Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A, Vol. 38, No. 9, pp. 933~941, 2014

<학술논문> DOI http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2014.38.9.933 ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)

주파수응답에 대한 투영기반 모델차수축소법의 비교§

원 보 름* · 한 정 삼**†
* 한국해양과학기술원 연안개발 · 에너지연구부, ** 안동대학교 기계설계공학과

Comparison of Projection-Based Model Order Reduction for Frequency Responses

Bo Reum Won* and Jeong Sam Han**†
* Coastal Development and Ocean Energy Research Division, KIOST
** Dept. of Mechanical Design Engineering, Andong Nat'l Univ.

(Received February 24, 2014 ; Revised July 9, 2014 ; Accepted July 25, 2014)

Key Words: Model Order Reduction(모델차수축소법), Krylov Subspace(크리로프 부공간), Mode Truncation Method(모드중첩법), Frequency Response Analysis(주파수응답해석), Car Suspension(현가장치)

초록: 본 논문에서는 대표적 투영기반 모델차수축소법인 크리로프 부공간 모델차수축소법(KSM)과 모드중첩법(MTM)을 고려하여 주파수응답해석에 대한 수치적 정확도와 효율성을 비교하였다. 두 모델차수축소법의 수치 정확도 비교를 위하여 주파수응답해석 결과, 축소차수 및 관심주파수에 따른 상대오차를 고려하였으며 이후에 오차수렴지표를 통한 자동적인 축소차수의 결정이 가능 여부를 확인하였다. 효율성 비교를 위해서는 각 축소모델의 주파수응답 해석시간 및 축소차수에 따른 변환행렬 생성시간을 비교하였다. 자동차 현가장치에 대한 유한요소모델을 적용예제로 선정하여 수치 비교를 수행하였다.

Abstract: This paper provides a comparison between the Krylov subspace method (KSM) and modal truncation method (MTM), which are typical projection-based model order reduction methods. The frequency responses are compared to determine the numerical accuracies and efficiencies. In order to compare the numerical accuracies of the KSM and MTM, the frequency responses and relative errors according to the order of the reduced model and frequency of interest are studied. Subsequently, a numerical examination shows whether a reduced order can be determined automatically with the help of an error convergence indicator. As for the numerical efficiency, the computation time needed to generate the projection matrix and the solution time to perform a frequency response analysis are compared according to the reduced order. A finite element model for a car suspension is considered as an application example of the numerical comparison.

1. 서 론

큰 자유도를 가지는 대형 유한요소모델에 대한 주파수응답해석(frequency response analysis)에는 대규모 전산자원과 장시간의 연산시간이 필요하기 때문에 직접법(direct method)보다는 초기시스템의 차수를 줄인 일종의 모델차수축소법(model order reduction, MOR)이 많이 이용된다.[1~5] 이러한 방법 중에서 투영기반 모델차수축소법(projection based MOR)은 일반적으로 초기시스템을 축소시키는 과정에서 사용되는 변환행렬(projection matrix)의 종류에 따라서 구분된다.[5,6] 크리로프 부공간 모델차수축소법(Krylov subspace method, KSM)[1~3,7~11]과 모드중첩법(mode truncation method, MTM)[4,12,15]은 BTM(balanced truncation method)[13] 및 POD(proper orthogonal decomposition)[14] 등과 더불어 대표적인 투영기반 모델차수축소법이다. KSM은 변환행렬이 크리로프 부공간의 기저로 구성되며 초기 및 축소시스템의 전달함수의 모멘트가 일치하는 특징을 가지는 방법으로 다양한 분야로 그 적용이 확대되고 있다.[15] 2000년대 이후에 KSM으로 축소된

§ 이 논문은 대한기계학회 2013 년도 학술대회(2013. 12. 18.-20., 강원랜드) 발표논문임
† Corresponding Author, jshan@anu.ac.kr
© 2014 The Korean Society of Mechanical Engineers

모델에 대한 회로해석,[7] 열해석,[9] 구조진동해석[10] 뿐만 아니라 효율적인 최적설계를 위한 주파수 응답해석과 민감도 해석,[1] 시간영역 과도해석과 민감도해석[8] 등이 연구되는 등 KSM은 다양한 분야로 확대 적용되고 있다. MTM은 가장 널리 알려진 투영기반 모델차수축소법으로 소수의 저차 고유모드를 사용하여 초기시스템을 축소시켜 해석의 효율성을 높이는 방법으로 공학적으로 널리 사용되는 해석방법이다.[15] 근래에는 점탄성 시스템에 MTM을 적용한 주파수응답해석,[4] MTM을 이용한 효율적인 위상최적화 민감도해석[12] 등 다양한 연구가 진행되었다.

KSM과 MTM은 대표적인 투영기반 모델차수 축소법으로 개별적으로는 많은 연구가 수행되었으나 두 방법을 정량적으로 비교한 연구는 부족한 편이다. 따라서, 본 논문에서는 KSM과 MTM을 수치적 정확도와 효율성 측면에서 구체적인 수치예제를 통하여 비교하고자 한다. 먼저 초기시스템의 주파수응답해석 결과와 KSM과 MTM으로 축소된 축소시스템의 주파수응답해석 결과를 축소차수에 따라 비교하여 수치적 정확도를 판단하고, 변환행렬 계산 및 주파수응답해석에 소요된 시간을 비교하여 효율성을 판단하였다. 또한, 사용자가 지정한 상대오차 내에서 자동적으로 축소차수를 결정할 수 있는 등의 모델차수축소 계산의 자동화 측면을 고려하였다.

2. 투영기반 모델차수축소법

일반적으로 선형 시불변(time-invariant) 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{b}u(t)\\&\mathbf{y}(t)=\mathbf{L}\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 t는 시간변수, $\mathbf{x}(t)\in\Re^N$은 상태변수벡터, u(t)는 입력, 그리고 $\mathbf{y}(t)\in\Re^p$는 출력벡터이다. 상태변수벡터 $\mathbf{x}(t)$의 자유도는 N, 출력벡터의 크기는 p이며 대부분의 공학문제에서 p<<N이다. 행렬 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}\in\Re^{N\times N}$는 각각 이차 시스템의 질량, 감쇠 및 강성행렬이다. 벡터 $\mathbf{b}\in\Re^N$와 $\mathbf{L}\in\Re^{p\times N}$은 각각 하중이 작용하는 위치와 크기를 나타내는 하중분배벡터와 선택점에서의 응답을 보기 위한 출력측정행렬을 의미한다.[2,3,10]

투영기반 모델차수축소법은 먼저 상태벡터 $\mathbf{x}(t)$를 근사할 수 있는 부공간 S_1을 찾아 $\mathbf{x}(t)$를 부공간 S_1의 벡터로 근사시키는 것이다. $\mathbf{V}\in\Re^{N\times n}$를 부공간 S_1의 정규직교기저(orthonormal basis)라고 하면 상태벡터 $\mathbf{x}(t)$는 아래의 관계를 만족한다.[5~8]

$$\mathbf{x}(t)\approx\mathbf{V}\mathbf{z}(t)\quad\text{where}\quad \mathbf{z}(t)\in\mathbf{R}^n, n<<N \tag{2}$$

일단 n×n 크기의 $\mathbf{z}(t)$를 구하면 식 (2)로 $\mathbf{x}(t)$의 근사해 $\hat{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{V}\mathbf{z}(t)$를 얻을 수 있다. 축소시스템은 두 단계에 걸쳐 생성되는데, 첫째 단계는 식 (1)에 상태벡터를 식 (2)로 대체하는 것이다. 즉, 초기시스템의 상태벡터를 부공간 S_1상의 벡터로 근사시킨다.[5,6]

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{z}}(t)+\mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{z}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{z}(t)=\mathbf{b}u(t)+\mathbf{e}\\&\hat{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{z}(t)\end{aligned} \tag{3}$$

초기시스템을 위와 같이 근사함에 따라 다음과 같은 잔차(residual) $\mathbf{e}$가 발생한다.

$$\mathbf{e}=\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{z}}(t)+\mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{z}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{z}(t)-\mathbf{b}u(t) \tag{4}$$

둘째 단계로 잔차를 최소화시키도록 다음과 같은 Petrov-Galerkin 조건[6]을 적용시킨다.

$$\mathbf{W}^T\mathbf{e}=0 \tag{5}$$

여기서 행렬 $\mathbf{W}\in\Re^{N\times n}$은 부공간 S_2의 기저로 구성되며 위의 조건을 만족하려면 잔차 $\mathbf{e}$와 $\mathbf{W}$는 서로 직교($\mathbf{e}\perp\mathbf{W}$)해야 한다. 이로부터 초기시스템인 식 (1)에 대한 축소시스템이 아래와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{z}}(t)+\mathbf{W}^T\mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{z}}(t)+\mathbf{W}^T\mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{z}(t)=\mathbf{W}^T\mathbf{b}u(t)\\&\hat{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{z}(t)\end{aligned} \tag{6}$$

이때, 축소시스템은 n×n의 크기를 가지며 시스템의 축소행렬은 $\mathbf{M}_r=\mathbf{W}^T\mathbf{M}\mathbf{V}$, $\mathbf{C}_r=\mathbf{W}^T\mathbf{C}\mathbf{V}$ $\mathbf{K}_r=\mathbf{W}^T\mathbf{K}\mathbf{V}$, $\mathbf{b}_r=\mathbf{W}^T\mathbf{b}$ 및 $\mathbf{L}_r=\mathbf{L}\mathbf{V}$로 각각 표현된다.

부공간 S_1 및 S_2의 정규직교한 기저로 구성된 행렬 $\mathbf{V}$와 $\mathbf{W}$를 변환행렬이라 하며, $\mathbf{V}=\mathbf{W}$인 경우를 정투영(orthogonal projection), $\mathbf{V}\neq\mathbf{W}$인 경우를 사투영(oblique projection)이라 한다. 투영기반 모델차수 축소법에서는 변환행렬이 핵심적인 역할을 하며 본 논문에서는 $\mathbf{V}=\mathbf{W}$인 정투영법으로 크리로프 부공간의 기저를 사용하는 KSM과 비감쇠 시스템의 고유벡터를 기저로 사용하는 MTM의 두 가지 방법을 고려하였다.

2.1 크리로프 부공간 모델차수축소법

KSM은 변환행렬으로 아래와 같이 정의되는 크리로프 부공간의 기저를 사용한다.[7,15]

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}_n(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M},\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b})\\&=\text{span}\{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b},(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b},\cdots,(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{n-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}\}\end{aligned} \tag{7}$$

이때, 크리로프 부공간의 각 열벡터는 초기시스템을 비감쇠로 가정하고 그 전달함수를 테일러급수

전개했을 때, 각 계수 즉, 모멘트(moment)에 해당한다. 여기서 모멘트는 초기 및 축소시스템의 모멘트를 일치시킴으로써 두 시스템의 유사성을 나타내는 지표로 사용된다.[3] 이와 같이 KSM은 테일러급수 전개점에서는 두 시스템이 서로 일치하지만 전개점으로부터 멀어지는 경우 점차 오차가 커지는 국부적(local) 모멘트일치(moment-matching) 특징을 가진다. 즉, 식 (2)의 변환행렬 **V**의 각 열벡터의 모든 선형결합(linear combination)이 식 (7)의 n차 크리로프 부공간을 구성(span)하면, 비감쇠 초기시스템과 축소시스템의 첫 n번째까지의 모멘트는 서로 일치한다.[7]

변환행렬 **V**의 수치적 계산을 위해서는 실제로 각 모멘트를 계산하지 않고, 그 부공간의 다른 기저를 계산하며 주로 아놀디과정(Arnoldi process)[1,3,11]을 사용하였다. 이때, 초기시스템의 질량 및 강성행렬과 하중분배벡터의 정보만이 이용되며 아놀디과정으로 생성된 변환행렬 **V**는 다음과 같은 정규직교성(orthonormality)을 가진다.

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = \mathbf{I} \tag{8}$$

이외의 모멘트일치 및 크리로프 부공간의 기저 계산에 대한 내용은 관련 참고문헌[1~3,7~11]에 잘 정리되어 있다.

2.2 모드중첩법

MTM은 시스템의 고유진동수 및 고유벡터를 사용하여 초기시스템을 축소시스템으로 변환한다. 즉, 변환행렬의 열벡터로 비감쇠 시스템의 고유벡터(eigenmode)를 사용한다. 따라서, 초기시스템을 m차의 축소시스템으로 변환하는 모드중첩법의 변환행렬 **Φ**는 아래와 같이 구성된다.[5,15]

$$\mathbf{\Phi} = [\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m] \tag{9}$$

여기서 ϕ_i은 초기시스템에 대한 i번째 비감쇠 고유벡터이다. 따라서, MTM에서 m차 축소모델을 위해서는 m개의 고유벡터를 계산해야 하는데 일반적으로 고유벡터가 Krylov 벡터보다 더 많은 계산시간이 필요하다.

MTM의 변환행렬은 아래와 같이 질량행렬에 대해 정규직교한 성질을 가진다.[5,15]

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \mathbf{I}_m \tag{10}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Lambda}_m^2 \tag{11}$$

여기서 $\mathbf{\Lambda}_m^2$는 고유값 ω_1^2, … , ω_m^2을 대각요소로 갖는 대각행렬이다. 이러한 고유벡터의 직교성으로 인하여 감쇠행렬이 질량 및 강성행렬의 형태로 구성된 경우, 식 (6)이 비연성(uncoupled)되는 장점이 있다.

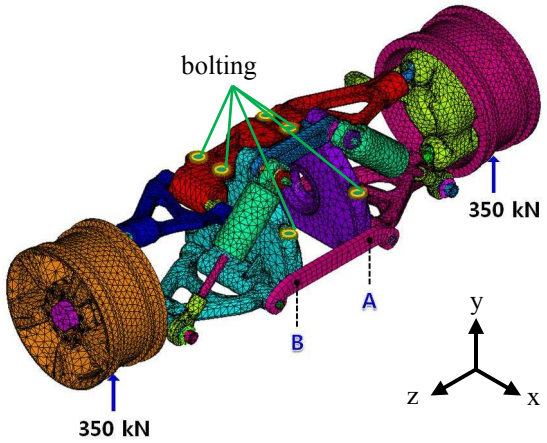


Fig. 1 FE model of a car suspension

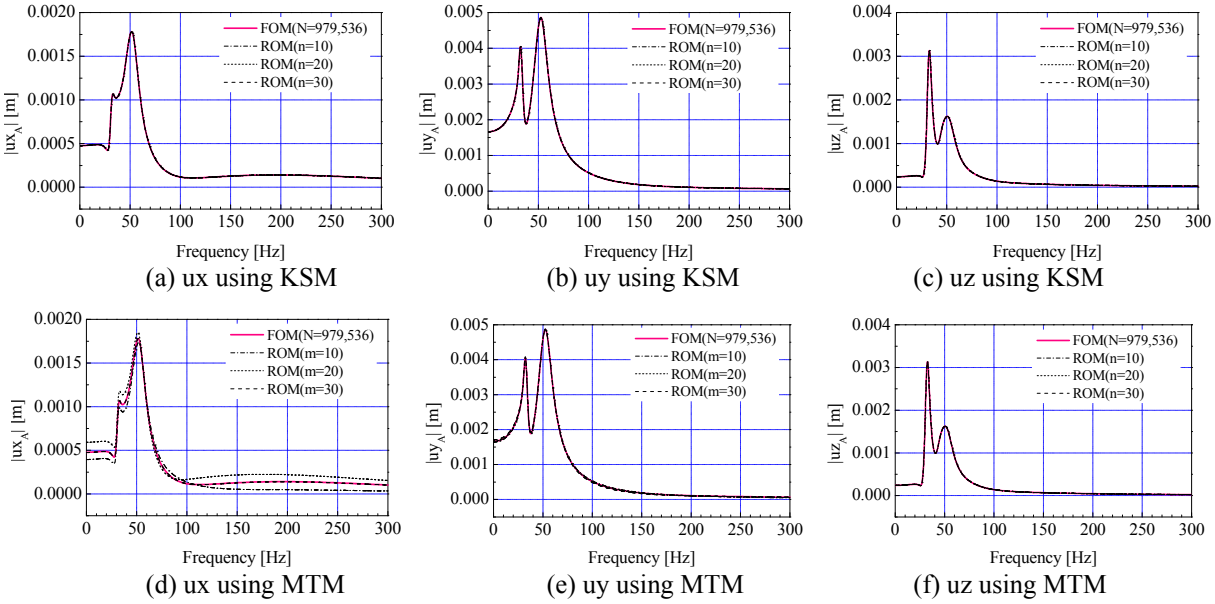
3. 수치예제

본 절에서는 KSM과 MTM의 주파수 응답해석에 대한 수치적 정확도와 효율성을 비교한다. 먼저, 수치 정확도 비교를 위하여 초기시스템과 KSM 및 MTM의 축소시스템의 주파수응답해석 결과, 축소차수 및 관심주파수에 따른 상대오차를 고려하였다. 수치계산의 효율성 평가를 위해서는 각 축소모델의 주파수응답 해석시간 및 축소차수에 따른 변환행렬 생성시간을 비교하였다. 모든 수치계산은 2.4 GHz Intel Xeon CPU 및 47.9 GB의 내부메모리를 가지는 워크스테이션에서 수행하였으며, 유한요소모델링과 차수축소과정은 ANSYS APDL (ANSYS Parametric Design Language)[16]를 사용하였다.

3.1 자동차 현가장치

Fig. 1은 자동차 현가장치의 ANSYS 유한요소모델을 나타낸다.[16] 이 모델은 몸체(body)와 양쪽의 휠(wheel)로 총 3개의 파트로 나누어지며, 서로 다른 파트는 결합접촉(bonded contact)으로 모델링되었다. 사용된 유한요소는 SOLID186 및 SOLID187, 그리고 BEAM188 요소이며, 총 요소수는 207,405, 총 절점수는 306,243으로 유한요소모델의 총 자유도는 979,536개이다. 경계조건은 bolting으로 표시된 6개 지점에 해당하는 절점의 자유도를 모두 구속하였으며, 휠 하단에 위치하는 일부 절점에 y방향으로 350 kN의 하중이 부여된다. 주파수응답의 출력점은 Fig. 1의 A 및 B점이다.

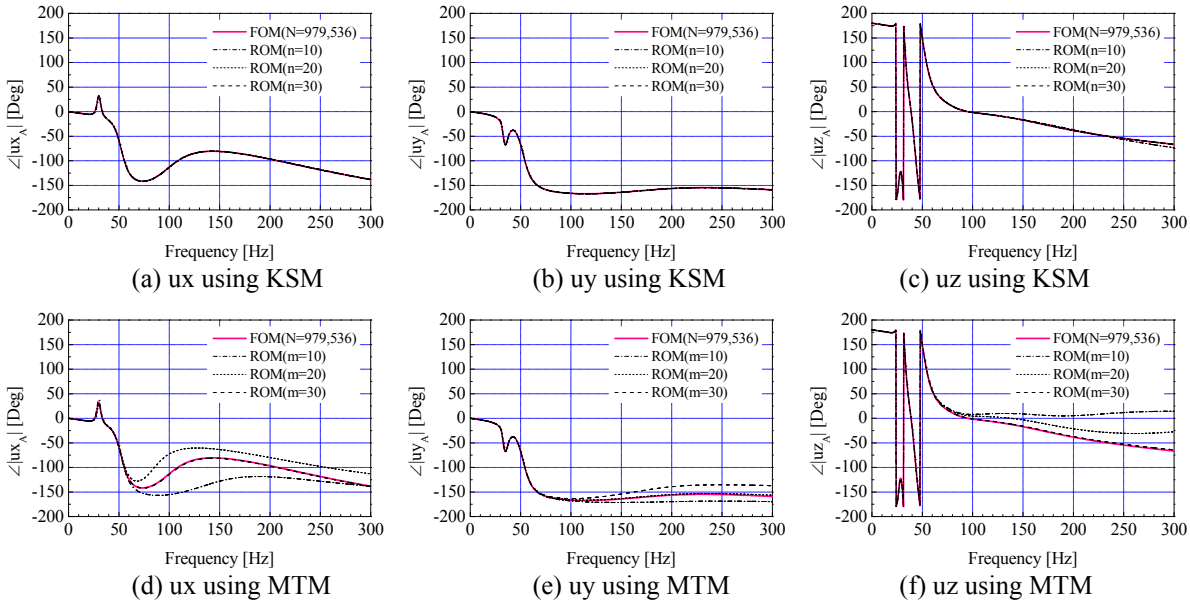
모든 파트의 물성치는 E=200 GPa, ρ=7850 kg/m^3, ν=0.3로 가정하였다. 주파수응답해석에서 관심주파수



(a) ux using KSM (b) uy using KSM (c) uz using KSM

(d) ux using MTM (e) uy using MTM (f) uz using MTM

Fig. 2 Amplitudes of frequency responses using KSM and MTM



(a) ux using KSM (b) uy using KSM (c) uz using KSM

(d) ux using MTM (e) uy using MTM (f) uz using MTM

Fig. 3 Phases of frequency responses using KSM and MTM

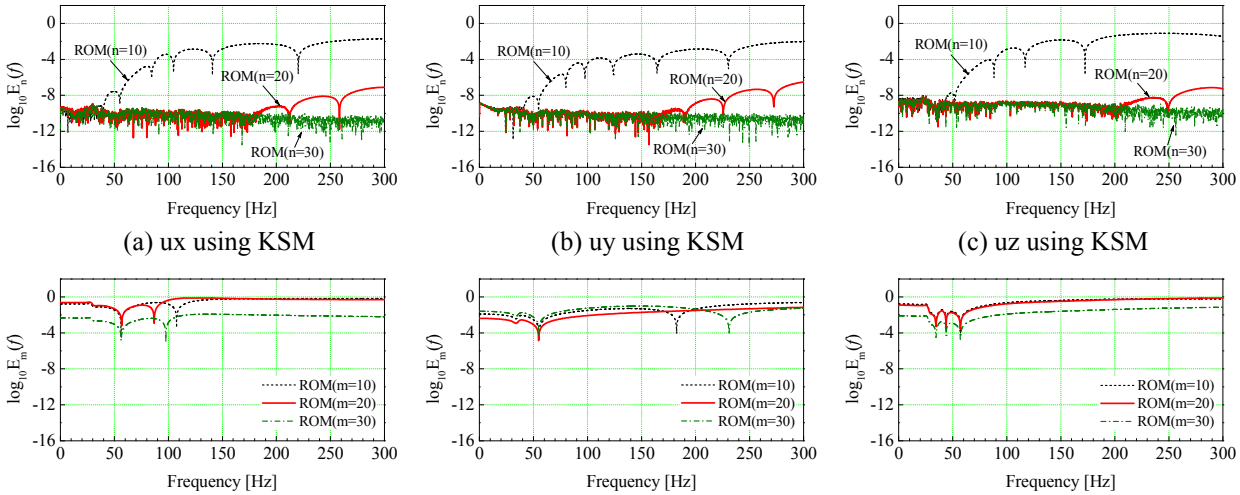
영역은 0~300 Hz이며, 0.2 Hz 간격으로 계산된다. 감쇠는 ζ=0.02에 해당하는 Rayleigh 감쇠로 가정하였으며 α=1.1 s^{-1} 및 β=7.9×10^{-9} s가 사용되었으며, 이 값은 ω_1=31.1 Hz, ω_2=44.6 Hz를 이용하여 아래의 관계로 계산되었다.[16]

$$\alpha = 2\zeta\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2} \qquad \beta = \frac{2\zeta}{\omega_1+\omega_2} \tag{12}$$

3.2 주파수응답해석 결과 비교

먼저 초기모델(full-order model, FOM)과 축소차수에 따른 축소모델(reduced-order model, ROM)에 대한 주파수응답의 진폭과 위상을 비교하였다(Fig. 2 및 3 참고). 지면상 출력점 A에 대한 x, y, z방향 응답을 고려한다. 그래프에서 굵은 실선과 점선은 각각 FOM과 ROM의 응답을 나타내며, KSM 및 MTM의 축소모델의 차수를 각각 n과 m으로 표시하였다. 고려한 축소모델의 차수는 10, 20 및 30으로 초기모델의 자유도(N=979,536)에 비해 매우 작은 차수이다.

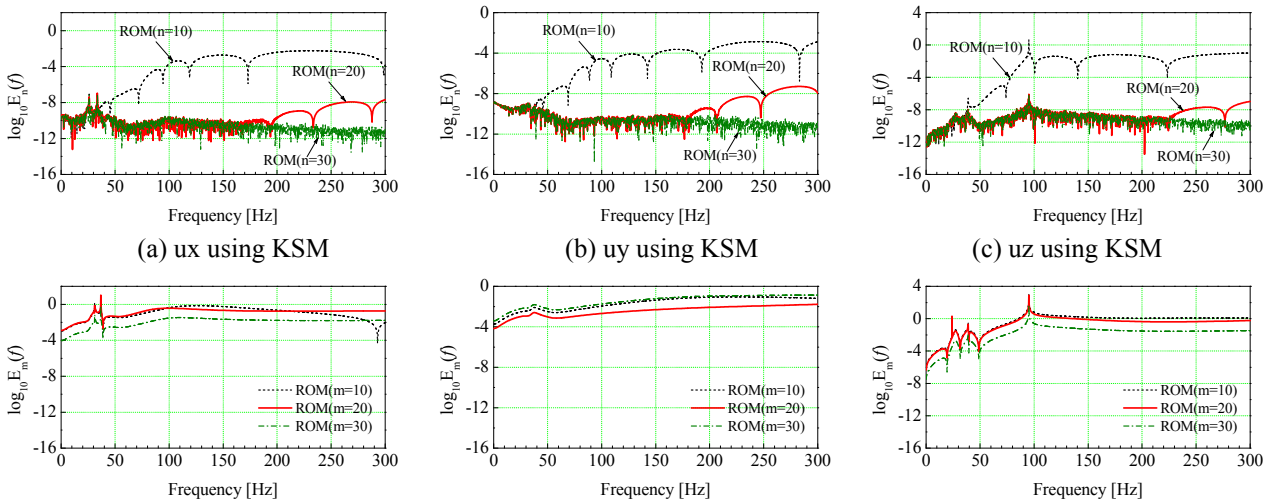
KSM의 경우, 진폭과 위상 결과 모두 FOM의 응답과 고려된 모든 축소차수의 ROM의 응답이 거의 일치하여 그래프 상에서 차이를 분별할 수



(a) ux using KSM (b) uy using KSM (c) uz using KSM

(d) ux using MTM (e) uy using MTM (f) uz using MTM

Fig. 4 Relative errors for amplitude in the frequency range of interest



(a) ux using KSM (b) uy using KSM (c) uz using KSM

(d) ux using MTM (e) uy using MTM (f) uz using MTM

Fig. 5 Relative errors of phase in the frequency range of interest

없었다. 가장 낮은 차수인 10차 ROM의 응답 또한 FOM의 응답을 매우 잘 근사하는 것으로 나타났다. 반면, MTM은 x방향 진폭 결과에서 10차 및 20차 ROM의 응답이 FOM의 응답을 정확히 근사하지 못하였다. 위상 결과에서는 x, y, z방향 모두 10차 및 20차 ROM의 응답이 FOM의 응답을 정확히 근사하지 못하였으며, y방향의 경우에는 30차 ROM에서도 위상의 차이가 발생하였다. 주파수응답 결과로 두 방법의 주파수응답에 대한 정확도를 비교했을 때, KSM의 정확도가 더 우수한 것을 알 수 있다.

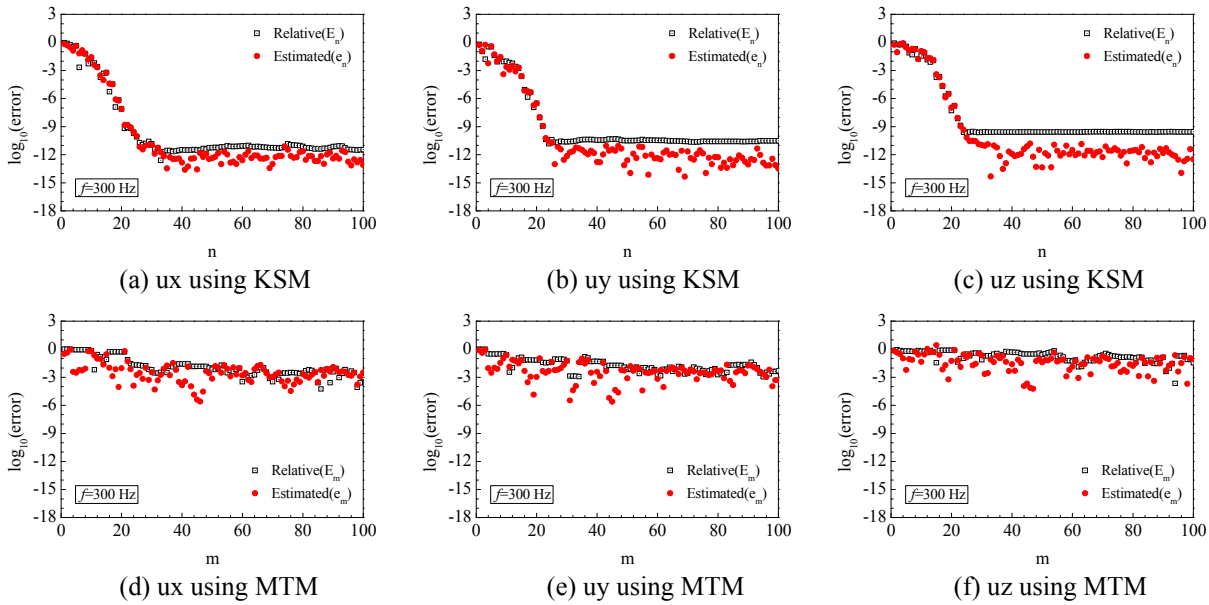
3.3 축소모델에 따른 상대오차 비교

관심주파수 영역에서 축소모델간의 수치적 정확도를 정량적으로 비교하기 위하여 FOM에 대한 ROM의 상대오차 그래프를 나타내었다(Fig. 4~5 참고). FOM과 k차 ROM의 상대오차 $E_k(f)$는 아래와 같이 정의된다.[1~3]

$$E_k(f) = \frac{\left\| \hat{H}_k(f) - H(f) \right\|}{\left\| H(f) \right\|} \tag{13}$$

여기서 $H(f)$와 $\hat{H}_k(f)$는 각각 관심주파수 f Hz에서 FOM과 k차 ROM으로 계산된 주파수응답이다.

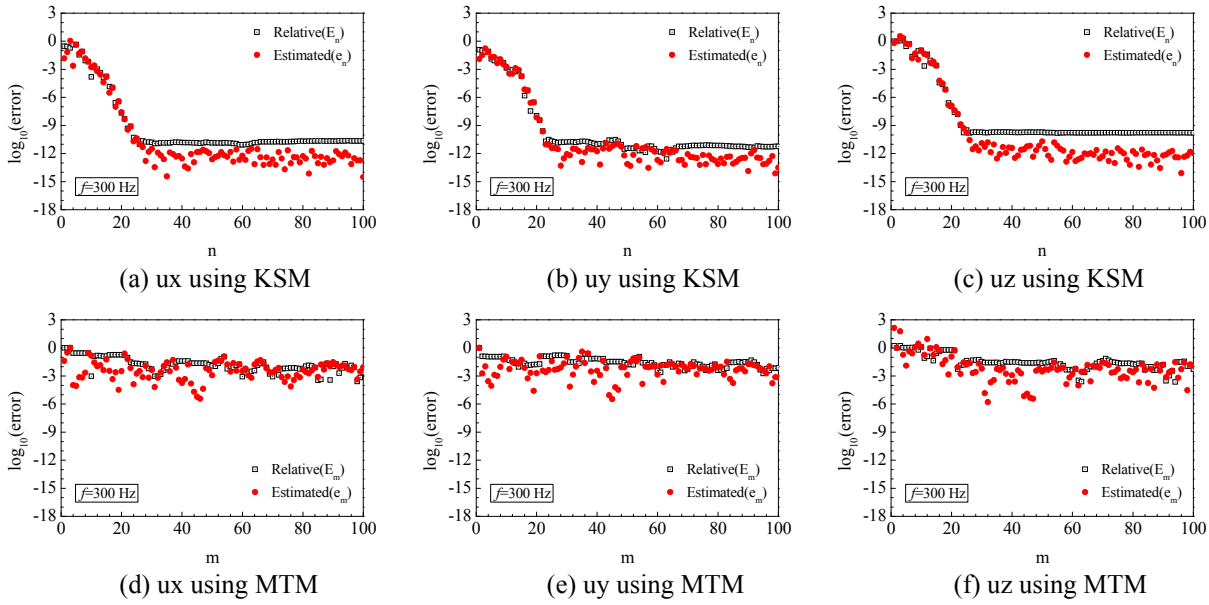
KSM은 축소차수가 증가될수록 더 높은 관심주파수 영역까지 상대오차가 감소하여 수렴하는 모멘트일치(moment-matching) 특징을 확인할 수 있었다. 즉, KSM의 경우 관심주파수 영역이 전개점(현재의 경우, s_0=0 Hz)으로부터 멀어지게



(a) ux using KSM (b) uy using KSM (c) uz using KSM

(d) ux using MTM (e) uy using MTM (f) uz using MTM

Fig. 6 Comparison between E(*f*) and e(*f*) for amplitude



(a) ux using KSM (b) uy using KSM (c) uz using KSM

(d) ux using MTM (e) uy using MTM (f) uz using MTM

Fig. 7 Comparison between E(*f*) and e(*f*) for phase

될수록 오차가 커지는 모멘트일치 특징을 가지기 때문에 축소차수를 증가시키면 관심주파수가 전개점에서 멀어지더라도 정확도가 높은 결과를 얻을 수 있다는 장점이 있다. 실제로 Fig. 4 및 5의 KSM의 결과로부터 10차 ROM의 경우, 오차가 약 40 Hz부터 커지며 20차 ROM의 경우는 전개점에서 더 멀어진 약 190 Hz 부근에서 오차가 커지기 시작한다. 30차 ROM의 경우, 진폭은 관심주파수 전체 영역에서 10^{-12} ~ 10^{-8} 정도의 상대오차를 가지는 결과를 보인다.

MTM의 경우, 축소차수를 증가시키더라도 KSM과 같이 오차가 감소하는 경향을 보이지 않는다. 이것은 축소차수에 따른 축소모델의 정확도는 추가되는 변환행렬의 열벡터의 기여도에 따라 결정되기 때문에 축소차수를 증가시켜 변환행렬에 새로운 고유벡터가 추가되더라도 추가된 고유벡터들이 그 응답에 기여하는 정도가 작다면 더 정확한 결과를 기대할 수 없기 때문이다. 따라서, MTM의 경우는 축소차수를 증가시키더라도 KSM과 같이 상대오차가 효과적으로 감소하지 않은 것으로 판단된다. MTM의 경우, 30차 ROM의 진폭의 상대오차는 10^{-4}~10^{-1}의 크기를 가지며, 이는 앞에서 언급

Table 1 Comparison of computation time for frequency response analysis

Computation time (s)	Full ANSYS model	Reduced model					
	N=979,536	n=10	n=20	n=30	m=10	m=20	m=30
Generating FOM	109	-	-	-	-	-	-
Generating ROM	-	195.5	223.4	228	232	300.1	319.9
Calculating FRF	189,307	4.7	4.8	5.2	4.7	4.8	5.2
Saving Results	5	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8
Total Time	189,421	205.0	233.0	238.0	241.5	309.7	329.9

한 KSM의 상대오차보다 큰 값이다.

또한 수치적 정확도의 비교 측면 외에 특정한 관심주파수에서 축소차수에 따른 축소모델의 상대오차의 거동을 확인하고 이들의 수렴 거동을 확인하였다. 이 결과를 아래와 같이 정의되는 오차수렴지표(error convergence indicator)[3,10] $e_k(f)$와 함께 비교하였다.

$$e_k(f) = \frac{\left\| \hat{H}_k(f) - \hat{H}_{k+1}(f) \right\|}{\left\| \hat{H}_{k+1}(f) \right\|} \tag{14}$$

여기서 $\hat{H}_k(f)$와 $\hat{H}_{k+1}(f)$는 각각 k차와 k+1차 ROM으로 계산된 주파수응답이다.

Fig. 6 및 7에 최대관심주파수 f=300 Hz에서의 주파수응답에 대한 상대오차와 오차수렴지표를 축소차수 100차까지 도시하였다. 그래프에서 x축은 ROM의 축소차수이며, y축은 각 축소차수에 대한 상대오차 값이다. 상대오차는 Relative(E_k)로, 오차수렴지표는 Estimated(e_k)로 표시하였다. KSM으로 계산한 진폭의 경우, 상대오차는 축소차수가 30차 이상이 되면 10^{-12}~10^{-9} 내의 일정한 값으로 수렴하였다. 반면에 MTM은 축소차수가 증가함에 따라 상대오차가 감소하지만 KSM과 같은 상대오차의 수렴특성을 확인할 수는 없었다. 전반적으로 KSM이 MTM에 비해 상당히 작은 상대오차 값을 갖는 것을 알 수 있다.

한편 오차수렴지표는 KSM의 경우가 MTM의 경우보다 상대오차와 더 유사한 수렴 거동을 보였다. 특히 KSM의 경우 상대오차와 오차수렴지표의 값이 감소하는 경향은 거의 일치하며 오차수렴지표는 수렴한 상대오차보다 항상 작은 값을 가졌다. 이러한 오차수렴지표의 특징으로부터 KSM의 경우에 사용자가 지정한 상대오차값(ε)을 만족하는 최소축소차수(n_{min})의 자동적인 결정이 다음과 같이 가능할 것으로 판단된다.[2, 10]

$$n_{min} = \{ n \mid e_n(f) \le \varepsilon \quad \varepsilon\text{:small value} \} \tag{15}$$

그러나, MTM의 경우는 오차수렴지표를 통한 최소축소차수의 자동적인 결정은 앞서 언급되었던 이유와 같이 불가능할 것으로 판단된다.

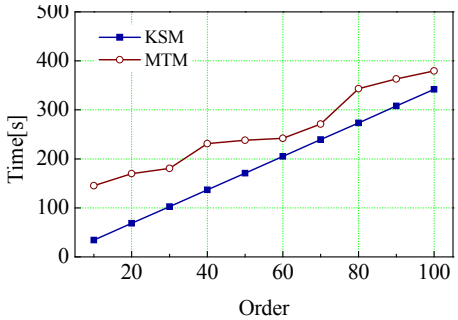


Fig. 8 Comparison of computation time for projection matrices according to reduced order

3.4 축소차수에 따른 변환행렬 생성시간 비교

수치계산의 효율성 비교를 위하여 축소차수에 따른 두 축소방법에 요구되는 변환행렬 생성시간을 Fig. 8에 나타내었다. 변환행렬의 축소차수는 10에서 100차까지 10차씩 증가시켜 계산하였다. KSM의 경우는 ANSYS APDL의 솔버(solver)를 사용하였으며 MTM의 경우는 Lanczos 고유치 솔버를 사용하였다. KSM의 경우는 축소차수가 증가함에 따라서 변환행렬 계산시간이 거의 선형적으로 증가하였으며, 전반적으로 MTM에 비하여 더 적은 계산시간이 필요하였다. 이는 일반적으로 고유벡터가 Krylov 벡터보다 더 많은 계산시간이 필요하다는 사실과 일치한다. 결론적으로 KSM을 통한 주파수응답해석이 MTM보다 더 효율적인 방법임을 알 수 있다.

3.5 축소차수에 따른 주파수응답해석시간 비교

마지막으로 FOM과 10, 20 및 30차 ROM에 대한 주파수응답해석에 소요되는 총 계산시간을 비교하였다(Table 1 참조). FOM의 경우는 약 52시간 이상이 소요된 반면에 KSM과 MTM으로 30차 축소모델을 사용하는 경우에 KSM과 MTM은 각각 약 4분, 6분 이내에 계산을 수행할 수 있었다. 두 축소방법 모두가 FOM에 비하여 매우 효율적이지만

KSM이 MTM보다 더 효율적인 방법임을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 대표적 투영기반 모델차수축소법인 KSM과 MTM의 주파수응답의 수치적 정확도 및 효율성 비교를 수행하였다. 수치적 정확도는 두 방법에 대하여 주파수응답해석 결과, 축소차수 및 관심주파수에 따른 상대오차를 비교하여 정해진 오차범위에서 자동적인 축소차수의 결정이 가능한지 확인하였다. 수치계산의 효율성은 축소차수에 따른 변환행렬 생성시간과 주파수응답해석 총 소요시간을 비교하였다. 이를 자동차 현가장치 유한요소모델에 적용하여 다음과 같은 구체적인 결론을 도출하였다.

(1) KSM의 경우, 10차 ROM으로 계산한 진폭과 위상 결과 모두 FOM(N= 979,536)의 응답과 거의 일치하여 그래프 상에서 차이를 분별할 수 없었다. MTM의 경우는 진폭과 위상 결과에서 20차 이하의 ROM의 응답이 FOM의 응답을 정확하게 근사하지 못하여 KSM의 수치적 정확도가 더 높은 것으로 나타났다.

(2) 축소차수에 따른 상대오차를 비교한 결과에서도 KSM의 정확도가 같은 축소차수의 MTM보다 더 높은 것을 확인하였다. KSM의 상대오차는 20차 이후에 수렴하여 진폭의 경우에 관심주파수 전체 영역에서 $10^{-12} \sim 10^{-8}$ 정도의 상대오차를 가지는 결과를 보이는 반면 MTM은 KSM과 같은 오차의 수렴 거동을 확인할 수 없었다. MTM의 경우, 축소차수를 증가시키더라도 KSM과 같은 수렴성을 가지며 오차가 감소하는 경향을 보이지 않는다.

(3) KSM의 경우, 축소차수의 증가에 따른 상대오차와 오차수렴지표의 값과 수렴 거동이 유사함으로 사용자가 지정한 상대오차값을 만족하는 최소축소차수(n_{min})를 자동적으로 결정할 수 있을 것으로 판단된다. 그러나, MTM의 경우는 오차수렴지표의 불규칙한 수렴 거동으로 이를 통한 최소축소차수의 자동적인 결정은 불가능할 것으로 판단된다.

(4) 축소차수에 따른 변환행렬 생성시간을 비교한 결과, KSM의 경우는 축소차수가 증가함에 따라서 변환행렬 계산시간이 거의 선형적으로 증가하였으며 전반적으로 MTM에 비하여 더 적은 계산시간이 필요하였다.

(5) 주파수응답의 총 해석 시간을 비교한 결과, FOM의 경우는 약 52시간 이상이 소요된 반면에 KSM과 MTM으로 30차 축소모델을 사용하는 경우에 KSM과 MTM은 각각 약 4분, 6분 이내에 계산을 수행할 수 있었다.

(6) 두 축소방법의 수치적 정확도 및 효율성 측면에서 고려할 때, KSM이 MTM보다 주파수응답해석에 더욱 우수한 투영기반 모델차수축소법으로 판단된다.

후 기

이 논문은 2013학년도 안동대학교 학술연구조성비에 의하여 연구 되었음.

참고문헌
(References)

(1) Han, J. S., 2012, "Efficient Frequency Response and Its Direct Sensitivity Analysis for Large-size Finite Element Models using Krylov Subspace-based Model order reduction," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 4, pp. 1115~1126.

(2) Han, J. S. and Ko, J. H., 2009, "Frequency Response Analysis of Array-Type MEMS Resonators by Model Order Reduction Using Krylov Subspace Method," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 33, No. 9, pp. 878~885.

(3) Han, J. S., 2007, "Eigenvalue and Frequency Response Analyses of a Hard Disk Drive Actuator Using Reduced Finite Element Models," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 31, No. 5, pp. 541~549.

(4) Li, L., Hu, Y. J. and Wang, X. L., 2014, "Eliminating the Modal Truncation Problem Encountered in Frequency Responses of Viscoelastic Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp. 1182~1192.

(5) Antoulas, A. C, 2006, "Approximation of Large-scale Dynamical Systems," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 6, pp. 376~377.

(6) Projection Based MOR, 2013, Wikipedia, http://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/Projection_based_MOR.

(7) Freund, R. W., 2000, "Krylov-Subspace Methods for Reduced-Order Modeling in Circuit Simulation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 123, pp. 395~421.

(8) Han, J. S., 2013, "Calculation of Design Sensitivity for Large-size Transient Dynamic Problems using Krylov Subspace-based Model Order Reduction," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 27, No. 9, pp. 2789~2800.

(9) Yang, J. Y. and Che, C. Y., 2004, "Extraction of Heat-transfer Macromodels for MEMS Devices,"

Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 14, pp. 587~596.

(10) Han, J. S., 2011, "Efficient Modal Analysis of Prestressed Structures via Model Order Reduction," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 35, No. 10, pp. 1211~1222.

(11) Rudnyi, E. and Korvink, J., 2006, "Model Order Reduction for Large Scale Engineering Models Developed in ANSYS," *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3732, pp. 349~356.

(12) Zhang, X. P. and Kang, Z., 2013, "Topology Optimization of Damping Layers for Minimizing Sound Radiation of Shell Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp. 2500~2519.

(13) Gugercin, S. and Antoulas, A. C, 2004, "A Survey of Model Reduction by Balanced Truncation and Some New Results," *Int. J. Control*, Vol. 77, No. 8, 748~766.

(14) Azam, S. E. and Mariani, S., 2013, "Investigation of Computational and Accuracy Issues in POD-Based Reduced Order Modeling of Dynamic Structural Systems," *Engineering Structures*, Vol. 54, 150~167.

(15) Qu, Z., 2004, "Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis," Springer.

(16) ANSYS, 2012, ANSYS Mechanical APDL Theory Reference 14.5, SAS IP, Inc.