어와 어떤 단어가 연결되어 있는지 방향성도 함께 확인할 수 있다.

단어연상검사를 활용한 연구에서는 주로 관련성 계수를 계산하여 인지구조를 분석하기 때문에 빈도수에 대한 결과는 관련성 계수에 의한 결과의 부수적인 자료로 사용되는 경우가 많다. 그러나 본 연구에서는 빈도수를 자동성 획득 측면에서 바라보고자 한다. 왜냐하면 빈도수가 많다는 것은 인지구조에서 반응이 회수되는 시간이 짧다는 것이고 그만큼 자동성을 획득하였다고 볼 수 있기 때문이다. 자동성(automaticity)은 정보나 원리를 매우 많이 연습함으로써 습득될 수 있는 것으로(임규혁, 임웅, 2007) 자동성을 획득하게 되면 속도가 빨라지고, 노력이 적게 들며, 자율적이 되고, 항상성을 가지며 의식적으로 조절하지 않아도 된다(임규혁, 임웅, 2007 재인용). 예를 들어, 분수의 나눗셈과 약분의 연상 빈도수가 다른 단어들의 연상 빈도수에 비하여 월등히 많다면 이것은 자동성이 획득되었다고 볼 수 있다.

또한 개념간의 연상 빈도수로 그려진 인지구조에서 청크(chunk)도 확인할 수 있다. 청크는 개념 주위의 집단적인 정보인데, 네트워크 관계는 어떤 특별한 지식의 항목을 중앙 또는 '집합점(central or nodal)'의 위치에 놓고 상호 관련된 큰 덩어리(chunk)로 지식을 조직한다(Resnick & Ford, 1981). 예를 들어, 분수의 나눗셈, 분수의 곱셈, 약분이 서로 유기적으로 연결되어 청크를 형성한 경우를 찾아볼 수 있었는데 이러한 경우에 문제해결에 빠른 도움을 줄 수 있지만 그렇지 않을 경우엔 문제해결에 시간이 많이 걸리거나 결국 연상이 안 되어 문제를 해결하지 못할 수 있다.

2) 관련성 계수(Relatedness Coefficient, RC) : 연결강도 자동성이 강하다는 것은 반응 속도가 빠른 것으로 판단할 수 있기 때문에 빈도수로 분석해 볼 수도 있지만 자동성을 획득하면 항상성을 가진다고 하는데 그것은 각 단어사이의 연결이 얼마나 지속적으로 일정하게 나타나는가 하는 문제로 접근할 수 있다. 개념 간의 연결강도를 분석하기 위해 일반적으로 Garskof & Houston(1963)의 관련성 계수 계산 방법을 활용해왔다.

관련성 계수는 단어연상검사 결과를 분석하는 가장 일반적인 방법으로 두 개의 자극단어 각각에 연상된 단어 사이의 공통된 연상 단어의 수와 공통된 연상 단어의 순서를 통해 측정하는 것이다. 이것은 Garskoff & Houston(1963)이 만든 공식으로 계산할 수 있다(Bahar & Tongaç, 2009).

Garskoff & Houston(1963)은 연상(association)의 의미로 두 가지 고려할 점을 이야기했다. 특정 단어에 대한 각각의 연상은 그 단어의 부분적인 의미로 그 단어의 정의에 있어서 필수적인 부분이라는 것과 단어 연상은 심리적 중요성을 반영하여 상대적으로 안정된 배열을 가지고 있기 때문에 단어 연상 순서를 생각해야 한다는 것이다. 즉 어떤 단어가 어떤 순서로 연상되었는지가 중요하다. 이러한 가정 하에 관련성 계수는 두 단어 사이의 연상된 단어가 최대한 일치한 경우에 대한 실제 일치한 것의 비(ratio)로써 공식화하였다.

$$RC = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{(A \cdot B) - [n^p - (n-1)^p]}$$

※ RC = 관련성 계수 / $A \cdot B$ = 각기 다른 자극단어에 대한 연상 단어 모임 값 / $\bar{A} \cdot \bar{B}$ = 실제 겹쳐지는 부분의 값 / n = 연상단어의 수 / p = 가중치 계수¹⁾

1) p 는 가중치 계수로서 어떠한 연상 체계를 가지고 있느냐에 따라 달라지며 추정되는 값이다. 예를 들어, 창의력이 높은 사람은 평평한 연상 체계를 가지는 반면 창의력이 낮은 사람은 가파른 연상 체계를 가지는데 창의성이 낮을 때 p 값의 근사치는 2, 창의성이 높을 때 p 값의 근사치는 1이다. 그렇다고 p 값이 1과 2로만 정해지는 것은 아니다(Garskoff & Houston, 1963). p 값은 추정치로서 본 연구에서는 p 값을 2로 놓았을 때 관련성 계수가 음수가 나오에 따라(관련성 계수의 값은 0~1인데, 이에 반한 결과다.) p 값을 1로 놓았으며 이는 기존의 선행연구에서도 별 다른 논의 없이 p 값을 1로 계산하였기에 문제가 되지 않는다고 판단하였다.

A와 B가 어떤 공통적인 요소가 없으면 $\bar{A} \cdot \bar{B}$ 는 0이기 때문에 관련성 계수는 0이 나온다. 반대로 A와 B 모든 원소가 일치하고 순서도 같다면 관련성 계수는 최대치 1을 얻을 수 있다. 즉 관련성 계수는 0~1값을 갖는다.

[그림 1]은 Garskoff & Houston(1963)의 관련성 계수 계산 방법에 따라 분수의 나눗셈과 분수의 곱셈의 관련성 계수 계산 과정을 보여주는 것이다.

● 핵심단어 : 분수의 나눗셈, 분수의 곱셈

‘분수의 나눗셈’과 연결	순위	‘분수의 곱셈’과 연결	순위
분수의 나눗셈	4 ²⁾	분수의 곱셈	4
약분	3	약분	3
가분수	2	기약분수	2
		분수의 나눗셈	1

● A=(분수의 나눗셈, 약분, 가분수)
 ● B=(분수의 곱셈, 약분, 기약분수, 분수의 나눗셈)
 ● A=(4, 3, 2) ● B=(4, 3, 2, 1)
 ● C=(분수의 나눗셈, 약분)
 ● \bar{A} =(4, 3) ● \bar{B} =(1, 3)
 ● RC

$$= \frac{(4,3) \cdot (1,3)}{(4,3,2,1) \cdot (4,3,2,1) - 1}$$

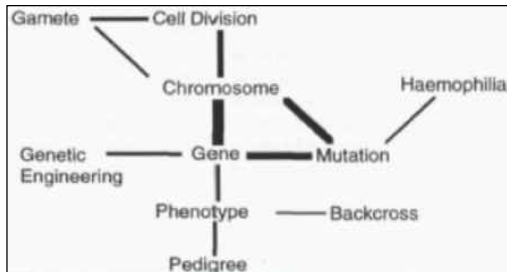
$$= \frac{(4 \cdot 1) + (3 \cdot 3)}{[(4 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1)] - 1}$$

$$= \frac{4+9}{(16+9+4+1) - 1} = 0.448$$

[그림 1] ‘분수의 나눗셈’과 ‘분수의 곱셈’의 관련성 계수를 계산하는 절차
 [Fig. 1] Calculation process of coefficient relationship between ‘division of fraction’ and ‘multiplication of fraction’

2) 연상 단어의 총 개수가 다를지라도 첫 번째 단어에 같은 무게를 둔다. 작은 체계에서 처음 연결된 것의 중요성은 더 큰 체계에서 처음 연결된 것의 중요성만큼 크다는 가정에 근거한다(Garskoff & Houston, 1963).
 3) A=(4,3,2), B=(4,3,2,1)이지만 관련성을 계산할 때, (4,3,2,1)·(4,3,2,1)로 계산하는 것은 각주 2에서 설명한 것과 마찬가지로 이유이다. 가장 먼저 연상된 단어에 초점을 두고 계산하기 때문으로 판단되며 관련성 계수 공식을 도출한 (Garskoff & Houston, 1963)의 논문에서도 위와 같은 계산 사례를 제시하였다.

관련성 계수를 통해 그린 인지구조는 [그림 2]와 같이 교차점이 등거리 지점에 존재하는 물고기를 잡는 그물망과 다르다(Bahar et al., 1999). 이것은 개념 간의 연결의 유무가 다르며 연결강도도 다르기 때문이다.



[그림 2] 관련성 계수로 그린 인지구조의 예(Bahar et al., 1999)
 [Fig. 2] Example of cognitive structure considering coefficient relationship

4. 분수의 나눗셈 이해와 관련된 선행연구 고찰

분수의 나눗셈은 초등학교에서 다루는 연산 중 가장 난이도가 높은 주제로 많은 학생들이 배우기 어려워하고 교사들도 가르치기 힘들어 하는 부분이다. 따라서 분수의 나눗셈과 관련된 국내의 선행연구는 분수의 나눗셈을 효과적으로 가르칠 수 있는 방법이 무엇인지를 다루는 연구(전평국, 박혜경, 2003; 백선수, 2004; 임재훈, 김수미, 박교식, 2005; 임재훈, 2007; 김명운, 장경운, 2009)와 분수의 나눗셈에 대한 학생과 교사(예비교사 포함)의 이해를 다루는 연구(김민경, 2003; 박교식, 송상현, 임재훈, 2004; 김경미, 강완, 2008; 방정숙, Yi, 2008; 김민경, 2009; 방정숙, 이지영, 2009a; 신재홍, 2010; 김경미, 황우형, 2011; 박교식, 권석일, 2011; 김경미, 황우형, 2012)로 진행되어 왔다.

분수의 나눗셈에 대한 학생과 교사(예비교사 포함)의 이해를 다루는 최근의 연구 결과는 [표 3]과 같다. 예비교사들을 대상으로 한 연구(김민경, 2003; 박교식, 송상현, 임재훈, 2004; 방정숙, Yi, 2008; 박교식, 권석일, 2011)에서 피제수와 제수가 분수일 경우나, 분수의 나눗셈의 결과가 분수가 나왔을 때 각각의 경우에서 분수의 의미를 잘 모른다는 결과를 얻었다. 초등학교 6학년 학생 500명 이상을 대상으로 한 양적연구(김경미, 강완,

2008; 김민경, 2009)에서 시간이 지남에 따라 오류를 수정해 나가고 제수를 역수로 바꾸어 계산하는 것이 가능했으며 피제수가 분수인 경우에 대해 이해하지 못하고 있음을 밝혔다. 사례연구에서는 능숙한 계산 기능에 비하여 연산감각이 부족하고(방정숙, 이지영, 2009a) 역수 곱하기를 분수의 나눗셈 의미로 이해하는 경우가 많다(김경미, 황우형, 2011)는 결과를 얻었다. 또한 분수의 나눗셈을 자연수 연산과 관련지어 그 관련성이 있음을 밝혔고(김경미, 황우형, 2012) 학생 스스로 역수를 곱하는 알고리즘을 구성할 수 있음을 밝힌 연구도 있었다(신재홍, 2010).

[표 3] 분수의 나눗셈에 대한 학생과 교사(예비교사 포함)의 이해에 대한 선행연구

[Table 3] Previous studies about students' and teachers' (including pre-service teachers) understanding of division of fraction

선행 연구	연구 대상	결과
김민경 (2003)	초등 예비 교사 178명	<나눗셈 개념에 대한 초등예비 교사의 이해도 분석> - 나눗셈에 있어 개념간의 관련성과 단위에 대한 이해가 충분하지 않은 것으로 나타남.
박교식, 송상현, 임재훈 (2004)	교육 대학교 3학년 71명	<우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구> - 48명 중 28명이 만든 62개의 올바른 분수 나눗셈 문장제를 포함제, 등분제, 단위 비율 결정, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역으로 나누어 분석. - 포함제, 단위 비율 결정, 곱셈의 역 상황이라는 분수의 나눗셈 의미 이해 부족.
김경미, 강완 (2008)	6학년 554명	<초등학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류 분석> - (분수)÷(자연수)의 계산에서 제수인 자연수를 역수로 바꾸지 못함. - 시간이 지나면서 다양한 오류가 보이기도 하지만 대부분의

		학생은 자신의 오류를 수정해 나감. - 오류를 수정해나가는 과정에서 제수를 역수로 바꾸어 계산해야 함을 인식.			곱하기와 같은 역할을 하는 자신의 자기-생성 알고리즘 구성 가능.
방정숙, Yi (2008)	교육대 4학년 2학기 예비교사 82명	<예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석> - 내용지식측면에선 높은 정답률을 보인 반면 단위분수끼리의 나눗셈을 포함제 의미로 해석하여 말로 제시하는 것을 어려워 함. - 교수내용지식측면에서 피제수와 제수 각각 자연수와 분수가 제시되는 경우, 그 의미가 어떻게 다른지에 대한 명확한 이해 부족. - 68% 예비교사만이 왜 제수의 역수를 취해 곱하는지 설명할 수 있음.	김경미, 황우형 (2011)	56학년 13명 정성적 사례 연구	<분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생의 이해와 문장제 해결의 관련성 분석> - 분수의 나눗셈의 계산절차(역수 곱하기)를 분수의 나눗셈의 의미로 이해하고 있는 학생들이 가장 많음.
		<초등학생의 분수 이해 분석 -6학년의 분수 개념 및 분수 나눗셈을 중심으로-> - $3\frac{1}{2}$ 에 대한 풀이과정으로 분수 나눗셈 이해 분석 - 분수형태의 제수가 어떻게 피제수를 나누는지 설명 못하고 알고리즘만 기계적으로 적용.	박교식, 권석일 (2011)	교육대학교 3학년 65명 지필 검사→ 5명 심층 면담	<예비초등교사들이 분수 포함제의 몫과 나머지 구하기에서 범하는 오류에 대한 분석> - 분수의 나눗셈 계산 결과를 해석하는 과정에서 자연수를 제외한 진분수 부분의 의미를 정확하게 이해하지 못함. - 포함제 맥락의 분수의 나눗셈을 포함제 맥락의 자연수 나눗셈으로 바꾸어 계산하는 오류를 범함.
김민경 (2009)	6학년 707명	<사례 연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석> - 분수의 나눗셈 의미 이해 : 포함제 문장제만 만들. - 분수의 나눗셈 알고리즘 의미 이해 : 능숙한 계산 기능에 비하여 알고리즘 의미 이해 취약. - 연산의 응용 : 학생들의 수학적 아이디어를 탐구하면서 만들어내는 표현은 중요한 역할을 함.	김경미, 황우형 (2012)	4학년 1명 5학년 7명 6학년 2명 총10명	<자연수와 분수 연산에 대한 학생들의 이해 분석> - 자연수의 곱셈과 나눗셈에 대한 지식과 분수의 곱셈과 나눗셈의 개념화 사이에 관련성 발견. - 자연수 나눗셈의 등분할 의미를 분수의 나눗셈으로 확장하면서 개념 구성에 어려움 겪는 학생 발견.
방정숙, 이지영 (2009a)	6학년 2명 (기본적인 계산 능력 뛰어남)	<분수 포함제 나눗셈을 해결하기 위한 학생들의 자기-생성 알고리즘 구성에 관한 연구> - 기준단위와 제수 사이의 상호관계 구성과 활용으로 '뒤집어서			선행연구를 분석한 결과, 몇 가지 한계점을 발견하였으며 본 연구에서 그것을 극복하고자 하였다. 첫째, 지금까지의 선행연구는 분수의 나눗셈 이해에 대한 부분적인 정보는 제공하나 분수의 나눗셈과 관련된 개념들이 어떠한 구조를 가지고 연결되어 있는지에 대한 연구가 이루어지지 않았다. 따라서 본 연구에서는 분수의 나눗셈과 관련된 개념간의 연결을 파악하여 분수의 나눗셈 이해를 구조적으로 파악하고자 하였다.
신재홍 (2010)	중학교 2학년 2명				둘째, 연구대상 선정 면에서 사례연구는 하 수준의 학생 선정이 이루어지지 않았고 조사연구의 경우 다수의 학생을 선정하였으나 학생의 수준에 따라 분수의 나눗셈

과 관련된 이해가 어떻게 다른지를 다루는 연구는 이루어지지 않았다. 따라서 본 연구에서는 우수, 보통, 기초 학생들의 인지구조를 통해 각 집단별 어떠한 특징이 있는지 살펴보았다.

선행연구의 내용 및 연구대상자 뿐만 아니라 선행연구에서 사용한 검사지에서도 한계점을 찾을 수 있었다. 교육과정에서는 분수의 형태에 따라 분수의 나눗셈 지도를 하고 있지만 대부분의 선행연구에서는 Sinicrope, Mick, & Kolb(2002)가 제시한 다섯 가지 분수의 나눗셈 의미를 기준으로 검사지 제작 및 분석을 시도함으로써 학교 현장에 주는 실제적인 시사점이 부족하다. 따라서 본 연구에서는 교육과정 내용에 근거하여 분수의 나눗셈 문제해결 검사지를 제작하여 학생의 수준을 나누는 데 활용하였으며 분수의 나눗셈과 관련된 개념 또한 최대한 교육과정에 근거하여 추출하였다.

III. 연구방법

1. 검사지

분수 나눗셈과 관련된 선행연구 및 지도서를 검토하여 우수, 보통, 기초학생별로 분수의 나눗셈 문제해결 능력을 구분해줄 검사지와 인지구조를 분석할 단어연상검사지를 개발하였다.

분수의 나눗셈 문제해결 검사지는 5학년과 6학년 수학교과서와 수학익힘책에 제시된 분수의 나눗셈 단원의 문장제 문제를 다섯 가지 분수의 나눗셈 의미와 식을 중심으로 살펴보고 분수의 나눗셈 문장제 제시 상황 및 교육과정 주제에 따라 분석하여 분수의 나눗셈 문제 해결 능력 검사지를 구성하기 위한 다섯 가지 기준을 도출하였다.

[기준 1] 등분제, 포함제, 카테시안 곱의 역, 곱셈의 역이라는 분수의 나눗셈 의미에 따른 문장제 수의 비가 16 : 16 : 5 : 2로 등분제와 포함제를 중심으로 다루되, 카테시안 곱의 역과 곱셈의 역에 해당하는 문제도 제시한다.

[기준 2] 교과서에 제시되지 않은 제수가 분수인 단위 비율 결정 상황은 분수의 나눗셈 의미를 종합적으로 평가하기 위해 선행연구에 제시된 문항을 수정하여 포함한다.

[기준 3] 길이, 들이, 무게, 넓이, 시간 등 단위가 사용되는 상황에 따른 문장제 수의 비는 12 : 11 : 9 : 6 : 1로 길이와 들이, 무게와 넓이, 시간의 순서로 비중을 두어 문제를 제시한다.

[기준 4] 자연수로만 이루어진 분수의 나눗셈, 진분수가 포함된 분수의 나눗셈, 가분수가 포함된 분수의 나눗셈, 대분수가 포함된 분수의 나눗셈 문장제 수의 비가 6 : 13 : 4 : 16로 진분수가 포함된 분수의 나눗셈과 대분수가 포함된 분수의 나눗셈을 중심으로 다루되, 자연수로만 이루어진 분수의 나눗셈과 가분수가 포함된 분수의 나눗셈 문제도 제시한다.

[기준 5] 분수의 곱셈과 나눗셈 혹은 분수의 덧셈과 나눗셈이 혼합된 문제를 포함한다.

다섯 가지 기준에 의거하여 수학교과서와 수학익힘책에 있는 문제 중에서 검사지 문항을 선정하였다. 선정된 문항은 수학교육전문가 1명 외 수학교육을 전공하고 있는 현장교사 5명의 검토를 거쳐 예비검사(2012.09.06)를 실시하였고 예비검사 결과를 다시 검토 후 수정과정을 거쳤다(검사지는 <부록1>, <부록2> 참고).

단어연상검사지는 5학년과 6학년 분수의 나눗셈 단원의 선수학습 내용을 시작으로 그 선수학습의 선수학습을 역추적하여 분수의 나눗셈 문제를 해결하기 위해 학생들이 학습한 내용, 분수의 나눗셈이 포함된 수와 연산 영역의 용어와 기호, Ma(1999)의 연구에 제시된 분수의 나눗셈의 의미를 이해하기 위한 지식 꾸러미 등 세 가지 문서 자료와 6학년 1개 학급 학생들에게 분수의 나눗셈 문제를 해결할 때 무엇을 알아야 하는지 묻는 경험 자료를 수집하여 1차 핵심 개념을 추출하였다. 1차로 추출된 핵심개념을 수학교육전문가 1명 외 대학원에서 수학교육을 전공하고 있는 현직교사 5명에게 타당도를 의뢰하였고 그 결과에 따라 검사지를 제작하였다. 예비검사를 실시(2012. 09. 26)하여 [표 4]와 같이 최종 핵심개념으로 검사지(<부록3>)를 구성하였다.

[표 4] 최종 확정된 핵심개념과 추출근거
[Table 4] Final definitive key concepts and the basis of the extraction

핵심 개념	추출근거
----------	------

분수의 나눗셈	분수의 나눗셈 개념을 어떠한 개념과 가장 잘 연결시키는 지 알아보기 위해 기본적으로 추출한 것임.
분수의 곱셈	분수의 나눗셈과 역연산 관계임을 인식하는 지 알아보기 위한. 역연산의 의미는 Ma(1999)의 연구에서도 중요하다고 제시된 것임.
가분수	가분수는 대부분으로 고칠 수 있음을 알고 있는지, 자연수는 분모가 1인 가분수라는 것을 알고 서로 연결시킬 수 있는지 알아보기 위한.
대분수	대분수가 포함된 나눗셈 문제해결 시 대분수를 가분수로 바꿀 수 있어야 하는데, 대분수를 가분수로 고칠 수 있다는 것을 알고 서로 연결시킬 수 있는지 알아보기 위한.
자연수	자연수의 역수는 단위분수임을 연결시킬 수 있는지, 자연수는 분모가 1인 가분수임을 알고 서로 연결시킬 수 있는지 알아보기 위한.
단위 분수	단위 분수의 역수는 자연수임을 연결시킬 수 있는지 알아보기 위한.
기약 분수	약분을 하여 기약분수가 된다는 것을 인식하고 있는지 알아보기 위한.
약분	분수의 곱셈을 할 때, 약분과정이 포함됨을 알고, 분수의 곱셈 과정이 포함된 분수의 나눗셈에서 약분하는 과정이 포함된다는 것을 알고 있는지 알아보기 위한.
공약수	공약수로 분모와 분자를 약분할 수 있다는 것을 알고 연결시킬 수 있는지 알아보기 위한.
공배수	분모가 다른 경우, 두 분모의 공배수를 곱하여 통분할 수 있다는 것을 알고 연결시킬 수 있는지 알아보기 위한.
분수의 뺄셈	나눗셈은 동수누감 뺄셈과 관련된 개념으로 분수의 뺄셈과 분수의 나눗셈을 관련지어서 제수가 단위가 될 수 있다고 생각할 수 있는지 알아보기 위한.
통분	분수의 나눗셈을 알고리즘으로 간단히 해결하는데 분모가 다른 분수의 나눗셈은 분모를 통분하면 해결할 수 있다는 것을 인식하고 있는지 알아보기 위한.

2. 검사 실시

본 연구는 강원도 지역 6학년 학생을 모집단으로 하는 조사연구이다. 양적연구의 목적은 표본으로부터 모집단을 일반화하기 위함인데, 본 연구가 강원도 지역 6학년 학생을 모집단으로 하고 있지만 수학 학업성취도는 지역 규모와 차이가 없기 때문에(송미영, 이영선, 박윤수, 2011) 일반화가 가능하다고 판단된다.

표본은 연구자가 생각하기에 적합한 학급을 섭외하고 그 교사가 적합하다고 생각하는 학급을 소개함으로써 표본을 확보한 눈덩이표집(snowball sampling)으로 추출하였다. 눈덩이 표집은 비확률적 표집방법으로 표본이 한 쪽으로 치우치거나 연구자의 주관에 개입될 수 있다는 단점이 있지만 이것을 극복하기 위해 강원도 지역을 영서와 영동으로 구분하여 동일한 비율로 표집하려고 하였으며 시 지역뿐만 아니라 군 지역도 포함시키려고 노력하였다. 또한 2011년 3월 강원도교육청 통계자료에 따르면 강원도 지역 6학년 학생은 18,171명으로 모집단의 크기가 어떤 한계점(약 5000)을 넘으면 모집단의 크기에 상관없이 표본의 크기는 400이 적절하기 때문에(전평국, 박성선, 2009) 강원도의 가장 큰 지역적 특성인 영서와 영동지역으로 나눠 200명이상씩 표본을 추출하였다. 최종 검사대상자는 [표 5]와 같다.

[표 5] 검사대상자 및 검사지 회수 현황
[Table 5] Status of sampling and collection

		영서		영동			
지역	학교	배포	회수	지역	학교	배포	회수
W시	P초	177부	175부	G시	P초	66부	63부
	K초	58부	56부		D시	S초	43부
P군	J초	25부	23부	S시		B초	54부
					Y초	22부	20부
				Y군	K초	5부	5부
					Y초	30부	26부
영서지역		260부	254부	영동지역		220부	205부
총 인원		총 인원		총 인원		총 인원	
검사대상자 총 인원				480부 배포/ 459부 회수			

본 연구는 검사지와 검사안내장을 함께 동봉하여 우

편으로 검사지를 배포하고 수거하였다. 검사지 배포 및 회수기간은 2012년 10월 15일 월요일부터 10월 23일 화요일까지다. 검사지 회수율을 높이기 위해 기념품 제공 및 검사지 발송 3일 후 첫 번째 문자를 보내 검사가 끝난 학교에 대해 택배 예약을 하여 자동 수거되도록 하였다. 최종 검사지 회수율은 95.6%이다.

수거된 459부의 검사지 중 분수의 나눗셈 문제해결 검사 결과에서 기초학력 미만으로 나온 학생의 검사지 50부를 우선 제외하였으며 단어연상검사지에서 성의 없거나 채점이 불가능하다고 판단되는 75부를 제외하여 최종적으로 334부를 결과 분석에 활용하였다([표 6]).

[표 6] 연구대상자 선정
[Table 6] Sample selection

우수	89명	우수, 보통, 기초는 국가수준 학업성취도 평가의 기준에 따라 우수는 성취도가 80%이상, 보통은 50%~80%미만, 기초는 20%~50%미만으로 하였다.
보통	156명	
기초	89명	
총 연구대상자	334명	

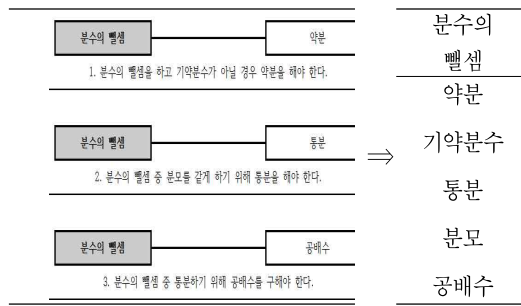
3. 자료 분석

분수의 계산 문제해결 능력 검사지는 학생들이 적은 답을 중심으로 채점하여 학생들의 수준을 나누고 단어연상검사지의 내용을 검토하다 미진한 부분에 대해서 확인하는 차원으로 분석에 활용하였다.

1) 단어연상검사지의 코딩

단어연상검사는 의미 있는 반응들을 대상으로 하기 때문에 우선 수집된 학생들의 단어연상검사지에서 바른 연결과 그렇지 않은 연결을 구분하였다. 바르지 않은 연결은 내용이 부정확하거나 어떤 관련이 있는지 쓰지 않고 관련이 있다고만 적은 것, 단어만 제시하고 그 관련성을 쓰지 않은 것 등을 기준으로 구분하였다. 결과분석에 활용할 단어연상검사지에서 학생들이 작성한 문장을 보고 관련된 단어들을 순서대로 추출하였다. 학생들이 제시한 단어뿐만 아니라 단어사이의 관련성을 논하는 문장에서 제시되는 단어들도 추출하였다. 단어들은 위에서부터 차례대로 추출하여 정리하였으며 위에 제시된 단어

가 아래 반복하여 제시된 경우는 위에 제시한 것으로 가름하였다([그림 3], [그림 4]).



[그림 3] 단어연상검사지의 코딩의 예
[Fig. 3] An coding example of word association test strip

학생 이름	받아본	약분	통분	기분수	대분수	자연수	면역수	약분	통분	공약수	공배수	가분수
학생 1	약분	약분	통분	대분수	자연수	면역수	약분	통분	공약수	공배수	가분수	면역수
학생 2	기분수	기분수	공배수	기분수	기분수	기분수	기분수	기분수	기분수	기분수	기분수	기분수
학생 3	받아본	약분	통분	기분수	대분수	자연수	면역수	약분	통분	공약수	공배수	가분수

[그림 4] 개인별 코딩한 결과 예
[Fig. 4] An example of individual coding result

2) 분석방법

코딩된 자료는 빈도수와 관련성 계수 두 가지 방법으로 분석하였다.

(1) 빈도수

빈도수 자료는 단어 사이의 자동성 획득(연구문제 1)을 알아보는 자료로 우선 우수, 보통, 기초 집단별로 자극 단어에 대한 반응 단어들의 빈도수를 정리하였다. 그 후, 우수, 보통, 기초 학생들의 자동성을 획득한 연결을 알아보고 비교하기 위해 각 집단별 학생수 대비 백분율로 빈도수 cut-off point를 정하여 인지구조를 그려보았다. 우수학생들의 단어연상검사 결과, 가장 높은 빈도수가 164로 그것을 포함시키기 위해서 우수학생수(89명)의 180%라는 최상위 cut-off point를 정하였고 보통과 기초 학생과의 차이를 나타내기 위해 20%씩 단계적으로 cut-off point를 정하여 단어 연결 상태를 정리하였다. 최하위 cut-off point는 보통학생들을 중심으로 핵심개념

이 모두 드러날 때까지로 하였다.

cut-off point에 해당하는 연결만 제시하는 것이 아니라 이전에 제시된 연결 관계에 추가적으로 제시하여 확장시켜가면서 전체적인 인지구조를 제시하려고 하였다. 이는 가장 자동성이 많이 획득된 개념 연결부터 차례대로 그려서 전체적인 인지구조를 좀 더 구조적으로 보여주기 위함이다. 인지구조는 Cmap Tools⁴⁾(<http://cmap.ihmc.us>에서 다운로드) 프로그램을 활용하여 그렸으며 각각의 cut-off point 단계에서 발생한 연결에 집중하기 위해 이전 단계에서 보인 연결을 희미하게 처리하였다.

(2) 관련성 계수(Relatedness Coefficient)

관련성 계수 자료는 단어 사이의 연결강도(연구문제 2)를 알아보는 자료로 우선 우수, 보통, 기초 집단별로 각 개인의 단어와 단어 사이의 총 66개의 연결에 대해 관련성 계수를 계산한 후, 각 집단별로 평균을 계산하였다. 그 후, 가장 높은 관련성 계수인 0.842를 포함시킬 수 있도록 0.800을 최상위 cut-off point로 정하였고 최하위 cut-off point는 연구문제 1에서와 달리 연구문제 2에서 새로운 연결이 생기는 지점을 최하위 cut-off point로 결정하였다. 왜냐하면 연구문제 1에서 그려진 인지구조에 제시된 연결 외에 연구문제 2에서 새롭게 추가되는 연결은 자동성이 획득되지 못한 의미 없는 연결로 판단하였고 연구문제 1에서 그려진 마지막 인지구조 속에 개념 간 관련성 계수를 추가하여 그 인지구조를 정교화 할 것이기 때문이다.

여기서도 인지구조는 Cmap Tools 프로그램을 활용하여 그렸으며 각각의 cut-off point 단계에서 발생한 연결강도(관련성 계수)에 집중하기 위해 이전 단계의 자료는 희미하게 처리하였다.

IV. 결과 분석 및 논의

1. 분수의 나눗셈과 관련된 개념 사이의 자동성 획득(빈도수)은 어떠한가?

1) 우수학생들의 분수의 나눗셈과 관련된 개념 사이의 자동성 획득

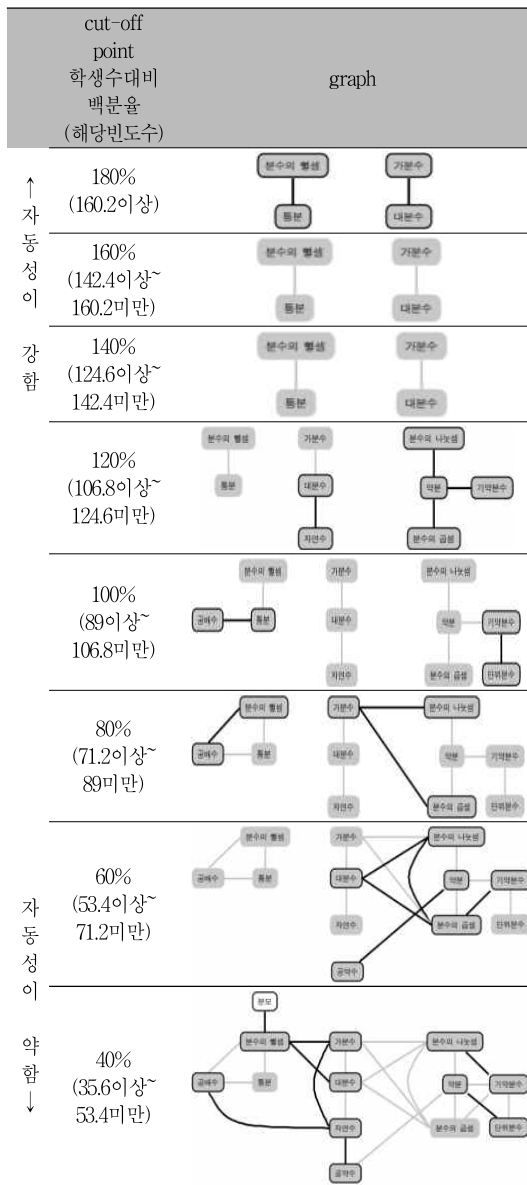
[표 7]은 우수학생들의 개념 연결 상태를 cut-off point에 따라 정리한 것이다. 분수의 뺄셈과 통분의 연결 빈도수가 164번, 가분수와 대분수의 연결 빈도수가 163번으로 가장 많이 나타났다. 총 24개의 연결이 제시되었다. [그림 5]는 [표 7]에 따라 우수학생들의 인지구조를 그려본 것이다.

[표 7] 우수학생들의 개념 연결 상태 (빈도수)
[Table 7] The status of connection of excellent students' concepts (frequency)

cut-off point 학생수대비 백분율	개념 연결 상태(빈도수)
	우수학생
180%	분수의 뺄셈-통분(164) 가분수-대분수(163)
160%	
140%	
120%	분수의 곱셈-약분(118) 약분-기약분수(118) 분수의 나눗셈-약분(108) 대분수-자연수(107)
100%	통분-공배수(98) 단위분수-기약분수(94)
80%	분수의 뺄셈-공배수(80) 분수의 곱셈-가분수(77) 분수의 나눗셈-가분수(75)
60%	분수의 나눗셈-분수의 곱셈(68) 분수의 곱셈-대분수(63) 분수의 곱셈-기약분수(58) 분수의 나눗셈-대분수(57) 약분-공약수(57)
40%	분수의 나눗셈-기약분수(52) 분수의 뺄셈-분모(50) 단위분수-약분(49) 가분수-자연수(48) 자연수-공약수(45) 분수의 뺄셈-대분수(42) 분수의 뺄셈-가분수(41) 자연수-공배수(41)

우수학생들은 학생수 대비 60%단계에서 핵심개념이 모두 제시되었고, 분수의 뺄셈과 통분, 가분수와 대분수가 최상위 단계에 기록된 후 두 단계에서 새로운 연결이 보이지 않을 정도로 다른 단어 사이의 자동성보다 월등히 자동성이 높은 것을 확인할 수 있었다.

⁴⁾ Cmap Tools는 Institute for Human and Machine에서 개발한 것이다(Novak & Cañas, 2006).



[그림 5] 빈도수로 살펴본 우수학생들의 인지구조
[Fig. 5] The excellent students' cognitive structure based on frequency

개념 주위의 집단적인 정보인 청크(chunk)를 확인할 수 있었다. 학생수 대비 120% 단계에서 보면, 약분을 중

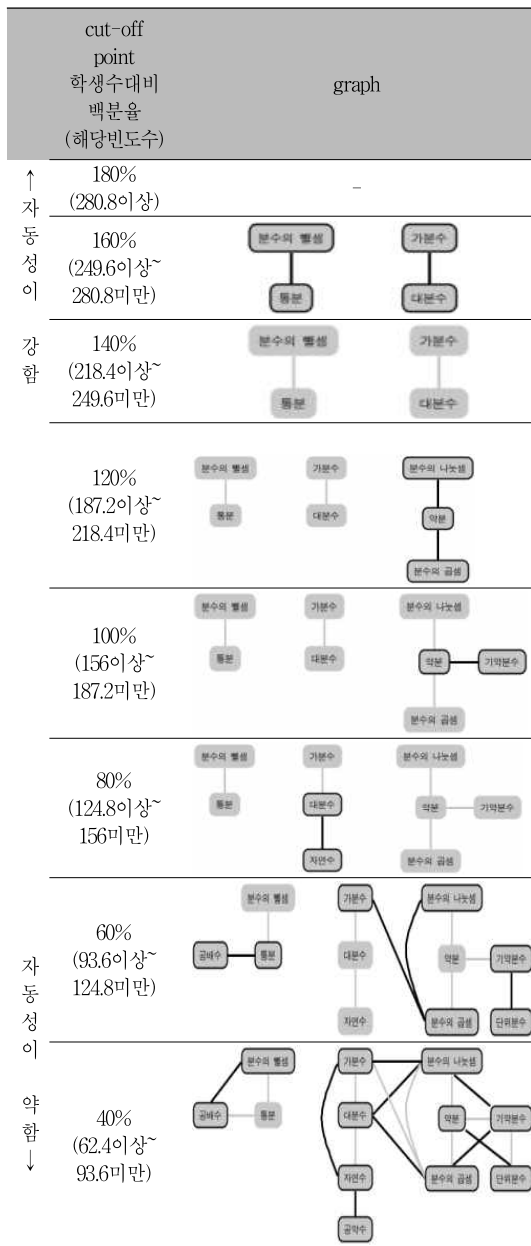
심으로 분수의 나눗셈, 분수의 곱셈, 기약분수가 청크화되어 있었고 대분수를 중심으로 가분수와 자연수가 청크화되어 있었다. 100% 단계에서는 통분을 중심으로 분수의 뺄셈과 공배수가 청크화되어 재빠르게 정보를 이끌 수 있을 있음을 알 수 있었다.

2) 보통학생들의 분수의 나눗셈과 관련된 개념 사이의 자동성 획득

[표 8]은 보통학생들의 개념 연결 상태를 cut-off point에 따라 정리한 것이다. 가분수와 대분수의 연결 빈도수가 263번, 분수의 뺄셈과 통분의 연결 빈도수가 251번으로 가장 많이 나타났다. 총 19개의 연결이 제시되었다. [그림 6]은 [표 8]에 따라 보통학생들의 인지구조를 그려본 것이다.

[표 8] 보통학생들의 개념 연결 상태 (빈도수)
[Table 8] The middle level student concept connections (frequency)

cut-off point 학생수대비 백분율	개념 연결 상태(빈도수)	
	보통학생	
180%		
160%	가분수-대분수(263) 분수의 뺄셈-통분(251)	
140%		
120%	분수의 곱셈-약분(203) 분수의 나눗셈-약분(197)	
100%	약분-기약분수(165)	
80%	대분수-자연수(155)	
60%	단위분수-기약분수(108) 분수의 곱셈-가분수(105)	
	분수의 나눗셈-분수의 곱셈(102) 통분-공배수(97)	
40%	분수의 곱셈-대분수(91)	
	분수의 나눗셈-가분수(89)	
	분수의 뺄셈-공배수(74)	
	자연수-공약수(74)	
	분수의 나눗셈-대분수(73)	
	분수의 곱셈-기약분수(70)	
	분수의 나눗셈-기약분수(68)	
	가분수-자연수(65)	
	단위분수-약분(64)	



[그림 6] 빈도수로 살펴본 보통학생들의 인지구조
[Fig. 6] The middle level students' cognitive structure based on frequency

보통학생들은 학생수 대비 40%단계에서 핵심개념이

모두 제시되었고, 분수의 뺄셈과 통분, 가분수와 대분수가 우수학생들에 비하여 한 단계 아래에서 연결됨으로써 우수학생들에 비하여 덜 자동화되어 있다고 볼 수 있다. 그러나 두 번째 단계에서 제시된 이후 한 단계를 건너서 새로운 연결이 보일 정도로 다른 단어 사이의 자동성보다 높다는 것을 확인할 수 있었다.

보통학생들에게서도 청크(chunk)를 확인할 수 있었다. 학생수 대비 120%단계에서 보면, 약분을 중심으로 분수의 나눗셈과 분수의 곱셈이 청크화되어 있었고 80%단계에서 대분수를 중심으로 가분수와 자연수가 청크화되어 있었으며 60%단계에서 통분을 중심으로 분수의 뺄셈과 공배수가 청크화되어 정보를 쉽게 이끌어낼 수 있음을 확인할 수 있었다. 그러나 약분을 중심으로 한 청크에서는 우수학생들에 비하여 기약분수가 빠져 있고 우수학생들은 100%단계에서 120%단계에서 청크를 확인할 수 있었는데 비해 보통학생들은 60%단계에서 120%단계까지 네 단계에 걸쳐 청크가 나타나는 것을 통해 우수학생들에 비하여 자동성이 덜 획득되었다고 판단할 수 있다.

또한 160%단계에서 분수의 뺄셈과 통분이 연결된 후, 네 단계 뒤에 통분과 공배수가 연결되고 120%단계에서 분수의 나눗셈 및 분수의 곱셈과 약분이 연결된 후, 공약수와 연결되지 않는 것을 통해 공배수와 공약수 개념 이해가 잘 이루어지지 않았음을 확인할 수 있었다.

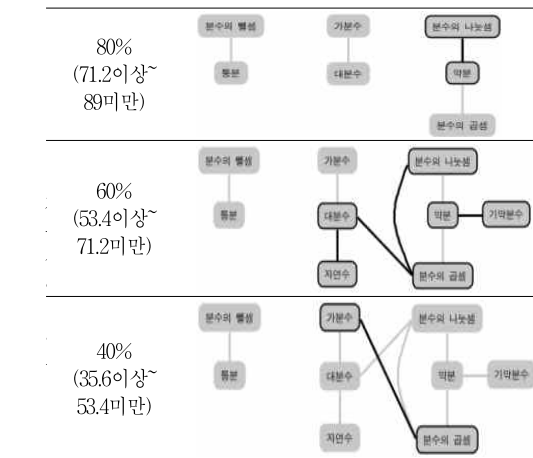
3) 기초학생들의 분수의 나눗셈과 관련된 개념 사이의 자동성 획득

[표 9]는 기초학생들의 개념 연결 상태를 cut-off point에 따라 정리한 것이다. 가분수와 대분수의 연결 빈도수가 124번으로 가장 많이 나타났으며 총 9개의 연결이 제시되었다. [그림 7]은 [표 9]에 따라 기초학생들의 인지구조를 그려본 것이다.

[표 9] 기초학생들의 개념 연결 상태 (빈도수)
 [Table 9] The lower level students' connection of concept (frequency)

cut-off point 학생수대비 백분율	개념 연결 상태(빈도수) 기초학생
180%	
160%	
140%	
120%	가분수-대분수(124)
100%	분수의 뺄셈-통분(106) 분수의 곱셈-약분(93)
80%	분수의 나눗셈-약분(88) 대분수-자연수(70) 약분-기약분수(60)
60%	분수의 나눗셈-분수의 곱셈(48) 분수의 곱셈-대분수(40)
40%	분수의 곱셈-가분수(37)

cut-off point 학생수대비 백분율 (해당빈도수)	graph
180% (160.2이상)	-
160% (142.4이상~ 160.2미만)	-
140% (124.6이상~ 142.4미만)	-
120% (106.8이상~ 124.6미만)	
100% (89이상~ 106.8미만)	



[그림 7] 빈도수로 살펴본 기초학생들의 인지구조
 [Fig. 7] The lower level students' cognitive structure based on frequency

기초학생들은 학생수 대비 40% 단계에서도 공배수, 공약수, 단위분수 등의 핵심개념이 모두 제시되지 못하였다. 이것은 통분을 하고 약분을 해야 한다는 것은 알지만 그 수단을 알지 못하여 문제해결에 어려움을 겪을 수 있다고 판단해볼 수 있다. 이것은 연구문제 1에서 약분과 통분 개념에서 공약수와 공배수 개념이 우수학생들에 비하여 낮은 것과 같은 맥락으로 볼 수 있다. 또한 가분수와 대분수가 보통학생들에 비하여 두 단계 아래에서 연결됨으로써 우수와 보통학생들에 비하여 자동성이 높지 않다는 것을 확인할 수 있었다.

기초학생에서도 청크(chunk)를 확인할 수 있었다. 학생수 대비 80%단계에서 약분을 중심으로 분수의 곱셈과 분수의 나눗셈이 청크화되었고 60% 단계에서 대분수를 중심으로 가분수와 자연수가 청크화되어 있음을 알 수 있었다. 하지만 너무 낮은 단계에서 이루어져서 이것이 문제해결과정에서 효과적으로 정보를 이끌어 낼 수 있는지는 장담할 수 없다.

2. 분수의 나눗셈과 관련된 개념들의 연결강도(관련성 계수)는 어떠한가?

1) 우수학생들의 인지구조 속 개념들의 연결강도

[표 10]은 우수학생들의 개념 연결 상태를 cut-off

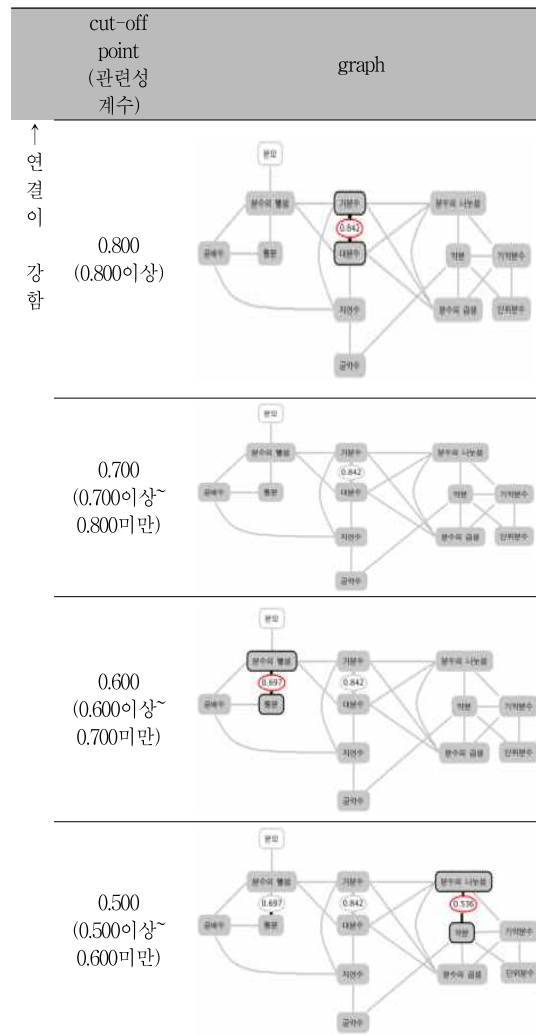
point에 따라 정리한 것이다. 가분수와 대분수의 연결강도가 0.842로 가장 높게 나타났으며 분수의 뺄셈과 통분이 0.697로 다음에 제시되었다.

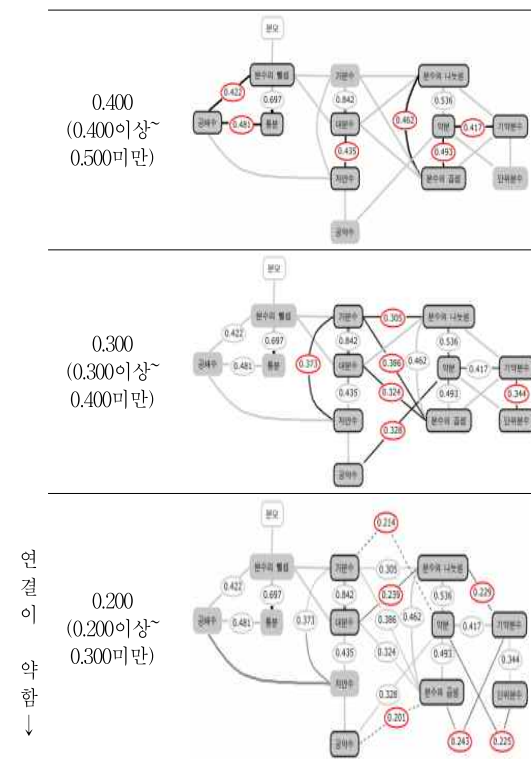
[그림 8]은 연구문제1에서 제시된 우수학생들의 인지구조([그림 5])에 [표 10]의 관련성 계수를 추가하여 인지구조를 정교화 하였다.

[표 10] 우수학생들의 개념 연결 상태 (관련성 계수)
 [Table 10] The status of excellent level students' connection of concepts (Relatedness Coefficient)

cut-off point (관련성 계수)	개념 연결 상태(관련성 계수) 우수학생
0.800 (0.800이상)	가분수-대분수(0.842)
0.700 (0.700이상~ 0.800미만)	
0.600 (0.600이상~ 0.700미만)	분수의 뺄셈-통분(0.697)
0.500 (0.500이상~ 0.600미만)	분수의 나눗셈-약분(0.536)
0.400 (0.400이상~ 0.500미만)	분수의 나눗셈-분수의 곱셈(0.462) 분수의 곱셈-약분(0.493) 분수의 뺄셈-공배수(0.422) 대분수-자연수(0.435) 약분-기약분수(0.417) 통분-공배수(0.481)
0.300 (0.300이상~ 0.400미만)	분수의 나눗셈-가분수(0.305) 분수의 곱셈-가분수(0.386) 분수의 곱셈-대분수(0.324) 가분수-자연수(0.373) 단위분수-기약분수(0.344) 약분-공약수(0.328)
0.200 (0.200이상~ 0.300미만)	분수의 나눗셈-대분수(0.239) 분수의 나눗셈-기약분수(0.229) 분수의 곱셈-공약수(0.201) 분수의 곱셈-기약분수(0.243) 가분수-약분(0.214) 단위분수-약분(0.225)

연구문제 1에서 분수의 뺄셈과 통분, 가분수와 대분수 연결의 빈도수가 164, 163으로 비슷하게 높은 수치가 나왔다. 하지만 관련성 계수를 계산한 결과, 가분수와 대분수의 관련성 계수(0.842)가 분수의 뺄셈과 통분의 관련성 계수(0.697)보다 훨씬 더 강한 것을 확인할 수 있었





[그림 8] 관련성 계수로 살펴본 우수학생들의 인지구조
[Fig. 8] The excellent students' cognitive structure based on coefficient relationship

다. 또한 분수의 나눗셈과 분수의 곱셈은 빈도수가 68로 연구문제 1의 인지구조에서 60%단계에서 제시된 것인데, 관련성 계수에서는 빈도수가 118이었던 분수의 곱셈과 약분, 약분과 기약분수와 비슷한 수치인 0.462가 나왔다. 이것은 빈도수가 많이 나오면 관련성 계수가 높게 나올 수는 있지만 반드시 일치하지는 않으며, 빈도수가 높아도 관련성 계수가 낮게 나오는 경우나 빈도수가 낮아도 관련성 계수가 높게 나오는 경우가 발생한다는 것을 알려준다.

또한 청크 내의 관계보다 청크 사이의 관계가 약한 것으로 나왔다. 예를 들어, 즉 대분수, 약분, 통분을 중심으로 한 청크 내에서의 관련성 계수는 0.400대 이상에서 모두 제시되는 반면 청크와 청크 사이의 관련성 계수는 그보다 낮은 0.300대에서 제시되었다.

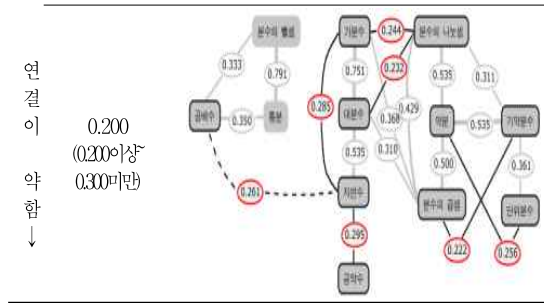
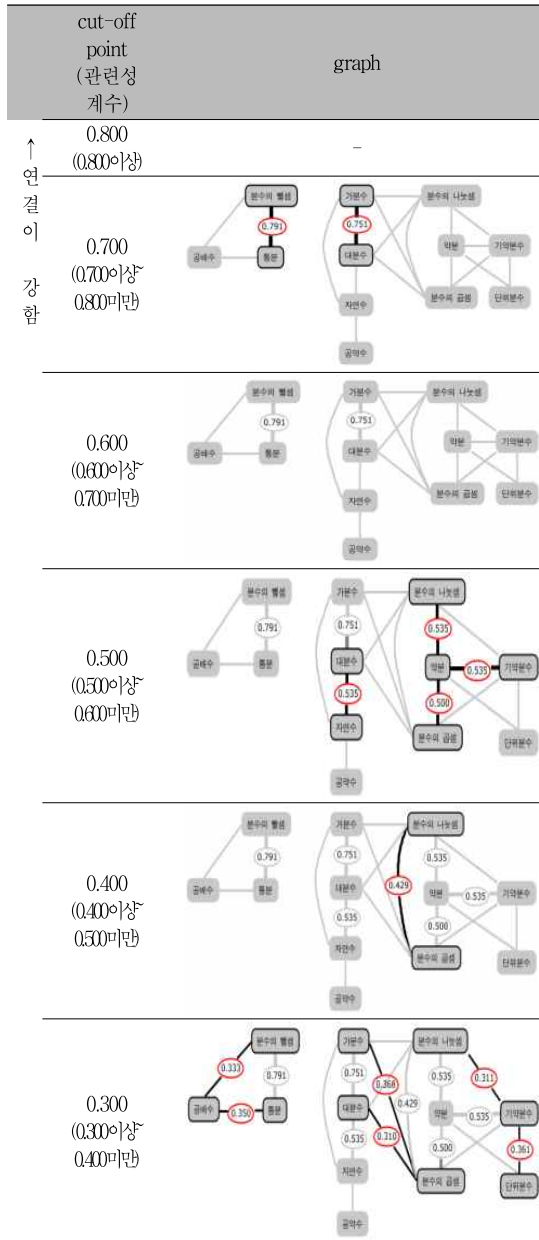
2) 보통학생들의 인지구조 속 개념들의 연결강도

[표 11]은 보통학생들의 개념 연결 상태를 cut-off point에 따라 정리한 것이다. 분수의 뺄셈과 통분의 연결 강도가 0.791로 가장 강하게 나타났다. 하지만 우수학생들처럼 0.800이상의 연결강도를 갖고 있는 개념연결은 보이지 않았다. [그림 9]는 연구문제1에서 제시된 보통학생들의 인지구조([그림 6])에 [표 11]의 관련성 계수를 추가하여 인지구조를 정교화 하였다.

[표 11] 보통학생들의 개념 연결 상태 (관련성 계수)
[Table 11] The middle level students' connection of concepts (Coefficient Relationship)

cut-off point (관련성 계수)	개념 연결 상태(관련성 계수) 보통학생
0.800 (0.800이상)	
0.700 (0.700이상~ 0.800미만)	분수의 뺄셈-통분(0.791) 가분수-대분수(0.751)
0.600 (0.600이상~ 0.700미만)	
0.500 (0.500이상~ 0.600미만)	분수의 나눗셈-약분(0.535) 분수의 곱셈-약분(0.500) 대분수-자연수(0.535) 약분-기약분수(0.535)
0.400 (0.400이상~ 0.500미만)	분수의 나눗셈-분수의 곱셈(0.429)
0.300 (0.300이상~ 0.400미만)	분수의 나눗셈-기약분수(0.311) 분수의 곱셈-가분수(0.368) 분수의 곱셈-대분수(0.310) 분수의 뺄셈-공배수(0.333) 단위분수-기약분수(0.361) 통분-공배수(0.350) 분수의 나눗셈-가분수(0.244) 분수의 나눗셈-대분수(0.232) 분수의 곱셈-기약분수(0.222)
0.200 (0.200이상~ 0.300미만)	가분수-자연수(0.285) 자연수-공배수(0.295) 자연수-공배수(0.261) 단위분수-약분(0.256)

통분을 중심으로 한 청크를 살펴보면, 우수학생들은 분수의 뺄셈과 통분의 관련성 계수가 0.697이고 공배수와 통분의 관련성 계수가 0.481이었다. 반면 보통학생들



[그림 9] 관련성 계수로 살펴본 보통학생들의 인지구조
[Fig. 9] The middle level students' cognitive structure based on coefficient relationship

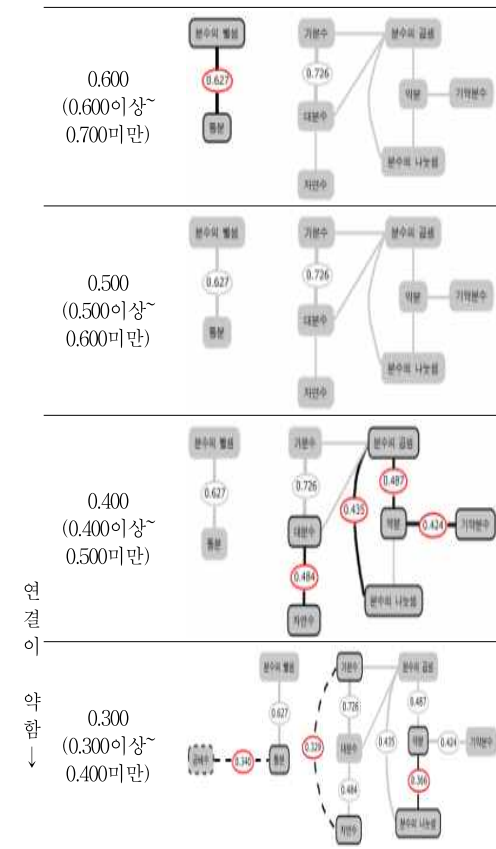
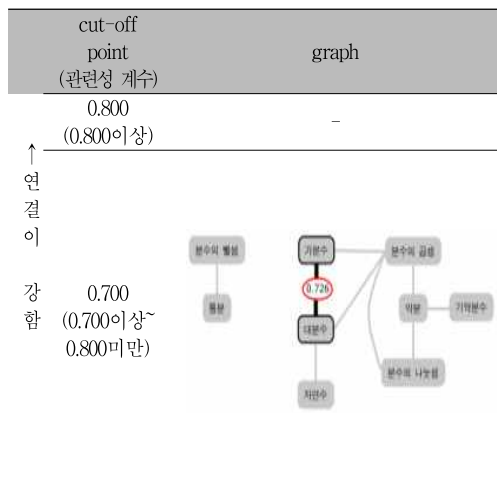
은 분수의 뺄셈과 통분의 관련성 계수가 0.791이고 공배수와 통분의 관련성 계수가 0.350으로 우수학생들은 그 차이가 0.216인데 비해 보통학생들은 그 차이가 0.441로 차이가 많이 났다. 이는 보통학생들이 분수의 뺄셈과 통분의 관련성만큼 공배수와 통분의 관련성이 낮아 공배수로 통분하여 분수의 뺄셈을 정확하게 해결할 수 있는 확률이 우수학생들에 비하여 더 낮을 수 있음을 예상할 수 있게 한다.

3) 기초학생들의 인지구조 속 개념들의 연결강도

[표 12]는 기초학생들의 개념 연결 상태를 cut-off point에 따라 정리한 것이다. 가분수와 대분수의 연결강도가 0.726으로 가장 강하게 나타났다. 하지만 우수학생들처럼 0.800이상의 연결강도를 갖고 있는 개념연결은 보이지 않았으며 제시된 개념 연결이 10개가 되지 않았다. [그림 10]은 연구문제1에서 제시된 기초학생들의 인지구조([그림 7])에 [표 12]의 관련성 계수를 추가하여 인지구조를 정교화 하였다.

[표 12] 기초학생들의 개념 연결 상태 (관련성 계수)
 [Table 12] The lower level students' connection of concepts (Coefficient Relationship)

cut-off point (관련성 계수)	개념 연결 상태(관련성 계수) 기초학생
0.800 (0.800이상)	
0.700 (0.700이상~ 0.800미만)	가분수-대분수(0.726)
0.600 (0.600이상~ 0.700미만)	분수의 뺄셈-통분(0.627)
0.500 (0.500이상~ 0.600미만)	
0.400 (0.400이상~ 0.500미만)	분수의 나눗셈-분수의 곱셈(0.435) 분수의 곱셈-약분(0.487) 대분수-자연수(0.484) 약분-기약분수(0.424)
0.300 (0.300이상~ 0.400미만)	분수의 나눗셈-약분(0.366) 가분수-자연수(0.329) 통분-공배수(0.340)
0.200 (0.200이상~ 0.300미만)	



[그림 10] 관련성 계수로 살펴본 기초학생들의 인지구조

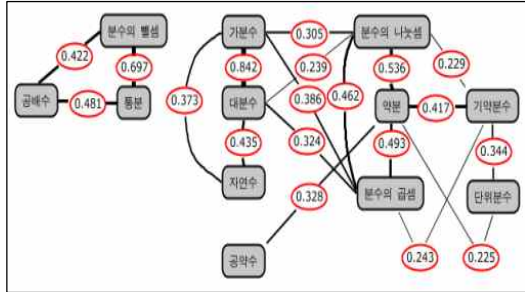
[Fig. 10] The lower level students' cognitive structure based on coefficient relationship

기초학생들의 단어 사이의 연상 빈도수는 우수나 보통학생들보다 적었지만 관련성 계수 측면에서는 큰 차이가 나지 않으면서 연결이 되었다. 이는 빈도수가 적었지만 그 연결의 내용이 질적으로 다른 학생들과 차이가 나지 않음을 보여주는 것이다.

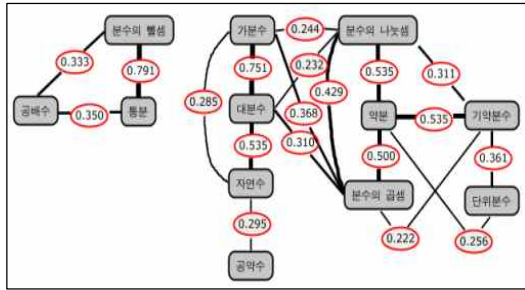
우수나 보통학생들은 관련성 계수가 0.200단계까지 그려졌는데, 기초학생들은 0.300단계에서 빈도수로 그린 인지구조에는 없던 연결들이 발생하였다. 이는 기초학생들이 단어 사이의 연결이 질적으로 괜찮아도 그것이 자동화가 되지 않아 빈도수면에서 적게 나타났기 때문이다.

3. 논의

지금까지 추적한 인지구조를 살펴보면 빈도수에서 제시되지 않았는데 관련성 계수가 나타난 것이나 빈도수에 제시되었지만 관련성 계수가 제시되지 않은 연결 관계가 있는데 이를 제거한 뒤 우수, 보통, 기초학생들의 최종 인지구조를 완성하였다([그림 11], [그림 12], [그림 13]).

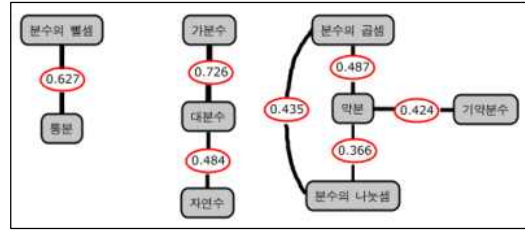


[그림 11] 우수학생들의 최종 인지구조
[Fig. 11] The final cognitive structure of excellent students



[그림 12] 보통학생들의 최종 인지구조
[Fig. 12] The final cognitive structure of Middle level students

우수학생들의 인지구조에는 20개, 보통학생들의 인지구조에는 19개, 기초학생들의 인지구조에는 7개의 연결이 제시되었다. 이러한 결과는 훌륭한 문제해결자의 인지구조는 그렇지 못한 사람들보다 더 많은 연결을 포함하고 있으며 복잡하다는 선행연구(Bahar et al., 1999)와 같은 맥락으로 볼 수 있다.



[그림 13] 기초학생들의 최종 인지구조
[Fig. 13] The final cognitive structure of lower level students

특히 우수학생과 보통학생과의 연결 수 차이는 1개인데 비하여 기초학생들은 우수학생들에 비해서는 13개, 보통학생들에 비해서는 12개의 연결이 없기 때문에 우수학생들과 보통학생들의 문제해결능력 차이보다 우수 및 보통학생들과 기초학생들의 문제해결능력 차이가 훨씬 많이 나타날 것으로 판단된다. 이것은 권점례의 연구(2012)를 바탕으로 두 가지 면에서 생각해볼 수 있다. 첫째, 초등학교의 경우 계산 관련 학습량이 매우 많으며 위계적으로 구성되어 있어 특정한 시기에 학습 결손이 생기면 이후 학습에 큰 영향을 주는데, 초등학교 마지막 학년인 6학년 학생이기 때문에 그동안의 잘 이해하지 못하고 넘어갔던 수학 개념이 누적됨에 따라 차이가 크게 벌어지게 되었다고 볼 수 있다. 둘째, 위계적으로 얽혀있는 계산을 반복 훈련시키는 과정에서 학생들은 더욱 수학에 흥미를 잃게 되고 그 결과 학습 부진이 더욱 누적되었다고 볼 수 있다.

인지구조를 좀 더 자세히 살펴보면, 보통학생들의 인지구조는 우수학생들의 인지구조와 큰 차이는 없지만 우수학생들의 인지구조에서 공약수와 약분이 0.328의 관련성을 갖고 연결되어 있었지만 보통학생들의 인지구조에서는 그 관련성이 매우 작아 연결되지 못하고 대신 공약수와 자연수가 연결되어 있음을 발견할 수 있다. 보통학생들이 공약수가 약분을 위해 필요한 것이기 보다는 자연수라는 단순한 사실과 연결되어짐에 따라서 보통학생들의 경우 약분에 대한 어려움 및 약분의 의미를 모르고 기계적으로 하는 경우가 발생할 것으로 판단된다.

또한 본 연구에서 기대했던 연결 중 자연수와 단위분수, 분수의 나눗셈과 분수의 뺄셈, 분수의 나눗셈과 통분, 분수의 나눗셈과 공배수의 연결은 모든 집단에서 관

찰할 수 없었으며 보통학생 집단에서는 공약수와 약분의 연결을 관찰할 수 없었다. 이것은 분수의 나눗셈, 분수의 뺄셈, 자연수, 단위분수, 통분, 공배수 등의 개념들을 서로 관련지어 볼 수 있는 기회가 적었기 때문으로 판단된다. 즉 각각의 개념을 단절된 개념으로 학습하는 경우가 많아서 개념의 의미를 풍부하게 이해할 수 있는 기회를 갖지 못했기 때문으로 판단할 수 있는데, 교과서에서 관련 개념을 연관 지어 학습할 수 있도록 구성할 필요가 있다.

또한 단절된 학습의 시기에서도 그 원인을 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 분수의 뺄셈과 분수의 나눗셈의 경우, 분수의 뺄셈은 4학년 2학기과 5학년 1학기에 제시되는데 비하여 분수의 나눗셈은 5학년 2학기과 6학년 1학기에 제시됨에 따라 분수의 뺄셈과 분수의 나눗셈 학습이 단절되어 이루어진다. 분수의 뺄셈을 학습하고 1학기가 지난 후, 분수의 나눗셈을 학습함으로써 학생들은 두 연산을 서로 다른 연산으로서 받아들이기만 관련지어 생각하지 못한다. 이런 면에서 교과서는 단계 간의 내용 체계나 연결 측면에서 중복이나 단절을 피하고 연속적이고 점진적인 전개가 되도록 내용을 조직하는 것이 중요하다는 선행연구(방정숙, 이지영, 2009b)에 주의를 기울일 필요가 있다.

V. 결론 및 제언

연구결과에서 제시한 학생들의 인지구조를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 기초학생에게 공약수, 공배수, 단위분수 개념을 선형지식과 연결하여 지도할 필요가 있다. 보통과 우수 학생들은 어느 일정 단계에서 핵심개념이 모두 나타났으며 특히 우수학생의 경우엔 핵심개념 외의 개념도 제시가 된 반면 기초학생들의 인지구조에서 핵심개념이 모두 나타나지 않았다. 특히, 공약수, 공배수, 단위분수에 대한 연결관계가 전혀 드러나지 않은 것은 기초학생들이 공약수, 공배수, 단위분수라는 단어 자체는 들어본 적이 있더라도 그 개념에 대한 이해를 전혀 하고 있지 못하다는 것이다. 공약수, 공배수, 단위분수가 분수의 나눗셈 문제해결과 관련된 가장 핵심적인 개념이 아닐지라도 그 개념을 통해 다른 개념을 이해할 수 있는 통로가 되기

때문에 공약수, 공배수, 단위분수에 대한 이해가 부족하다는 것을 간과하면 안 된다. 우선 기초학생들의 인지구조 내에 어떤 개념들이 어떻게 연결되어 있는지 확인한 후, 공약수, 공배수, 단위분수 개념과 연결지어 이해할 수 있는 개념을 찾아서 그 개념과 연결하여 함께 가르치고 연습함으로써 자동성이 획득될 수 있도록 해야 한다.

둘째, 개념간의 연결뿐만 아니라 연결강도를 살펴서 지도할 필요가 있다. 연결 빈도수가 높으면 연결강도가 높을 가능성이 높지만 연결 빈도수가 똑같이 높아도 관련성 계수에서 차이가 발생하였다. 이것은 두 개념 각각에 대해 공통적으로 연상된 개념과 그 연상 순서의 차이가 많다는 것이다. 두 개념 간의 공통요소가 적다면 각 개념이 서로 상호 연상할 가능성이 적기 때문에 문제해결과정에 영향을 줄 수밖에 없다. 자동화해야 할 중요한 개념간의 연결이 있다면 두 개념간의 연상 개념이 비슷하게 연상되는지 살펴서 연결강도를 높인다면 문제해결과정에서 필요한 개념들이 적절하게 활용될 수 있다.

셋째, 기초학생들의 인지구조 상에서 연결강도가 높은 연결에 대한 자동화를 유도할 필요가 있다. 기초학생들의 개념 사이의 연상 빈도수는 우수나 보통학생들보다 적었지만 개념사이 연결강도는 우수 및 보통학생들과 차이가 나지 않았다. 또한 우수와 보통학생들은 관련성 계수 0.300이상이 나온 연결이 모두 빈도수로 그린 인지구조에 제시되었지만 기초학생들의 경우엔 관련성 계수가 0.300이상이 나온 연결이 연결 빈도수 면에서는 부족하여 인지구조 상에 제시되지 못했다. 연결강도는 우수 및 보통학생들과 비슷하게 나타난 연결이 연결 빈도수가 부족하여 인지구조 상에서 제시되지 못했다는 것은 연결강도가 높은 개념 간의 연결도 자동성이 획득되지 못했다는 것이다. 자동성이 획득되지 못하면 문제해결과정에서 활성화되기가 어렵다. 문제해결과정에서 의미 있는 개념간의 연결이 활성화되도록 하기 위해서 연습이 필수적이다.

넷째, 분수의 나눗셈과 분수의 뺄셈을 유기적으로 연결하여 지도할 필요가 있다. 청크와 청크 사이의 연결이 있었던 우수와 보통학생들의 관련성계수를 살펴보면, 청크 내에서의 단어들의 연결강도보다 청크와 청크 사이의 연결강도가 낮았다. 더욱이 분수의 나눗셈이 포함된 청크와 분수의 뺄셈이 포함된 청크는 전혀 연결이 되지 않

았다. 이것은 분수의 나눗셈 문제의 해법과 분수의 뺄셈 해법은 완전히 다르지 않음에도 불구하고 학생들의 인지구조에서는 완전히 다른 것으로 인식되어 한 가지 방법으로만 해결하는 것이 익숙해져 있다는 것을 의미한다. 분수의 뺄셈과 분수의 나눗셈 학습시기가 서로 다르고 알고리즘 위주로 학습지도가 이루어지다보니 학습이 서로 단절되어 이루어지는 경향이 있다. 학습시기의 문제는 교사들이 해결할 수 없는 부분이지만 학습내용을 서로 유기적으로 연결하여 지도하는 것은 교사의 역량으로 가능하다. 학교현장에서는 분수의 나눗셈 지도 시, 이전에 학습했던 분수의 뺄셈과 유기적으로 연결하여 문제를 해결할 수 있는 기회를 주고 두 개념이 관련지어 문제해결과정에서 유연하게 활용될 수 있도록 지도할 필요가 있다. 더불어 교과서 개발 시 분수의 나눗셈을 분수의 뺄셈과 관련지어 학습이 이루어질 수 있도록 교과서를 구성할 필요가 있다.

다섯째, 청크 내에서 개념 간의 연결강도가 균형을 이루도록 지도할 필요가 있다. 청크와 청크 사이의 연결강도보다 청크 내의 연결강도가 높았다. 하지만 청크 내의 연결강도를 살펴보면 우수학생들과 그렇지 못한 학생 간의 차이가 있었다. 우수학생의 경우 분수의 뺄셈과 통분, 통분과 공배수의 관련성 계수 차이가 0.216인데 비하여 보통학생의 경우에는 0.441의 차이가 벌어져 있었다. 똑같이 청크가 형성되어 있었고 최종 인지구조에 제시된 청크지만 그 청크 내의 연결강도 면에서 차이가 있었다. 우수학생들의 청크 내에서 연결강도의 차이가 적다는 것은 청크 내의 개념간의 연결이 서로 강하게 유기적으로 연결되어 있다는 것이다. 이에 비하여 보통학생들의 경우에는 청크 내의 개념간의 연결이 유기적으로 연결되어 있더라도 연결강도가 균형을 이루고 있지 못하므로 수레바퀴의 크기가 서로 다르면 굴러가는데 문제가 없어도 덜컹거리며 불안전하게 굴러가듯이 문제해결과정의 다양한 순간에서 연결이 유기적으로 연결되어 나타날 때도 있고 그렇지 못할 때도 발생할 것이다.

본 연구는 학생들의 분수의 나눗셈과 관련된 개념을 중심으로 인지구조를 살펴보았다. 개념간의 올바른 연결만을 분석대상으로 하였는데 잘못된 연결의 간섭현상에 대해서는 다루지 못하였다. 후속연구에서 정확한 연결과 정확하지 않은 연결을 함께 제시하여 좀 더 정교화 된

인지구조를 분석하는 연구가 이루어지길 기대한다. 더불어 학생들의 분수의 나눗셈 이해를 높이는 데 도움이 되길 기대하며, 특히 기초학생들의 분수의 나눗셈 지도시 기초학생들의 인지구조를 참고하여 필요한 개념을 가르치고 끊어진 연결을 이어주면 분수의 나눗셈에 대한 이해를 유도할 수 있다고 생각한다.

참 고 문 헌

- 권점례 (2012). 우수학력과 기초학력 미달 학생들의 수학과 학업성취도 특성 분석, 수학교육 논문집 26(1), 29-50.
- Kwon, J. R. (2012). Comparison on proficient level and below basic level students' mathematical achievement in the National Achievement Evaluation and Assessment, *Communications of mathematical education* 28(1), 29-50.
- 김경미, 강완 (2008). 초등학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류 분석, 한국초등수학교육학회지 11(1), 1-19.
- Kim, K. M. & Kang, W. (2008). An Analysis on the Repeated Error Patterns in Division of Fraction by Elementary Students. *Education of primary school mathematics* 11(1), 1-19.
- 김경미, 황우형 (2011). 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생의 이해와 문장제 해결의 관련성 분석, 수학교육 50(3), 337-354.
- Kim, K. M. & Whang, W. H. (2011). An Analysis of the Relationship between Students' Understanding and their Word Problem Solving Strategies of Multiplication and Division of Fractions, *The Mathematical Education* 50(3), 337-354.
- 김경미, 황우형 (2012). 자연수와 분수 연산에 대한 학생들의 이해 분석, 수학교육 51(1), 21-45.
- Kim, K. M. & Whang, W. H. (2012). An analysis of students' understanding of operations with whole numbers and fractions, *The Mathematical Education* 51(1), 21-45.
- 김명운, 장경윤 (2009). 맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈 지도, 학교수학 11(4), 685-706.
- Kim, M. W. & Chang, K. Y. (2009). Teaching Multiplication & Division of Fractions through Contextualization, *School Mathematics* 11(4), 685-706.

- 김민경 (2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석, 학교수학 5(2), 223-240.
- Kim, M. K. (2003). Knowledge of Preservice Elementary Teachers with Respect to Division. *School Mathematics* 5(2), 223-240.
- 김민경 (2009). 초등학생의 분수 이해 분석-6학년의 분수 개념 및 분수 나눗셈을 중심으로-, 한국학교수학 회논문집 12(2), 151-170.
- Kim, M. K. (2009). A Study of the Sixth Graders' Knowledge of Concepts and Operations about Fraction, *Journal of the Korean School Mathematics* 12(2), 151-170.
- 김성훈 (2005). 인지구조모형에 근거한 학생의 지식상태의 진단, 교육학연구 43(1), 81-107.
- Kim, S. H. (2005). Diagnosis of students' knowledge states based on a cognitive model: An application of Rule-space theory, *Korean journal of educational research* 43(1), 81-107.
- 박교식, 권석일 (2011). 예비초등교사들이 분수 포함제의 몫과 나머지 구하기에서 범하는 오류에 대한 분석, 초등수학교육 14(3), 317-328.
- Park, K. S. & Kwon, S. I. (2011). A study on errors committed by Korean prospective elementary teachers in finding and interpreting quotient and remainder within measurement division of fraction, *Education of primary school mathematics* 14(3), 317-328.
- 박교식, 송상현, 임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구, 학교수학 6(3), 235-249.
- Park, K. S., Song, S. H., & Yim, J. H. (2004). A Study on Understanding of the Elementary Teachers in Pre-service with respect to Fractional Division, *School Mathematics* 6(3), 235-249.
- 방정숙, Ye Ping Li (2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석, 수학교육 47(3), 291-310.
- Pang, J. S. & Ye Ping Li (2008). An Analysis on the Prospective Elementary Teachers' Knowledge, *The Mathematical Education* 47(3), 291-310.
- 방정숙, 이지영 (2009a). 사례 연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석, 학교수학 11(1), 71-91.
- Pang, J. S. & Lee, J. Y. (2009a). An Analysis of Operation Sense in Division of Fraction Based on Case Study, *School Mathematics* 11(1), 71-91.
- 방정숙, 이지영 (2009b). 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석, 학교수학 11(4), 723-743.
- Pang, J. S. & Lee, J. Y. (2009b). An Analysis of the Multiplication and Division of Fractions in Elementary Mathematics Instructional Materials, *School Mathematics* 11(4), 723-743.
- 백선수 (2004). 비형식적 지식을 이용한 대안적인 분수 나눗셈의 형식화 방안에 관한 연구, 초등수학교육 8(2), 97-113.
- Baek, S. S. (2004). A Study on Alternative Formalization of Division of Fractions Using Informal Knowledge, *Education of primary school mathematics* 8(2), 97-113.
- 송미영, 이영선, 박윤수 (2011). 인지진단모형을 통한 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석 및 성적 보고 방법 탐색. 서울: 한국교육과정평가원.
- Song, M. Y., Lee, Y. S., & Park, Y. S. (2011). Analysis and score reporting based in cognitive diagnostic models using the National Assessment of Educational Achievement. Seoul: Korea Institute of Curriculum and Evaluation.
- 신재홍 (2010). 분수나눗셈을 해결하기 위한 학생들의 자기-생성 알고리즘 구성에 관한 연구, 학교수학 12(3), 439-454.
- Shin, J. H. (2010). Construction of a Student-Generated Algorithm for Fraction Measurement Division, *School Mathematics* 12(3), 439-454.
- 신준식 (1996). 실제적 접근 방법에 의한 분수 교수-학습에 대한 연구. 한국교원대학교대학원 박사 학위 논문.
- Shin, J. S. (1996). A study on the teaching and learning of fraction based on the realistic approach. Doctoral dissertation, Korea National University of Education.
- 이영주, 이광호, 이효진 (2012). 분수의 나눗셈에 대한 학습자의 인지구조, 한국초등수학교육학회지 16(2), 295-320.
- Lee, Y. J., Lee, K. H., & Lee, H. J. (2012). A Study on Learner's Cognitive Structure in Division of Fraction, *Elementary Mathematics Education* 16(2), 295-320.
- 임재훈 (2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈, 학교수학 9(1), 13-28.
- Yim, J. H. (2007). Division of Fractions in the Contexts of the Inverse of a Cartesian Product, *School Mathematics*

- 91), 13-28.
- 임재훈, 김수미, 박교식 (2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구, 학교수학 7(2), 103-121.
- Yim, J. H., Kim, S. M., & Park, K. S. (2005). Different Approaches of Introducing the Division Algorithm of Fractions: Comparison of Mathematics Textbooks of North Korea, South Korea, China, and Japan, *School Mathematics* 7(2), 103-121.
- 임규혁, 임웅 (2007). (학교학습 효과를 위한) 교육심리학. 서울: 학지사.
- Lim, K. H. & Lim. W. (2007). Educational psychology. Seoul: hakjisa.
- 전평국, 박성선 (2009). 수학교육연구방법. 서울: 교우사.
- Jeon, P. K. & Park, S. S. (2009). Research methods in mathematics education. Seoul: kyowoosa.
- 전평국, 박혜경 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석, 수학교육논문집 15, 71-76.
- Jeon, P. & Park, H. (2003). The analysis of the relationship about knowledge connection for conceptual understanding of fraction division, *Communications of Mathematical Education*, 15, 71-76.
- 정현주 (2000). 학습 내용이 어려워지는 이유, 경희대학교 교육문제연구소 논문집 16, 219-233.
- Jeung, H. J. (2000). The reason why some material is difficult to understand? *Educational research community of Kyonghee University* 16, 219-233.
- 한광희 (1997). 인지과학과 인지심리학의 관계 고찰, 인문과학 76-77, 403-424.
- Han, K. H. (1997). The Relation of Cognitive Science and Cognitive Psychology, *The Liberal Arts* 76-77, 403-424.
- Aydin, F., & Taşar, M. F. (2010). An investigation of pre-service science teachers' cognitive structures and ideas about the nature of technology. *Journal of Kirsehir Education Faculty*, 11(4), 209-221.
- Bahar, M., Johnstone, A., & Sutcliffe, R. (1999). Investigation of students' cognitive structure in elementary genetics through word association tests. *Journal of Biological Education*, 33(3), 134-141.
- Bahar, M., & Tongaç, E. (2009). The effect of teaching approaches on the pattern of pupils' cognitive structure: Some evidence from the field. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 18(1), 21-45.
- Cachapuz, A., & Maskill, R. (1987). Detecting changes with learning in the organization of knowledge: Use of word association tests to follow the learning of collision theory. *International Journal of Science Education*, 9(4), 491-504.
- Ercan, F., Taşdere, A., & Ercan, N. (2010). Observation of cognitive structure and conceptual changes through word associations tests. *Journal of Turkish Science Education*, 7(2), 155-158.
- Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook*, 237-246. Reston, VA: NCTM
- Garskof, B. E., & Houston, J. P. (1963). Measurement of verbal relatedness: An idiographic approach. *Psychological Review*, 70(3), 277-288.
- Geeslin, W. E., & Shavelson, R. J. (1975). Comparison of content structure and cognitive structure in high school students' learning of probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6(2), 109-120.
- Haylock, D. W. (1982). Understanding in mathematics: Making connections. *Mathematics Teaching*, 98, 54-56.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H. et al. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. USA: University of Wisconsin Foundation. 김수환, 박영희, 이경화, 한대희 공역. (2004). 어떻게 이해하지?. 서울: 경문사.
- Ifenthaler, D., Masduki, I., & Seel, N. M. (2011). The mystery of cognitive structure and how we can detect it: Tracking the development of cognitive structures over time. *Instructional Science*, 39(1), 41-61.

- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 신현용, 승영조 역. (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. 서울: 승산.
- Martindale, C. (1991). *Cognitive psychology: A neural-network approach*. Thomson Brooks/Cole Publishing Co. 신현정 역. (1994). 인지심리학-신경회로망적 접근. 서울: 교육과학사.
- Mervis, C. B., & Rosch, E. (1981). Categorization of natural objects. *Annual Review of Psychology*, 32(1), 89-115.
- Novak, J. D., & Cañas, A. J. (2006). The theory underlying concept maps and how to construct and use them. *Technical Report No. IHMC CmapTools 2006-01*. Pensacola, FL: Institute for Human and Machine Cognition.
- Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1984). *Learning how to learn*. New York: Cambridge University Press.
- Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. L. Erlbaum Associates. 구광조, 오병승, 전평국 공역. (2007). 수학학습 심리학. 서울: 교우사.
- Shavelson, R. J. (1974). Some methods for examining content structure and cognitive structure in instruction 1. *Educational Psychologist*, 11(2), 110-122.
- Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook*, 153-161. Reston, VA: NCTM
- Wu, Y. T., & Tsai, C. C. (2005). Development of elementary school students' cognitive structures and information processing strategies under long term constructivist oriented science instruction. *Science Education*, 89(5), 822-846.

**An analysis of 6th graders' cognitive structure
about division of fraction
- Application of Word Association Test(WAT) -**

Lee, hyojin

Guenhwa elementary school, Chuncheon-si, Gangwon-do, Korea
E-mail : cnuesu@hanmail.net

Lee, kwangho

Korea National University of Education, Korea
E-mail : paransol@knue.ac.kr

The purpose of this study is to understand the difference of cognitive structure depending on the level of the 6th graders' problem-solving abilities about the division of fraction and to propose a method for improving the 6th graders' understanding about the division of fraction through the word association test.

The following is the findings from this study. 1)The lower level students' is, the lower the step that the chunk appeared in cognitive structure is. 2)The basic level students' association frequency between any two concepts was less than the excellent level students and the ordinary level students' it. 3)The basic level students' connection number between concepts was far less than the excellent level students and the ordinary level students' it. 4)The connection between natural number and unit fractions, subtraction of fraction and division of fraction, division of fraction and reduction to common denominator, and division of fraction and common multiple that expected in this study did not appear in the three groups.

* ZDM Classification : C32

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

* Key words : division of fraction, cognitive structure, word association test

<부록 1> 분수의 나눗셈(계산) 문제해결 검사지 문항

번호	기준1&2	기준4	기준3	기준5	검사문항
1	등분	자연수	길이		색 테이프 4m를 7사람에게 똑같이 나누어 주면 한 사람에게 몇 m씩 돌아가는지 분수로 나타내어 봅시다. (5학년 수학교과서, 28쪽)
2	등분	진분수	길이		물 $\frac{8}{9}$ L를 4사람이 똑같이 나누어 마셨습니다. 한 사람당 몇 L를 마셨습니까? (5학년 수학적힘책, 25쪽)
3	등분	가분수	길이		붉은 염산 $\frac{8}{7}$ L를 4개의 시험관에 똑같이 나누어 담았습니다. 시험관 한 개에 몇 L씩 담았습니까? (5학년 수학교과서, 29쪽)
4	등분	대분수	무게	혼합식	한 봉지의 무게가 $1\frac{1}{5}$ kg인 설탕 4봉지가 있습니다. 이 설탕 4봉지를 3사람이 똑같이 나누어 가진다면 한 사람에게 돌아가는 설탕은 몇 kg입니까? (5학년 수학교과서, 29쪽)
5	포함	진분수	길이	* 올림	$\frac{5}{8}$ L의 식용유가 있습니다. 이것을 작은 병에 $\frac{1}{4}$ L씩 나누어 담으려고 합니다. 작은 병이 몇 개 필요합니까? (6학년 수학교과서, 14쪽)
6	포함	가분수	무게		소금 $\frac{45}{8}$ kg을 한 봉지에 $\frac{9}{16}$ kg씩 담으면 몇 봉지가 됩니까? (6학년 수학교과서, 15쪽)
7	포함	대분수	시간	혼합식	인형 한 개를 만드는 데 $1\frac{3}{5}$ 시간이 걸립니다. 하루에 8시간씩 4일 동안 일한다면 인형을 몇 개 만들 수 있겠습니까? (6학년 수학적힘책, 17쪽)
8	카테시안 곱의 역	진분수	넓이		가로가 $\frac{4}{9}$ cm이고, 넓이가 $\frac{8}{21}$ cm ² 인 직사각형이 있습니다. 이 직사각형의 세로는 몇 cm입니까? (6학년 수학적힘책, 11쪽 수정)
9	카테시안 곱의 역	대분수	넓이		밑변이 $1\frac{1}{8}$ m이고 넓이가 $\frac{9}{14}$ m ² 인 평행사변형이 있습니다. 이 평행사변형의 높이는 몇m입니까? (6학년 수학적힘책, 16쪽)
10	곱셈의 역	진분수	길이		준호네 집에서 학교까지는 $\frac{1}{4}$ km이고 집에서 보건소까지는 $\frac{5}{8}$ km입니다. 집에서 보건소까지의 거리는 집에서 학교까지 거리의 몇 배입니까? (6학년 수학적힘책, 13쪽 수정)
11	곱셈의 역	대분수	길이		색테이프를 이용하여 미술 작품을 만들었습니다. 노란색테이프를 $2\frac{2}{5}$ m 사용했고, 빨간색테이프를 $\frac{3}{5}$ m 사용하였습니다. 사용한 빨간색테이프 길이는 노란색테이프 길이의 몇 배입니까?
12	단위비율 결정	진분수	길이, 무게		철근 $\frac{2}{7}$ m의 무게가 $\frac{3}{4}$ kg일 때, 철근 1m의 무게는 몇 kg입니까? (임재훈, 김수미, 박교식, 2005)
13	단위비율 결정	대분수	길이, 무게		나무막대 $1\frac{1}{2}$ m의 무게가 $\frac{3}{5}$ kg일 때, 나무막대 1m의 무게는 몇 kg입니까?

<부록 2> 분수의 나눗셈(계산) 문제해결 검사지

분수의 계산 문제해결 검사지	
<p style="text-align: center;">안녕하십니까?</p> <p>본 검사지는 6학년 학생 여러분의 분수의 계산 문제해결 능력을 검사하기 위한 목적으로 개발되었습니다.</p> <p>※ 문항은 중 13개 문항입니다. 총 소요 시간은 약 20분입니다.</p> <p>※ 각 문항은 바로 식을 써서 해결하는 것이 아니라 두 달 동안 학교에 나오지 못한 분수의 계산을 잘 하지 못하는 친구에게 설명해줄 때를 구하도록 구성되어 있습니다. 친구에게 설명을 잘 해주시기 바랍니다. 그림을 그려가며 설명해도 좋습니다.</p> <p>여러분이 작성한 나눗셈 초등학교 수학 교과를 위한 연구에 매우 중요한 자료가 될 것입니다. 검사 결과는 여러분의 성적과는 아무런 관련이 없으며, 연구 이외의 다른 용도로 사용 및 공개되지 않을 것입니다.</p> <p>여러분의 사생활을 꼭 확인한 후, 마지막까지 모든 문항에 진지하게 참여하여, 여러분의 생각을 증명할 기회를 주시기 바랍니다. 본 연구에 협조해 주셔서 대단히 감사드립니다.</p> <p style="text-align: right;">2012년 10월 한국교육대학교 대학원 초등수학교육 연구 지도교수 이광호 연구자 이효진 드림</p> <p><유의사항></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 먼저 문제를 잘 읽고, 무슨 내용이며, 무엇을 해결하려는 것인지 생각하며 문제를 해결합니다. 2. 답을 하지 않은 문제가 없도록 끝까지 최선을 다해 문제를 해결합니다. <p style="text-align: center; margin-top: 20px;">초등학교 6학년 반 이름 _____</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>1 색 테이프 4m를 7사람에게 똑같이 나누어 주면 한 사람에게 몇 m씩 돌아가는지 분수로 나타내어 봅시다.</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px;">(정 답) m</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>2 물 $\frac{3}{4}$L를 4사람이 똑같이 나누어 마셨습니다. 한 사람이 몇 L를 마셨습니까?</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px;">(정 답) L</p> </div> <p style="text-align: center;">- 1 -</p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>3 붉은 연산 $\frac{3}{4}$L를 4개의 시험관에 똑같이 나누어 담았습니다. 시험관 한 개에 몇 L씩 담았습니까?</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px;">(정 답) L</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>4 $\frac{3}{4}$L의 식용유가 있습니다. 이것을 작은 병에 $\frac{1}{4}$L씩 나누어 담으려고 합니다. 작은 병이 몇 개 필요합니까?</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px;">(정 답) 개</p> </div> <p style="text-align: center;">- 2 -</p>	<p>검사문항 배치는 쉬운 것에서 어려운 순서로 하였다. 즉 제수가 자연수인 것에서 분수인 것으로 우선 배치하고 분수는 진분수, 가분수, 대분수 순서로 배치하며 혼합식은 후반부에 배치하여 <부록1>의 문항을 1→2→3→5→8→10→12→6→9→11→13→4→7의 순서로 검사지를 제작하였다.</p>

<부록 3> 분수의 나눗셈 문제해결과 관련된 단어 연상
 검사지

분수의 나눗셈 문제해결과 관련된 단어 연상 검사지

인정하시나요?
 본 검사지는 6학년 학생들의 분수의 나눗셈 문제해결과 관련된 단어 사이의 관계를 어떻게 생각하고 있는지 검사하기 위한 목적으로 개발된 것입니다.
 * 단어는 아재와 같이 총 12명이며 각 단어마다 1분의 시간이 주어지며 총 소요 시간은 12분입니다.

분수의 나눗셈	분수의 곱셈	분수의 뺄셈	가분수	대분수	자연수
단위분수	약분	공약수	공배수	통분	기약분수

* 방법 : ① 위에 단적으로 제시된 단어를 보고 아래 단어 꾸러미에서 그 단어와 관련된 단어를 찾아 붙입니다. ② 어떠한 관련이 있는지 두 단어를 놓은 문장으로 적어줍니다.
 * 유의점 : 마지막엔 12분 끝까지 했는지 확인합니다.

단어 꾸러미

(단어 꾸러미)

분수의 곱셈	분수의 뺄셈	가분수	대분수
자연수	단위분수	약분	통분
공약수	공배수	기약분수	

여러분이 작성한 내용은 초등학교 수학 교재를 위한 연구에 매우 중요한 자료가 될 것입니다. 검사 결과는 여러분의 성장과는 아무런 관련이 없으며, 연구 이외의 다른 용도로 사용될 수 없습니다.
 마지막으로 모든 문제에 진지하게 임하여, 여러분의 생각을 정성껏 표현해 주시기 바랍니다. 부탁드립니다. * 연구에 도움을 주셔서 대단히 감사드립니다.

2012년 10월

한국교육대학교 이학원 초등학교를 방문 지도교수 이영호
 연구자 이호진 드림

초등학교 6학년 반 이름

* 아래 제시된 단어와 관련된 단어를 (단어꾸러미) 안에서 찾아 적고 어떠한 관련이 있는지 두 단어를 놓은 글로 적어봅시다.

분수의 나눗셈

(단어꾸러미)

분수의 곱셈	분수의 뺄셈	가분수	대분수
자연수	단위분수	약분	통분
공약수	공배수	기약분수	

분수의 나눗셈

1. _____

분수의 나눗셈

2. _____

분수의 나눗셈

3. _____

분수의 나눗셈

4. _____

분수의 곱셈

(단어꾸러미)

분수의 나눗셈	분수의 뺄셈	가분수	대분수
자연수	단위분수	약분	통분
공약수	공배수	기약분수	

분수의 곱셈

1. _____

분수의 곱셈

2. _____

분수의 곱셈

3. _____

단어연상검사지는 검사에 대한 소개 1페이지, 13개의 핵심개념 각각 1페이지씩 총 14페이지로 구성되었다.