

# Visualizations of Asymmetric Multidimensional Scaling

Su-Gi Lee<sup>a</sup> · Yong-Seok Choi<sup>a,1</sup> · Bo-Hui Lee<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Department of Statistics, Pusan National University

(Received June 2, 2014; Revised July 15, 2014; Accepted July 24, 2014)

---

## Abstract

Distances or dissimilarities among units are assumed to be symmetric in most cases of multidimensional scaling(MDS); consequently, it is not an easy task to deal with asymmetric distances. Current asymmetric MDS still face difficulties in the interpretation of results. This study proposes a simpler asymmetric MDS that utilizes the order statistic of an asymmetric matrix. The proposed Web method demonstrates that some influences among objects are visualized by direction, size and shape of arrow to ease the interpretability of users.

Keywords: Multidimensional scaling, asymmetric matrix, Web method.

---

## 1. 서론

다차원척도법(multidimensional scaling)이란 다차원 공간상에서 개체간의 거리를 나타내는 자료로부터 그들의 유사성(similarity) 또는 비유사성(dissimilarity)을 저차원 공간에 나타내어 그들의 관계를 탐색적으로 살펴보는 다변량 시각적 기법이다. 다차원척도법에서는 저차원 공간을 형상공간(configuration space)이라하며, 이 공간에 개체를 기하적으로 나타낸 것을 다차원척도그림이라고 한다. 다차원척도법은 1950년대에 Torgerson (1952)이 고전적인(classical) 계량형(metric) 다차원척도법을 처음 제안하면서 시작되었고, 1960년대에 Shepard (1962)와 Kruskal (1964)에 의해서 순서적인(ordinal) 비계량형(nonmetric) 다차원척도법을 위한 알고리즘이 개발되었다. 그 이후 Ramsay (1982)는 램지모형인 최대우도(maximum likelihood) 다차원척도법을, Oh와 Raftery (2001)는 베이지추정과 MCMC 알고리즘을 적용한 베이지(Bayes) 다차원척도법을 제안하기도 했다. 이를 포함하여 다차원척도법에 대한 정치학, 경제학, 심리학, 사회학, 시장조사, 지리학, 교육학 등 여러 분야의 다양한 응용과 사례를 Choi (2014)에서 찾아 볼 수 있다.

일반적으로 이들 다차원척도법은 크기가  $n \times p$ 인 다변량자료행렬  $\mathbf{X}$ 로부터 얻어진 두 개체  $i$ 와  $j$ 간의 비유사성  $d_{ij}$ 로 이루어지는  $n \times n$  거리행렬자료  $\mathbf{D} = (d_{ij})$ 에 대한 시각적 기법이다. 여기서  $d_{ij}$ 는 대칭성(symmetric)  $d_{ij} = d_{ji}$ 을 만족한다. 그러나 경우에 따라 개체들 간에 대칭성이 만족되지 못하는 비대칭성(asymmetric)  $d_{ij} \neq d_{ji}$ 이 발생하기도 한다. 이 경우에는 기존의 다차원척도법을 이용한 시각화는 불가능하며, 비대칭 비유사성을 대칭성이 만족되도록 변환하여야 한다. 가장 대표적인 변환은  $d_{ij}^M = (d_{ij} + d_{ji})/2$ ,  $d_{ij}^N = (d_{ij} - d_{ji})/2$ 이다. 여기서  $d_{ij}^M$ 은 대칭성을 만족하며,  $d_{ij}^N$ 은

---

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Statistics, Pusan National University, 2, Busandaehak-ro 63beon-gil, Geumjeong-gu, Busan 609-735, Korea. E-mail: yschoi@pusan.ac.kr

반(skew)대칭성  $d_{ij}^N = -d_{ji}^N$ 을 만족한다. 따라서 Cox와 Cox (2001) 그리고 Choi (2014)에 따르면 만약에  $\mathbf{D} = (d_{ij})$ 가 비대칭거리행렬이라면 이는 대칭성을 만족하는  $\mathbf{D}_M = (d_{ij}^M)$ 과 반대칭성을 만족하는  $\mathbf{D}_N = (d_{ij}^N)$ 에 의해서 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_M + \mathbf{D}_N.$$

이때  $\mathbf{D}_M = (d_{ij}^M)$ 에 대해서는 기존의 다차원척도법을 적용하여 시각화하고,  $\mathbf{D}_N = (d_{ij}^N)$ 에 대해서는  $\mathbf{D}_N^t \mathbf{D}_N$ 의 고유값과 고유벡터의 분해를 통해 시각화한다. 이를 비대칭 다차원척도법이라 하자. 그러나 이것만으로는 비대칭행렬의 정보를 반영하기에는 부족하다. 이러한 단점을 보완하여 최근에 Huh와 Lee (2012)는 두 개체간의 거리차이에 대한 선형적 수량화 방법에 의한 고도 모형(alitude model)과 컬러링을 제안하여 비대칭 다차원척도법의 결과를 시각적으로 쉽게 해석하고 이해하도록 하였다.

본 연구에서는 1장에서 소개한 다차원척도법의 비대칭거리행렬을 대칭행렬과 반대칭행렬로 분해한 후 대칭행렬에 대해 Kruskal (1964)의 비계량형 다차원척도법을 적용한다. 그 후 비대칭행렬자료의 순위행렬자료를 통하여 각 개체들 간의 상호적인 영향력을 화살표의 방향과 크기, 모양으로 표현하여 비계량형 다차원척도법에 추가적으로 표현해주는 시각적 도구인 웹 방법(Web method)을 제안하려한다. 지금까지 개발해온 방법들은 비대칭 다차원척도그림의 전반적인 영향력을 표현하였다. 그러나 비대칭행렬자료는 각 개체별 직접적인 영향력도 중요하다. 웹 방법은 처음으로 비대칭행렬자료의 개체별 직접적인 영향력을 표현해주는 방법이다. 이에 2절에서는 웹 방법에 대한 알고리즘을 소개하고, 3절에서는 5개 자동차 회사의 운전자들의 자동차 전환 자료와 10개의 아라비아 숫자 0에서 9에 대한 모스부호(Morse code) 자료에 대한 응용 사례를 보이고자 한다.

## 2. 웹 방법

크기가  $n \times n$ 인 비대칭거리행렬  $\mathbf{D} = (d_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ 를 고려하자. 이에 앞서  $\mathbf{D}$ 의 각 행의 주변합이 다를 경우 서로 다른 행의 원소 값이 동일하더라도 각 행에 주는 영향은 다를 수 있다. 이를 보정하기 위해 각 행별로 주변합의 값을 나누어 비율로 표현한 행렬을  $\mathbf{D}$ 로 정의한다. 기존의 다차원척도법은  $\mathbf{D}$ 의 원소의 크기에 매우 민감하므로 이를 극복하기 위해  $\mathbf{D}$ 의 전체 원소를 순위로 나타낸 순위행렬을 사용하기로 하자. 여기서 비대칭거리행렬  $\mathbf{D}$ 의 원소의 순위를  $r_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ 라 정의하면 순위행렬  $\mathbf{R}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

이는 비대칭거리행렬  $\mathbf{D}$ 에서 영향력이 높은 원소들은 순위행렬  $\mathbf{R}$ 에서의 순위도 높기 때문에 각 행에 대해서  $\mathbf{R}$ 의 원소 값이 가장 큰 두 개를 이용하여 다차원척도그림의 방향성을 고려한다. 이를 위해 순위행렬  $\mathbf{R}$ 의 각 행에 대한 모든 열의 값을 순서통계량으로 표현하면 다음과 같다.

$$r_{i(1)} \leq r_{i(2)} \leq \dots \leq r_{i(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

여기서  $i$ 행에 대한 순서통계량  $r_{i(k)}$ 가 원래  $j$ 열인  $r_{ij}$ 라 하면 다차원척도그림에 표현된 점들 중  $i$ 점에서  $j$ 점의 방향으로 크기가  $r_{i(k)}$ 인 화살표를 그려준다. 이를 화살표 벡터라 하고 식을 정의하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_{i(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = n-1, n-2, \quad (2.2)$$

여기서  $\mathbf{u}_{i \rightarrow j}$ 는  $\|\mathbf{u}_{i \rightarrow j}\| = 1$ 이고  $i$ 점에서  $j$ 점으로 향하는 단위벡터이다.

그러나 식 (2.2)를 이용하여 전체적인 시각화를 하게되면 다음과 같은 세 가지 문제점이 발생한다. 첫 번째, 식 (2.1)에서  $i$ 행과  $j$ 행에 대한 각각의 순서통계량  $r_{i(k)}$ 와  $r_{j(h)}$ 에 대해  $i$ 점과  $j$ 점 사이의 거리  $d_{ij}$ 가  $i$ 점에서  $j$ 점으로 그은 화살표 길이와  $j$ 점에서  $i$ 점으로 그은 화살표 길이의 합보다 작으면 다음의 식을 만족하게 되며,

$$d_{ij} < \mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_{i(k)} + \mathbf{u}_{j \rightarrow i} r_{j(h)}.$$

이럴 경우 두 화살표가 서로 겹쳐지게 된다. 또한 특정한  $i$ 행에서 가장 큰 값을 가지는  $j$ 열에 대해 두 점 사이의 거리가 최소값  $r_{i(1)}$ 에 비해 매우 가까운  $d_{ij} \leq r_{i(1)}$ 인 경우나 최대값  $r_{i(n)}$ 에 비해 매우 먼  $d_{ij} \geq r_{i(n)}$ 인 경우, 화살표가 두 점을 벗어나거나 화살표가 너무 짧아 식별이 어렵게 된다. 이러한 문제는 화살표의 크기  $\mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_{i(k)}$ 에 0보다 큰 조절 상수  $c$ 를 곱하여 식 (2.3)과 같이 그 크기를 조절해주면 해결된다.

$$\mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_{i(k)} c, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = n - 1, n - 2. \quad (2.3)$$

두 번째,  $i$ 점과  $j$ 점이 서로를 가리키고 있을 때 그 크기가 서로 비슷하여 시각적으로 식별이 잘 안 되는 경우이다. 이는 화살표의 선 모양을 서로 다르게 나타내면 해결된다. 예를 들어  $i$ 점에서  $j$ 점에서의 화살표 길이가  $j$ 점에서  $i$ 점에서의 화살표 길이보다 길면 다음을 만족한다.

$$\mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_{i(k)} > \mathbf{u}_{j \rightarrow i} r_{j(h)}.$$

이때  $i$ 점에서  $j$ 점에서의 화살표 선 모양을 실선으로 하고,  $j$ 점에서  $i$ 점에서의 화살표 선 모양을 점선으로 하면 서로의 크기가 시각적으로 좀 더 잘 나타내진다.

세 번째,  $i$ 점과  $j$ 점의 특성이 유사하여 거리가 상당히 가깝게 표현되는 경우가 있다. 이 때 화살이 서로를 가리키게 되면 전체적인 화살표의 보정을 했음에도 화살이 두 점을 지나가는 경우가 발생한다. 예를 들어  $i$ 점과  $j$ 점의 거리가 상당히 가깝고  $i$ 점의 화살이  $j$ 점으로 갈 경우 다음을 만족한다.

$$d_{ij} < \mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_{i(k)} c.$$

이때 이미 다차원척도그림에서  $i$ 점과  $j$ 점이 서로 유사하다고 나타나있기 때문에 화살표를 생략하여 표현한다. 이렇게 표현된 다차원척도그림은 마치 거미줄이 복잡하게 얽혀있는 모습처럼 보여 이를 웹 방법이라 정의하였다.

### 3. 사례분석

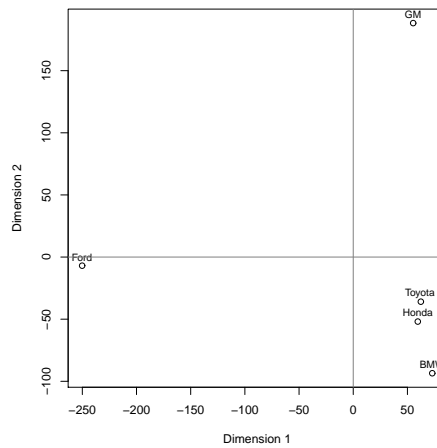
#### 3.1. 자동차 전환 자료

Table 3.1은 5개 자동차 회사 BMW, Ford, Honda, Toyota, GM의 운전자들의 자동차 전환 자료이다 (Haiyan, 2005). 행은 운전자들이 과거에 사용하던 자동차의 회사이고, 열은 운전자들이 새로 구입한 자동차의 회사이다. 각 회사별로 다른 회사의 자동차로 옮기는 운전자의 수는 동일하지 않기 때문에 주어진 자료는 비대칭 행렬이고, 각 행의 주변 합이 다르기 때문에 이 자료를 주변 합의 값으로 나눠주어 비율로 표현한 후 웹 방법을 적용하였다.

Figure 3.1은 비대칭행렬자료를 대칭행렬 부분과 반대칭행렬 부분으로 나눈 후 대칭행렬 부분을 이용하여 그린 일반적인 다차원척도그림이다. 제 1축을 기준으로 왼편에 Ford와 오른편에 나머지 4개 회사가

**Table 3.1.** The car-switching data

	BMW	Ford	Honda	Toyota	GM
BMW	180	40	20	0	10
Ford	20	343	40	30	70
Honda	10	20	120	10	20
Toyota	30	20	30	70	10
GM	10	20	0	20	250

**Figure 3.1.** Multidimensional scaling plot of the car-switching data

있다. Ford의 운전자들이 차를 새로 구입할 때 다시 Ford의 자동차를 구입하는 경우가 많음을 알 수 있고 나머지 회사들은 그 반대임을 알 수 있다. 제 2축까지 해석을 하면 GM의 운전자들은 자동차를 새로 구입할 때 Ford의 자동차를 구입하는 경우가 많은 반면 타 회사의 자동차를 구입하는 경우가 상대적으로 낮은 것을 알 수 있다. 제 1축과 제 2축을 기준으로 제 1사분면에 GM, 제 3사분면에 Ford, 제 4사분면에 Toyota, Honda 그리고 BMW가 나타나있다. 전반적으로 원점에서 멀리 떨어져있는 Ford, GM 그리고 BMW의 운전자는 새로운 차를 구입 할 때 다시 동일한 회사의 자동차를 구입하는 비율이 높고, 원점에 가까운 Toyota와 Honda의 경우는 나머지 세 회사에 비해 동일한 회사의 자동차를 구입하는 비율이 낮음을 알 수 있다. 그리고 제 1축을 기준으로 Ford와 나머지 회사가 나누어지는 이유는 나머지 네 회사의 운전자들이 다른 회사의 자동차를 구입할 때 Ford를 가장 많이 구입하기 때문이다. GM의 경우 제 2축을 기준으로 혼자 위쪽에 위치해 있는데 그 이유는 다른 회사를 구입할 때 Ford를 구입하는 운전자의 비율과 나머지 세 회사를 구입하는 운전자의 비율의 차이가 나머지 회사들 보다 크기 때문이다. 하지만 각 회사별로 동일한 수의 운전자들이 차를 교체하는 것이 아니므로 Table 3.1의 정보를 완벽하게 반영하지 못하며, 이를 반영하기위해 웹 방법을 적용하여야 한다.

Figure 3.2는 Figure 3.1에 웹 방법을 적용한 그림이다. 이 그림을 얻기 위해 Table 3.1의 자료를 식 (2.3)에서  $n = 5$ 인 경우  $\mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_{i(4)} c$ 와  $\mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_{i(3)} c$ 를 이용하고 조절 상수  $c$ 는 7로 하여 다차원적도그림에 표현하였다. GM에서 Ford로의 화살표는 크기가 상대적으로 작고 모양이 점선이며, Ford에서 GM으로의 화살표는 크기가 상대적으로 크고 모양이 실선이다. 이는 Ford의 자동차를 타던 운전자가 새 자동차를 구입할 때 GM의 자동차를 구입하는 비율이 상대적으로 높다는 것을 나타낸다. 그리고 Ford의 자동차를 타던 운전자가 새 자동차를 구입할 때 Honda의 자동차를 구입하는 비율이 두 번째로 높음을 알 수

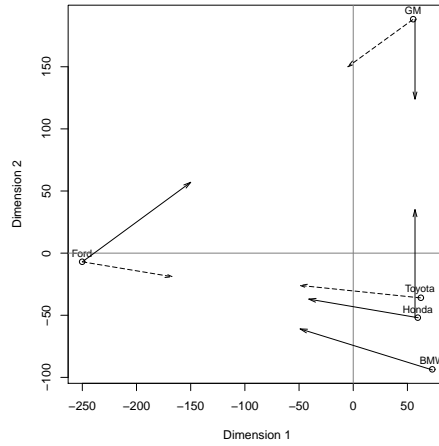


Figure 3.2. Web method plot of the car-switching data

Table 3.2. The morse code data

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	84	63	13	8	10	8	19	32	57	55
2	62	89	53	20	5	14	20	21	16	11
3	16	59	86	31	23	41	16	17	8	10
4	6	23	38	89	42	44	32	10	3	3
5	12	8	27	56	90	42	24	10	6	5
6	12	14	33	34	30	86	69	14	5	14
7	20	25	17	24	18	65	85	70	20	13
8	37	25	16	13	10	22	65	88	61	26
9	57	28	9	7	5	8	31	58	91	78
0	52	18	9	7	5	18	15	39	79	97

있다. Toyota와 Honda 그리고 BMW의 그룹은 전반적으로 운전자들이 새 자동차를 구입할 때 Ford의 자동차를 구입하는 운전자들이 많음을 알 수 있다. 물론 Toyota의 경우 그룹 내의 Honda와 BMW의 자동차를 구입하는 운전자들이 많아 보이지만, 대칭행렬로 변환했을 때의 정보는 Toyota에서 Ford로 많이 옮기는 것을 알 수 있다.

### 3.2. 모스부호 자료

Table 3.2는 10개의 아라비아 숫자 0에서 9에 대한 모스부호를 정리한 자료이다 (Everitt와 Dunn, 1991). 이는 모스부호를 모르는 598명에게 청각적으로 기계에 의해서 두 수의 모스부호 신호를 짝을 지어 두 번 들려주고 두 신호의 짝이 같다고 생각하는 사람들의 비율을 나타낸 비유사성 행렬 자료이다. 이 자료는 비대칭 행렬로 되어있어 두 신호의 짝이 같다고 생각하는 사람들의 비율이 들려주는 순서에 따라 다름을 알 수 있다. 각 행의 주변합이 다르기 때문에 이 자료를 주변합의 값으로 나눠주어 비율로 표현한 후 웹 방법을 적용하였다.

Figure 3.3은 비대칭행렬자료를 대칭행렬 부분과 반대칭행렬 부분으로 나눈 후 대칭행렬 부분을 이용하여 그린 일반적인 다차원척도그림이다. 전체적으로 제 1축의 왼편에서부터 시계반대방향으로 0(-----),

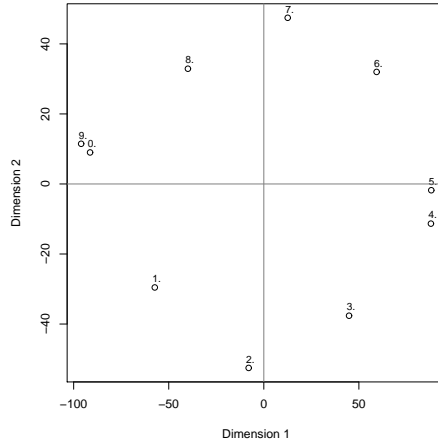


Figure 3.3. Multidimensional scaling plot of the morse code data

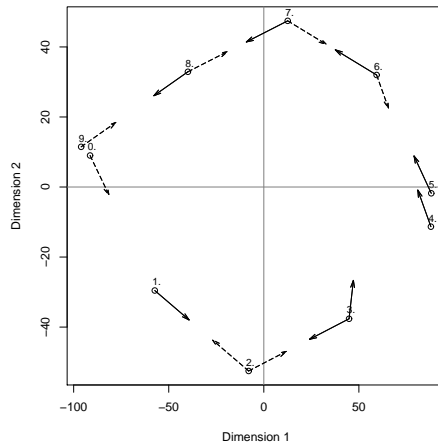


Figure 3.4. Web method plot of the morse code data

1(·----), 2(·-----), 3(·-----), 4(·-----), 5(·-----), 6(·-----), 7(·-----), 8(·-----), 9(·-----) 순서로 다소 거칠지만 원을 형성하고 있다. 제 1축을 기준으로 왼쪽에서 오른쪽으로 갈수록 모스부호인 점 (·)이 증가되는 추세를 측정하며, 제 2축을 기준으로 아래쪽은 아라비아 숫자 1(·----), 2(·-----), 3(·-----), 4(·-----), 5(·-----)로 점 (·)이 먼저 시작되며 위쪽은 0(-----), 9(-----), 8(-----), 7(-----), 6(-----)으로 선 (-)이 먼저 시작되어 신호의 동질성을 측정한다. 이는 두 신호를 들려주었을 때 같은 신호로 받아들이는 사람들의 비율이 다차원척도그림에서 가까운 거리로 나타나있다. 이들을 비율로 보면 1(·----)과 2(·-----)를 같다고 생각하는 사람, 3(·-----), 4(·-----), 5(·-----)를 같다고 생각하는 사람, 6(·-----), 7(·-----)을 같다고 생각하는 사람 마지막으로 8(·-----), 9(·-----), 0(·-----)이 같다고 생각하는 사람들이 많다. 그러나 주어진 Table 3.2의 자료는 비대칭행렬로 나타나 있어 자료의 정보를 완벽하게 반영하지 않는다. 비

대칭행렬의 정보를 완벽하게 반영하기 위해서 웹 방법을 적용시켜 살펴보자.

Figure 3.4는 기존의 다차원척도그림에 식 (2.3)의  $n = 10$ 인 경우  $\mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_i^{(9)} c$ 와  $\mathbf{u}_{i \rightarrow j} r_i^{(8)} c$ 를 이용하고 조절 상수  $c$ 는  $2/7$ 로 하여 나타낸 웹 방법 그림이다. 그림을 살펴보면 전체적으로 화살표의 길이가 서로 비슷하여 화살표의 길이로는 영향력의 크기를 알기 어려우므로 화살표의 모양과 방향을 이용하여 해석하는 것이 바람직하다. 우선, 6(-----), 7(-----), 8(-----)의 경우 숫자가 커질수록 사람들이 더 많이 틀리는 것을 알 수 있다. 즉, 6(-----)과 7(-----)을 들려주었을 때 6(-----)을 7(-----)이라고 생각하는 사람들이 7(-----)을 6(-----)이라고 생각하는 사람보다 많음을 알 수 있다. 7(-----)과 8(-----)의 경우도 위와 같음을 알 수 있다. 5(-----)의 경우는 이웃하는 두 수 인 4(-----)와 6(-----)으로 착각하는 사람들이 4(-----)와 6(-----)을 5(-----)로 착각하는 사람들보다 많음을 알 수 있다. 2(-----)와 9(-----)의 경우는 다른 숫자로 착각하는 사람보다 다른 숫자를 2(-----)와 9(-----)로 착각하는 사람들이 많음을 알 수 있다. 3(-----)의 경우는 다른 숫자와 조금 다르게 이웃하는 숫자와 헷갈리기 보다는 그와 조금 멀리 떨어진 6(-----)으로 헷갈리는 사람들이 많음을 알 수 있다. 일반적으로 이웃하는 숫자들을 모스부호로 들려주었을 때 사람들이 많이 헷갈리는 것을 알 수 있고, 3(-----)의 경우만 특별하게 조금 떨어진 6(-----)으로 생각하는 사람이 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

지금까지 비대칭행렬을 다차원척도법으로 표현하는 방법에 대한 여러 연구가 있었다. 본 연구에서 제안된 웹 방법은 주어진 비대칭행렬의 영향력을 화살표의 방향과 크기, 모양으로 표현함으로써 간단한 계산만으로도 비대칭행렬의 모든 정보를 한눈에 알아보기 쉽도록 해주는 것이 장점이다. 이 연구의 경우 시각적 해석을 편하게 하기위해 주어진 비대칭행렬을 순위행렬로 변환하여 그 원소들을 순서통계량으로 만들었다. 그 후 순서통계량의 값 중 가장 큰 두 개의 값만을 화살표로 표현했기 때문에 나머지 부분에 대한 표현이 부족하다. 물론 나머지 값들이 큰 영향을 주지 않을 때는 웹 방법이 잘 적용되고 해석에 있어서 큰 문제가 없음을 알 수 있다. 그러나 나머지 값들의 영향력도 크다면 그것에 대한 정보는 꼭 필요한 정보로 반드시 표현되어야 한다. 향후에는 영향력있는 나머지 값들을 모두 반영할 수 있는 연구를 기대한다.

#### References

- Choi, Y. S. (2014). *Walk in Multidimensional Scaling -SAS/MDS, SAS/IML and R-*, Free Academy, Gyeonggi-do.
- Cox, T. F. and Cox, M. A. A. (2001). *Multidimensional Scaling*, Second Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Everitt, B. S. and Dunn, G. (1991). *Applied Multivariate Data Analysis*, Edward Arnold, London.
- Haiyan, L. (2005). Data visualization of asymmetric data using sammon mapping and applications of self-organizing maps, *Digital Repository*, University of Maryland.
- Huh, M. H. and Lee, Y. G. (2012). Multidimensional scaling of asymmetric distance matrices, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 613–620.
- Kruskal, J. B. (1964). Multidimensional scaling by optimizing goodness-of-fit to a nonmetric hypothesis, *Psychometrika*, **29**, 1–27.
- Oh, M. S. and Raftery, A. E. (2001). Bayesian multidimensional scaling and choice of dimension, *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 1031–1044.
- Ramsay, J. O. (1982). Some statistical approaches to multidimensional scaling data, *Journal of Royal Statistical Society*, **145**, 285–312.

Shepard, R. N. (1962). The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function. I and II, *Psychometrika*, **27**, 125–140, 219–246.

Torgerson, W. S. (1952). Multidimensional scaling: I. Theory and Method, *Psychometrika*, **17**, 401–419.



# 비대칭 다차원척도법의 시각화

이수기<sup>a</sup> · 최용석<sup>a,1</sup> · 이보희<sup>a</sup>

<sup>a</sup>부산대학교 통계학과

(2014년 6월 2일 접수, 2014년 7월 15일 수정, 2014년 7월 24일 채택)

---

## 요약

다차원척도법(MDS)에서는 대개 개체간의 거리나 유사성이 대칭성을 따른다. 따라서 비대칭 거리를 다루기는 쉽지 않다. 통용되고 있는 비대칭 다차원척도법도 여전히 결과를 해석하는데 어려움이 있다. 본 연구는 비대칭행렬의 순서 통계량을 활용하여 더 간단한 비대칭 다차원척도법을 제안한다. 제안된 웹(Web) 방법은 개체간의 영향력을 사용자가 해석을 쉽게 하도록 화살표의 방향크기와 모양에 따라 시각화하여 보여준다.

주요용어: 다차원척도법, 비대칭 행렬, 웹 방법.

---

<sup>1</sup>교신저자: (609-735) 부산광역시 금정구 부산대학로 63번길 2, 부산대학교 통계학과.  
E-mail: schoi@pusan.ac.kr