한국학교수학회논문집 제 17 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 17, Number 1, 45-71, March 2014

그래핑 계산기를 활용한 이차곡선에서 예비교사들의 수학적, 인지적, 교수적 충실도에 관한 연구[1)]

고상숙[2)]

이차곡선에 대해 고교과정에서는 종합적인 개념습득이 이루어질 기회가 부족하고 대학과정은 고등수학적 접근으로 진행되어 여전히 개념습득의 어려움을 갖는다는 점을 인식하고 예비교사들의 문제제기에 의한 수학적 사고확장을 돕고자 그래핑 계산기를 활용하여 수학적, 인지적, 교수적 충실도를 조사하였다. 인지적 충실도에서는 세 가지 수학적 속성의 문제제기가 이루어졌으며 이 때 수학적 충실도가 인지적 충실도와 순환적 연관성을 보였으며 교수적 충실도는 인지적 충실도를 더욱 활성화시키는 것으로 나타났다.

주요용어 : 수학적 충실도, 인지적 충실도, 교수적 충실도, 예비교사, 그래핑 계산기

I. 서론

현재 우리나라 고등학교 수학 수업은 학생들 스스로 창의적 활동을 기반으로 하여 탐구하고 사고하는 시간보다, 설명을 듣고 문제를 반복적으로 푸는 것에 더 많은 시간을 할애한다. 이러한 반복적 학습은 학생 스스로 사고하는 방식을 벗어나 수학적 개념을 깊이 이해하고 이를 기반으로 문제를 해결하는 수학이란 학습의 목적달성을 어렵게 한다(Skemp, 1978; 박희정 외, 2011). 예를 들어 고등학교 이차곡선단원에서 이차곡선의 작도를 통한 정의적 접근과 더불어 이차곡선의 일반식을 활용한 통합적 접근은 실제 수업 상황에서 이루어지지 않고 각 이차곡선에 대한 정의에 따른 표준식으로 서로 다른 이차곡선임을 알고 각 소단원별로 타원과 쌍곡선에 대한 정의와 일반식, 그리고 접선에 초점을 두고 있다(이승훈, 조완영, 2013). 난이도 하향조정과 수업량 감소에 의한 단편적인 지식습득에 머무르는 이러한 문제점에 대해 몇 몇 연구가 대안으로 공학도구의 활용을 논의하고 있으나 현장에 적용되는 경우는 그리 쉽지 않다. 이렇게 단편적인 개념만을 다루다 사범대학을 진학한 예비교사들에게는 고등수학인 선형대수 강좌를 통해 이차곡선은 이차방정식의 일반식에 대한 성질로서만 다루게 되고 고등학교 내용과 연결할 기회는 주어지지 않게 되어 결국 앞으로 교사가 되어

---

1) 본 연구는 2013년 대학교내연구비에 의해 지원되었음.
2) 단국대학교 (sangch@dankook.ac.kr)

가르쳐야할 내용에 대해 심도있게 접근할 기회를 놓치게 된다.

한편, 1980년 8월에 NCTM에서 발표한 '학교수학을 위한 8가지 권고사항'에 컴퓨터와 계산기를 이용한 수학교육이 명시적으로 제안되었고, 그 이후 출간된 규준집인 NCTM(1989, 2000)에서는 정보화 사회에서 수학적 소양의 중요성이 더욱 증대되었음을 지적하면서 문제해결능력을 강조하고, 수학문제를 탐구하는 과정에서 계산기와 컴퓨터를 적절히 활용하도록 강조하였다. 또한 Stohl와 Harper (2005)는 수학교육에서 사용되는 공학적 유용성에 관하여 제시하며 교실수업에서 사용될 수 있는 프로그램에 관하여 설명하며 현장에 도입될 수 있도록 시도하였다. 이와 발맞춰 우리나라 제 7차 교육과정(교육인적자원부, 1997)에서 공학적 도구를 활용한 교수·학습이 강조된 이후, 현장에서 활용되려는 시도와 관심은 증대되어왔다. 여기서 공학도구는 수업을 돕는 도구로써 활용되어야 하는데 이에 교수자는 적절한 도구의 활용법을 숙지하고 있어야함을 전제로 한다. 그러기 위해선 예비교사 시절부터 공학용 도구를 활용한 교육을 충분히 받을 기회가 필요하다. 이에 앞으로 교사가 될 예비교사를 대상으로 공학용 도구를 활용하는 방법과 충실도에 관하여 연구하여 공학용 도구의 사용을 활성화 할 수 있도록 할 것이다.

본 연구는 예비교사들이 이차곡선에서 그래핑 계산기를 활용한 문제제기 활동에서 수학적, 인지적, 교수적 충실도는 어떻게 나타나는지를 살펴봄으로써 이차곡선에 대한 이들의 수학적 사고과정을 조사하고자 하였다. 예비교사들에게 이런 기회는 공학도구의 활용에 의한 학습 효과를 스스로 경험하게 되고 이러한 과정을 통해 수학교사로서 지녀야 하는 교사의 전문성 신장에 도움을 줄 것으로 기대된다.

II. 이론적 배경

1. 문제제기

본 연구에서 예비교사를 대상으로 한 그래핑 계산기를 활용한 충실도를 알아보기 위하여, 스스로 문제를 만들고 탐구하는 방법인 문제제기 방법으로 수업을 계획하였다. Brown과 Walter(1993)는 문제제기(problem posing)에 대하여 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제로 재구성하는 것과, 문제를 해결하며 다른 문제를 만들고 다시 만든 문제를 해결하는 두 가지 방식을 제시하였다. 문제를 제기함으로써 '다른 사람들'로부터 '자기 자신'에게로 문제의 통제권을 이동할 수 있으며, 문제를 통해 얻을 수 있는 여러 가지 폭 넓은 아이디어를 제시하려는 것이다. 문제제기(problem posing)에 관심을 두는 이유는 문제제기를 통해 학생들은 교과서와 같은 표준적인 주제를 좀 더 날카로운 시각으로 볼 수 있고, 또 그 주제에 대해 더 깊은 이해를 할 수 있기 때문이다. 문제제기는 또한 학교 교육 과정뿐만 아니라 학교 밖의 분야에서 주어지는 어떠한 주제에 대해서도 새로운 아이디어의 창출을 가능하게 하기 때문이다. 또한 Silver(1993)는 문제 생성(problem generation)라는 단어를 제시하며 수학

적 문제를 풀며 문제를 바꾸거나, 그 문제를 이용하여 새로운 문제를 만드는 활동이라 하였다. 이외에도 Kilpatrick(1987)은 문제만들기의 중요성을 강조하며 효과적 문제 만들기를 지도하기 위한 여러 가지 방안을 고찰하였다. 정은실(1993)은 수학을 하는 것은 문제를 해결하는 것이므로 문제해결 기술을 가르치는 것은 교사의 중요한 의무이고 그 첫 번째 단계가 문제제기라고 언급하였다. 또한 문제를 심도있게 이해하려면 그것을 다른 관점으로도 볼 수 있어야 가능하다. 다양한 관점을 시도해보는 것은 문제해결의 반성 과정 즉, 메타 인지적 과정이 필요하므로 문제제기는 또한 문제해결의 반성단계와 밀접한 관련이 있다(Choi, 1996). 여기에 최상기와 목연하 (2011)은 가설의 제시(문제만들기)와 제시된 미해결의 문제를 풀어나가는 과정은 자연스러운 것이며 학생이 풀고 있는 문제는 학생스스로 해결해야할 미해결 문제라고 하였는데 이러한 미해결 문제를 이해하는 과정에서 조건의 변화나 다른 방식으로 서술하는 문제만들기가 학생들의 사고에서도 활발하게 일어나야한다고 하였다.

본 연구에서 사용되는 '문제제기'란 기존의 문제를 변형시켜 새롭게 생성된 문제를 만들어내는 과정을 의미하며, 문제제기방법으로 Brown과 Walter가 제시한 문제제기 활동을 사용하였다. Brown과 Walter(1993)는 문제제기 활동의 수준을 다음과 같이 구체적으로 안내하였다. 출발점을 선택하지 않고는 이 전략을 구사할 수 없으므로 이 출발점을 이 전략의 수준 0이라 한다. 다음 단계(수준Ⅰ)는 몇 개의 속성을 나열하여 속성 목록을 만드는 것이다. 그런 후에 다음과 같은 질문을 한다: "만약 각 속성이 그렇지 않다면 어떻게 될까? 그러면 어떤 일이 생길까?"(수준Ⅱ). 그런 다음 이들 변형 속성들에 대해 다시 질문을 던졌다(수준Ⅲ). 이렇게 던진 질문 중 몇 개를 선택해서 분석하고 답을 했는데, 이것이 전략의 수준Ⅳ이다. 이 문제제기 전략의 주요 단계를 몇 개의 주요 단어로 요약하면 다음과 같다.

수준 0 출발점 선택하기
수준 Ⅰ 속성 목록 만들기
수준 Ⅱ "만약 ~이 아니라면?": 변형 속성 만들기
수준 Ⅲ 변형 속성에 대해 질문하기 또는 문제제기하기
수준 Ⅳ 질문이나 문제 분석하기

2. 공학도구사용에서의 충실도

기술공학의 활용이 학교현장에서 다뤄질 수학내용의 변화에 영향을 미칠 것이며 학교는 학생들이 그들의 문제해결과정에서 기술공학을 잘 사용할 수 있도록 도와야 한다(NCTM, 1989, pp. 7-9). 또한, NCTM(2000)에서 학교수학을 위한 6가지 원리중 하나로 공학의 원리를 제시함으로써 공학도구가 수학을 가르치고 배우는데 필수적이며 수학지도 내용에 영향을 미치고 학생들의 학습촉진에도 기여한다고 명시하고 있다. 이는 학생들의 문제해결능력에 초점을 두어 교수할 때 공학도구의 사용이 긍정적인 효과를 미친다는 것을 의미한다. 여기

서 공학도구라 함은, 계산기, 컴퓨터 및 통신장치를 포함한 모든 IT기기들과 이를 수학적으로 활용가능하게 해주는 소프트웨어를 의미한다(NCTM, 2005). 그러나 이러한 공학도구의 사용을 권장할 때 어느 수학적 지식에 어떤 공학도구를 사용하는 것이 적절한지에 관한 평가기준이 명확하지 않아 적절한 공학도구의 활용도가 낮은 것이 현실이다. 이에 공학도구의 적절성을 평가할 기준인 공학도구의 충실도(fidelity)를 조사해봄으로써 학교현장의 공학도구의 활용을 안내할 수 있다.

최근 국내에서 이루어진 공학도구에 관한 연구는 도구발생에 대해 Trouche(2004)와 한세호와 장경윤(2009)가 시도되었던 반면에 충실도에 관한 연구는 아직 시도된 바 없다. 국외연구에서 충실도는 Dick(2007)에 의하여 발표된 제목, "Keeping The Faith"에서 논의되면서 충실도란 수학교육에서 설계된 도구가 반드시 지켜야할 기본적인 원칙이라고 소개하였다. 같은 해 Dick이 함께 참여한 Zbiek et al.(2007)를 통해 수학교육에서의 공학도구 연구에서 언급되며 다른 학자들에게 영감을 주었다. 이후 지속적인 연구로 공학도구사용에서 지켜야 할 원칙으로 언급되며 Bos에 의하여 후속연구가 진행되어 공학도구 관련 학술자료에 언급되어지고 있다. Bos (2008)는 고등학교 1학년을 대상으로 이차함수의 수업에서 일반적인 수업보다 개발된 소프트웨어인 "Interactive Math Object (IMO)"를 사용하여 수업하는 것이 통계적으로 더 유의미하다는 결과를 제시했으며 Bos(2009)에서 <표 II-1>과 같은 충실도의 평가기준에 관하여 서술하였다.

<표 II-1> 충실도 기준 (p. 113)

낮은 충실도	중간 충실도	높은 충실도
표현에 오해가 있다.	표현이 일부 부족하나 분명하며 혼동하지 않는다.	여러 가지 표현이 정확하다.
표현이 정적이다.	정적이지 않은 다양한 표현법에 대한 이해가 필요하다.	다양한 표현을 쉽게 조작한다.
표현이 인위적이고 개념의 개발이 부족하다.	일부 표현은 논리적이나 그 외 표현에서 혼동을 겪는다.	직관적인 표현을 사용한다.
개념간의 연결과 전환의 이해가 부족하다.	개념의 전환에 시행착오를 겪고 있으며 추가적인 지도 없이는 다소 혼란스러워한다.	개념의 전환이 논리적으로 일어나며 순차적이다.
하나의 정답을 도출한다.	여러 가지 표현을 사용하여 최종 결과를 도출한다.	다양한 해석을 도출한다.
모호한 추측수준이며 측정하기 어렵다.	새로운 패턴이 나타나나 측정가능한 수준은 아니다.	문제제기, 시도가 측정가능하며 용이하다.

공학적 측면에서의 충실도의 본질은 수학적 문제를 해결하는 과정에서 공학도구가 수학적

이해에 영향을 미치는 방법에 따라 고려된다. 수학에 사용되는 공학도구는 수학적 충실도와 인지적 충실도, 그리고 교수적 충실도의 정도에 따라 다르게 구분된다. 주어진 문제를 수학적 표현으로 효과적으로 나타내기 위해서는 공학적 도구의 표현이 수학적 속성에 충실해야만 한다. Dick(2007)에 의하면 "효과적인 수학도구가 되기 위해선, 소프트웨어의 제한점은 수학 내용에 영향을 미치지 않아야하며, 도구의 움직임에 의하여 나타나는 움직임은 수학적 원리에 대한 개념의 이해를 돕도록 해야 한다"(p. 334)라고 하였다.

"수학적 충실도란, 수학적 정확성에 대한 개체(도구)의 적합성을 의미한다"(Zbiek, 외, 2007, p. 1172). 즉, 사용하는 도구가 수학적 표현을 하고 있는 것이 맞는가에 대한 고찰이다. 그래프의 표현에 대한 수학적 충실도를 예를 들면, 다항식의 함수를 입력하여 그래핑 계산기를 생각해보도록 하자. y축이나 x축에 평행한 수직선을 수직 점근선으로 착각하는 학생의 경우, 학생의 수학적 이해도가 낮다기보다 이를 출력한 그래핑 계산기의 표현이 미흡한 경우일 수 있다. 이 때 해당 도구의 수학적 충실도를 미리 조사하고 숙지하여 학습의 질을 높일 수 있다. 기본적으로 수학적 목표로 제작되어진 공학도구들의 수학적 충실도가 수학적 목표로 제작되어지지 않은 공학도구의 수학적 충실도보다 높은 것은 자명하다. 다만 수학적 목표로 제작된 공학도구들 중에서도, 해결하려는 문제에 더 '적합한' 공학도구가 수학적 충실도가 더 높다는 것이다. 때문에 공학도구가 기술적으로 얼마나 더 적합하게 제작되어질 수 있는가하는 점은 수학적 충실도에서 지속적으로 관심을 가지는 영역이다 (Bos, 2008).

"인지적 충실도란, 도구를 작동시켰을 때 개념이해가 얼마나 잘 인식되는지에 대한 여부를 말한다"(Bos, 2009, p. 109). 이는 도구가 작동될 때 개념에 대한 이해와 깊이를 더해주는 정도에 대한 척도이다. 인지적 충실도는 학생 내면에서만 가능했던 수학적 패턴이나 개발을 확인하여 하나로 연결할 수 있도록 해준다. 공학도구의 사용을 통하여, 이러한 관계는 현실의 역동적 움직임으로 표현된다. 매개변수의 변경, 그래프의 평행이동에 의한 함수 값의 결과, 증가, 감소의 일련의 값을 표현하는 엑셀표의 도움으로 학생들은 함수의 계수와 함수와의 관계에 대하여 탐구하거나 관찰할 수 있게 된다. 이러한 탐구 끝에 학생들은 결국 변수나 그래프에 관한 심도있는 이해가 진행되며 그래프를 보는 시각효과에서 인지적으로 예측가능한 수준에 이르게 된다(Zbiek, 외 3명, 2007).

Moyer-Packenham, Salkind, & Bolyard(2008)의 연구에 의하면 K-2~8 까지의 학생들을 대상으로 가상수학매체의 수학에서 사용을 충실도 관점에서 연구한 결과, 각 대상 학년마다 선호하는 도구와 방법에 따라 적절한 충실도의 도구가 다르게 확인되었다. 이는 도구를 사용하는 주체가 가지는 수학적 지식과 도구사용 능력에 따른 충실도가 상이할 수 있다는 것이다. 즉 예비교사에게 충실도가 높게 나타났다고 하여 이것이 중, 고등학교에 동일한 주제로 공학도구를 사용하였을 때 동일한 정도의 충실도가 나타나지 않을 수 있다. 그러므로 다양한 공학도구들이 해당 수학교육과정에 적합한지는 지속적인 연구가 필요하다.

끝으로 "교수적 충실도란, 공학도구가 수학적 목표를 수립하는데 도움을 주는지, 그리고 그 수학적 목표를 해결할 근거를 제공하고 있는지에 대한 여부를 의미한다" (Dick, 2007, p.

336). 교수적 충실도가 높다는 것은 해당 공학도구가 수학적 지식을 적절히 제공하여 학습 목표를 달성하는데 근거가 되어주며, 이후 높아진 이해 수준으로 새로운 목표를 세우는 방법이 된다. 학생이 새로운 학습으로 나아갈 수 있는 경우의 수를 제공하는 것은 수학의 정의적 측면에서 몹시 중요한 일이며 스스로 찾아 스스로 탐구하는 방법을 익히는 데에 긍정적인 효과를 제공 할 수 있는가에 관한 중요한 평가요소가 된다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

본 연구의 목적은 그래핑 계산기를 사용하는 환경에서 충실도에 관해 예비교사가 인식하고 탐구해나가는 과정을 심도 있게 연구하기 위한 정성연구(Qualitative research) 방법을 택하였다(Merriam, 1998). 사례 연구로써 구조화 또는 반구조화된 면담을 통해 주관적, 해석적 인식론에 근거를 두고 연구 참여자인 예비교사의 말이나 글, 행동 등을 수집하기 위해 녹화되었고 매차시마다 수학일지를 본 강좌의 이러닝서비스에 제출하게 하여 이들의 반성적 사고에 의한 내용을 자료수집에 포함하였다. 수집된 자료는 연구자의 현장노트를 바탕으로 중요 대화내용은 전사하며 코드화를 하고, 코드화된 자료를 대상으로 <표 Ⅱ-1>에서 제시한 충실도 기준에 따라 분석이 이루어졌다. 따라서 수학적, 인지적, 그리고 교수적 충실도를 통해 이차곡선에 대한 전체적인 의미와 통합적 이해를 파악하고자 하였다.

1. 사전조사

개개인마다 연장(tool)을 도구(instrument)로 사용하는데 걸리는 시간과 정도가 모두 다르며, 개개인의 배경지식과 경험이 많은 영향을 미칠 것이라 사료된다. 본 연구를 위한 사전조사로써 공학도구에 관한 선행연구(김남희, 2011; 한세호와 장경윤, 2009)를 참고하여 공학도구 사전경험유무, 공학도구 익숙정도, 그리고 인식정도를 조사하였다. 설문결과로는 38명의 예비교사 중 한 명을 제외한 대부분의 예비교사들이 그래핑 계산기를 사용해본 적이 없었다고 답하였다. 응답자 중 56%가 IT기기들을 잘 다루는 편이라 사용에 어려움을 없을 것이라 생각하였고 43%는 계산기는 사용자가 지식이 없어도 사용할 수 있다고 응답하였다. 또한 32%는 수학은 공학도구를 활용하는 것보다 손으로 해결하는 것이 편리할 것이라고 인식하고 있었다. 위 설문결과에 의하면 본 연구에 참여한 예비교사들은 사용해본 경험은 없으나 사용을 시도할 때 공학도구에 그리 낯설어하지 않고 잘 사용할 수 있다고 생각하는 편이며 수학은 지필환경이 적절하다고 보는 시각이 여전히 존재하고 있음을 알 수 있었다. 이 결과를 바탕으로 예비교사의 공학도구의 사용수준의 상하를 고려하여 2인 1조로 고르게 편성하였다.

2. 연구 참여자

본 연구는 경기도에 소재한 D 대학 수학교육과의 '수학교육 테크놀로지' 강좌를 수강한 예비교사를 대상으로 실시하였다. 2013년 2학기에 본 강좌를 수강한 연구 참여자 38명은 2인 1조로 19 개조가 그래핑 계산기를 활용한 수업에 참여하였다.

3. 연구도구

1) 그래핑 계산기 ClassPad 300 PLUS

이차곡선을 교수하는 과정에서 일부 교과서에서만 이차곡선의 통합식인 $ax^2+bxy+cy^2+dx$ $+ey+f=0$ 를 다루고 있으며, 다루고 있는 교과서마저 계수와 그래프와의 상관관계에 취약한 부분이 많다. 이에 학생들이 이차곡선을 학습하는데 있어 이차곡선인 포물선, 타원, 쌍곡선을 각각의 개념으로 따로 학습하고 있는 것이 실정이다. 이에 그래핑 계산기를 사용하면 짧은 시간 내에 이차곡선의 그래프를 그려 계수와 개형간의 상관관계를 살펴볼 수 있고 단순히 개형비교에서 벗어나 함수와 그래프의 다양한 성질을 탐구할 수 있으며 시각화와 공학도구를 활용한 수학적 개념 이해에 도움을 줄 수 있다. 그래핑 계산기 ClassPad 300 PLUS는 컴퓨터 대수 체계(CAS)의 종류에 일부로써 정교한 계산의 신속한 결과 출력뿐 아니라 대수적 기호조작 또한 정확하게 수행하도록 고안된 체계이다. ClassPad 300 PLUS는 한세호, 장경윤(2009)의 연구에서 사용된 ClassPad300의 개정판으로 본 연구에서 사용되는 주요 기능은 다음과 같다.

- 방정식의 풀이
- 문자식의 인수분해와 전개
- 함수의 그래프 그리기
- 기하학적 작도 원리
- 함수 값의 표 정리

2) 수업절차

그래핑 계산기를 활용한 조별 활동은 총 10차시로 문제제기에 의한 이차곡선에 관련된 문제에 대해 그래핑 계산기를 활용하여 다양한 문제해결전략(속성)을 탐구하도록 안내하였다. 각 차시별 교수 내용은 다음과 같다.

<표 III-1> 차시 구성

차시	교수 내용
1차시	그래핑 계산기 다양한 사용법 익히기
2차시	그래핑 계산기를 활용한 이차곡선의 이해 - 포물선, 타원, 쌍곡선
3차시	what if not 전략을 활용한 일반식에 관한 문제제기 1
4차시	what if not 전략을 활용한 일반식에 관한 문제제기 2
5차시	제기된 문제에 대한 탐구 (속성1)
6차시	제기된 문제에 대한 탐구 (속성2)
7차시	제기된 문제에 대한 탐구 (속성3)
8차시	제기된 문제에 대한 탐구 (속성4)

'주어진 것에 도전하기 (what if not)' 전략의 문제제기의 요소들(Brown & Walter, 1983)은 본 연구의 활동지의 주요 요소로 사용되었다.

<표 III-2> 수업요소

단계	what if not 전략의 평가
속성나열	주어진 속성이 해당 대상에 수학적으로 적합한가? 나열한 속성 간 중복되는 개념이 존재하지는 않은가?
~가 아니라면 (what if not)	속성의 부정이 속성의 일부만 부정하고 있지는 않은가? 부정된 속성들 간 중복되는 속성은 없는가?
문제만들기	부정된 속성을 통하여 수학적으로 의미있는 개념의 문제를 제시하는가? 제시된 문제가 다른 속성에서 다시 제시되지는 않는가?
문제분석	주어진 문제를 해결하는 과정에서 일반화 할 수 있는가? 문제분석을 통하여 주어진 문제에서 확장된 수학적 개념을 얻을 수 있는가?

4. 자료수집 및 분석

연구자는 각 충실도에 대한 학생들의 반응을 수집하는 것이 중요한 과정이므로 수업 중에 학생들에 의해 작성된 모든 자료를 수집하였는데 이 중에는 그 차시에 이뤄진 활동내용을 바탕으로 작성한 수학일지[3]를 본 강좌의 이러닝서비스에 업로드하게 하여 늘 학생들 간에

의사소통이 이루어지게 하였다. 여러 충실도 중 특히 수학적 충실도는 계산기 기능에 관련된 것이므로 수업 중에 계산기를 사용하는 학생들의 활동을 관찰하고 이들과 대화내용을 현장노트에 남겨두는 것에 주의를 기울였다. 코드화하는 수학적 충실도는 MF, 인지적 충실도는 CF, 그리고 교수적 충실도는 PF를 주요 코드로 하여 <표 II-1>의 기준에 따라 분류하는 과정을 거쳤다.

IV. 연구결과

연구초기에는 이차곡선의 계수와 그래프 개형을 찾는 과정에서 속성을 나열하는 것에 어려움을 느끼는 학생들이 많았다. 몇몇 학생들은 일반화된 수식의 속성이 아닌 특정 계수를 대입한 식의 속성을 나열하는 등의 문제제기에 어려움을 느꼈으나 차시가 진행되면서 대부분의 조가 탐구할 속성을 제기하여 계산기를 통해 탐구활동에 익숙하여졌다.

1. 수학적 충실도

그래핑 계산기를 활용한 이차곡선의 탐구에 관한 수업에서 관찰된 수학적 충실도는 그래핑 계산기가 이차곡선에 관하여 적절한 수학적 표현을 하고있는가에 관한 내용이다. 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 사용한 기능은 크게 그래프, 대수식, 그리고 표(table) 표현으로 구분되어 분류할 수 있었다.

1) 그래프와 대수식의 표현

이차곡선의 일반식인 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$의 계수와 그래프 개형에 관한 탐구를 진행한 조가 많았기 때문에 가장 많이 사용된 그래핑 계산기의 기능은 그래프를 표현하는 기능이었다. 그래핑 계산기의 그래프 표현에 관하여 학생들이 나타낸 수학적 충실도의 대표적 사례는 다음과 같았다.

> 계산기를 이용해서 그래프가 어떻게 그려지는지 쉽게 알 수 있어서 그래프를 그리는데 걸리는 시간을 절약 할 수 있어서 좋았다. 그러나 계산기를 통해 쉽게 알 수 있어서 직접 좌표를 찍어보며 그려보지 않고, 귀찮아할 수 도 있다 (활2-11)[4].

3) 각 조가 일지의 형식을 표로 구성하여 작성하였다.
4) 2번째 활동지의 11번 조로부터 발췌

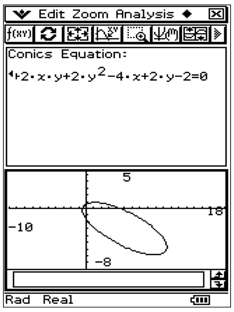
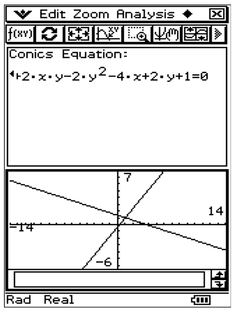
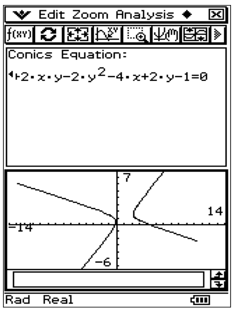
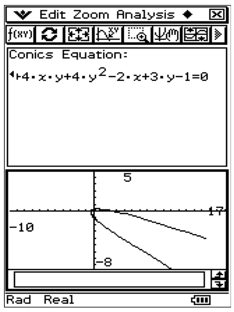
역시나 가장 큰 장점은 어떤 상황을 수식으로만 생각하는 것이 아니라 바로바로 그래프를 통해 시각화를 해줌으로써 좀 더 문제에 대한 폭넓은 접근을 할 수 있었다(활2-17).

이차곡선의 방정식의 계수를 통해서 어떠한 상태에서 그래프가 그려질 수 없는지 확인할 수 있었다. 하지만 지난 탐구 결과인 b^2-4ac일 때 포물선이 그려진다 라는 사실과 이번 탐구 결과가 차이가 생겼는데 어떠한 원인 때문인지 계속 탐구해보아야겠다(활4-2).

학생들이 계산기를 사용하여 직접 2차 곡선을 만들어 봄에 따라 2차 곡선의 형태가 어떤 것이 있는지 대략 이해를 할 수 있다. 즉, 그래픽 계산기에 있는 conics안에 여러 가지 form들을 보고 어떤 2차 곡선이 타원, 쌍곡선, 포물선의 형태가 되는지를 학생들이 눈으로 쉽게 확인할 수 있다(활3-4).

우선 확인하고자 하는 이차곡선에 대한 계수와 그래프 유형을 추측하고, 이런 식이라면 이런 식으로 그려지지 않을까 하는 가정을 해요. 그리고 계산기를 통해서 그 그래프 유형이 맞는지 확인해보는거죠(H1-17)[5].

<표 IV-1> 대수식과 그래프의 표현

$x^2+2xy+2y^2$ $-4x+2y-2=0$ $\begin{cases}2p+2q-4=0\\2p+4q+2=0\end{cases}$ $(p,q)=(5,-3)$ $x^2+2xy+2y^2=15>$ 타원		$x^2+2xy-2y^2$ $-4x+2y+1=0$ $\begin{cases}2p+2q-4=0\\2p-4q+2=0\end{cases}$ $(p,q)=(1,1)$ $x^2+2xy+2y^2=0$ 한 점에서 만나는 두 직선	
$x^2+2xy-2y^2$ $-4x+2y-1=0$ $\begin{cases}2p+2q-4=0\\2p-4q+2=0\end{cases}$ $(p,q)=(1,1)$ $x^2+2xy+2y^2=2>$ 쌍곡선		$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}\neq\frac{D}{E}$ $x^2+4xy+4y^2$ $-2x+3y-1=0$ 포물선	

5) H1 예비교사 인터뷰 전사자료 17번

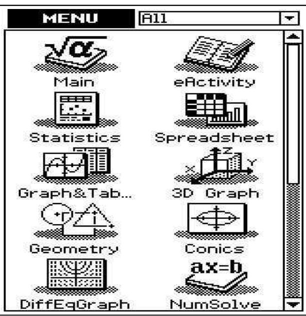
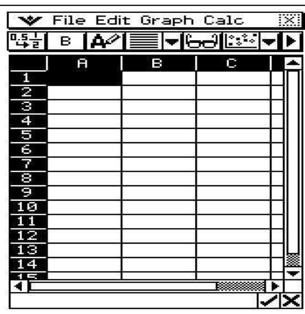
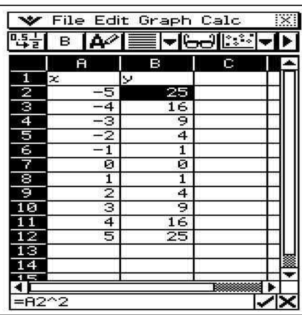
예비교사들은 함수가 아닌 이차곡선의 형태의 그래프를 휴대하기 좋은 계산기라는 매체를 통하여 자신이 원하는 바가 대체로 적절하게 표현되어지고 있다고 반응했다. 확인하고자 하는 그래프 개형과 계수에 관하여 본인들이 세운 가설이 일치하는지 확인하는 과정에서 올바른 방향을 제시해주고 있다고 표현하였으며 이것으로 도구에 의한 긍정적인 방향의 수학적 충실도를 확인할 수 있었다.

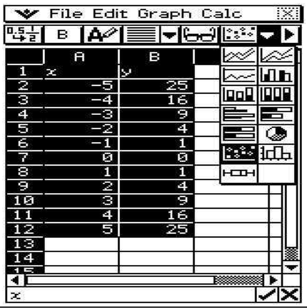
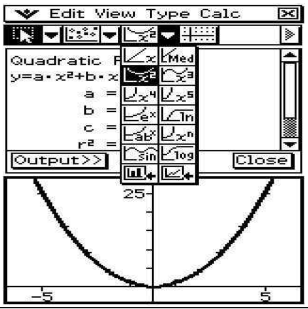
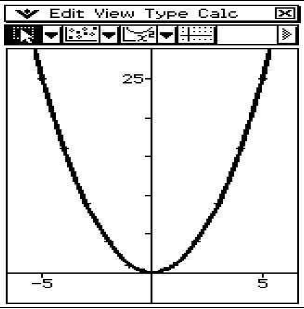
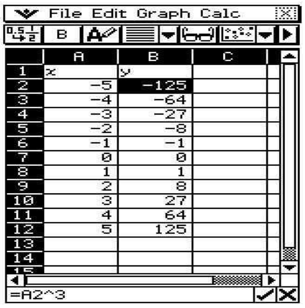
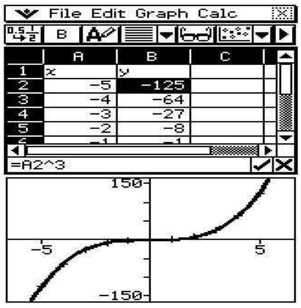
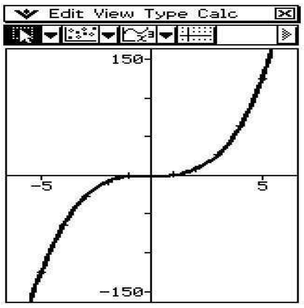
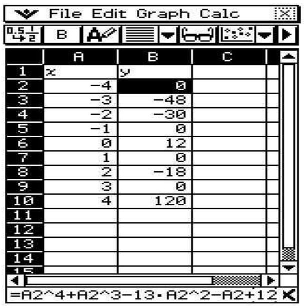
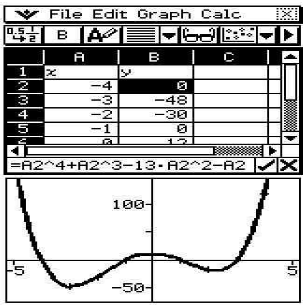
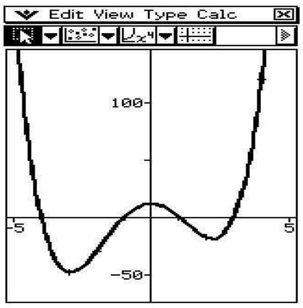
2) 표와 그래프에 의한 표현

이차곡선의 차수를 변경하여 탐구하는 경우에 계산기의 스프레드시트을 활용하여 그래프를 표현한 조도 있었다. 이 경우, 기존 엑셀 프로그램과 사용법이 동일하여 손쉽게 접할 수 있다고 하였으며 이를 이용하여 고차다항식의 식과 점의 위치, 변화량 등을 살펴보는 시간을 가질 수 있었다고 말하였다.

> 이차곡선에 관해서 x의 차수를 높이고 y의차수를 내리니 원뿔곡선이 아니라 함수가 되어버리는데, 함수가 이차곡선보다 훨씬 빨리 그려지거든요. 근데 다른 기능을 살펴보다 시트가 있기에 엑셀처럼 사용해 보았어요(H2-57).

<표 IV-2> 표와 그래프에 의한 표현

<table>
<tr><td colspan="3">그래핑 계산기 이용한 고차함수 그래프 그리기</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>MENU에서 Spreadsheet를 선택한다.</td><td>엑셀에서와 동일한 시트가 나타난다.</td><td>$y=x^2$ 그래프를 그리기 위해 각 셀에 x, y 및 일정 구간의 안에 존재하는 자연수(정의역)를 채워 넣는다. 정의역의 수에 대응하는 함수값을 구하기 위해 위와 같이 '$=A2^2$'를 채워 넣는다.(A2는 셀을 나타낸다.)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>채워진 셀을 블록 지정하여 상단 메뉴의 그래프 종류 중 분산형 그래프를 선택한다.</td><td>분산형 그래프 선택 후 선을 그리기위해, 위와 같이 나타난 상단 메뉴에서 표시된 ‘x^2’을 선택한다.</td><td>이차함수 $y=x^2$ 그래프가 완성됨을 알 수 있다.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">삼차함수 $y=x^3$ 그래프 그리기</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">사차함수 $y=x^4+x^3-13x^2-x+12$ 그래프 그리기</td></tr>
</table>

3) 대수식과 표(좌표값)에 의한 표현

그래프 개형이 아닌 대수식 자체와 표를 이용한 x, y값의 대입을 활용한 조는 나타나지 않았는데 수학적 충실도와 관련된 다음과 같은 이유를 찾아볼 수 있다. 첫째 주어진 도구가 그래핑 계산기로서 대수식과 그래프와의 관계를 파악하기에 특화되어 있는 도구였기 때문으로 계산기 활용의 유용성에 기인한다. 그래핑 계산기를 받은 학생들이 도구의 이름에서 알 수 있듯이 그래프에 관한 탐구를 집중적으로 행하였기 때문에, 그래프를 제외한 대수식과 표만을 활용하여 접근해보는 시도를 아예 생각하지 않은 것으로 보인다. 또한 표와 대수식의 표현에 대하여 계산기가 가지는 수학적 충실도가 낮기 때문으로 분석되는데, 표와 대수식을 활용하기에 엑셀프로그램보다 편리함이 떨어지며 표에 의한 계산기의 소프트웨어(UI)의 기능이 직관적이지 못하다는 점도 대수식과 표의 관계성을 탐구하는데 어려웠을 수 있다. 나아가 표를 활용하여 x, y값을 대입하여도 결론적으로 그래프 개형으로 귀결되며 이차곡선의 대략적인 정의역 치역, 해의 범위 등을 추론하는데 있어 눈금을 재조정하는 작업이 그다지 효과적이지 못한 때문으로 보인다.

> 이전 활동(수학교육 테크놀로지 이전 수업)에서 엑셀을 활용해서 식에 근사하는 방법에 관하여 배웠었는데, 계산기를 사용해보니 엑셀에 비해 시간이 너무 오래걸렸어요. 그리고 목표를 그래프 개형에 두다보니 그 외 다른 탐구를 진행하기엔 시간이... (H3-31).

둘째, 이차곡선의 이해도가 높은 예비 수학교사를 대상으로 한 시도였기 때문에 좌표값에 의한 미지의 대수식의 개형을 탐구해보는 형태의 활동이 잘 이루어지지 않은 것으로 추론해볼 수 있다.

4) 낮은 수학적 충실도

그래핑 계산기 활용에는 낮은 수학적 충실도에 관한 사례들도 있었는데, 그래핑 계산기를 통하여 그래프가 산출되는 과정에서 많이 발생하였다. 아래는 그에 관한 사례들이다.

> 아…네. 우선 계산기 사용법은 쉬운데, 종종 이차곡선이 안그려질 때가 있어요. 에러코드가 뜨는데, 이게 왜 뜨는지 알려면 계산기를 따로 공부해야해서 본말전도가 되어버리더라구요
> (H4-39).

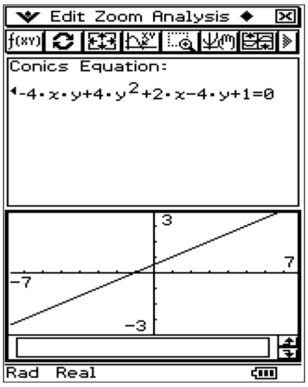
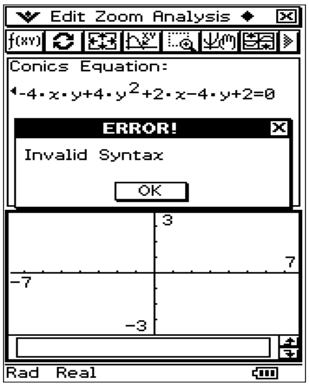
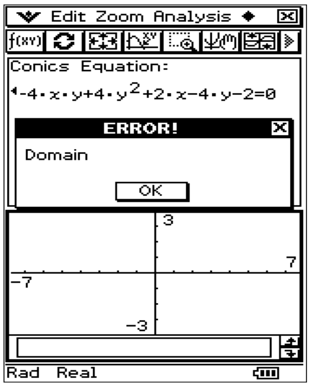
> 계산기의 출력속도가 느려요. 이거 컴퓨터로 동일한 계산기 프로그램을 다운받으면 훨씬 빠른데, 계산기 자체에서 이차곡선이 그려지는 시간이 너무 오래걸리던데요? (H5-3)

> 계산기 사용법이 좀 어려워요.. 영어로 된건 그렇다 치더라도, 그래프 그려지는 속도 자체는 컴퓨터보다 느리잖아요? 휴대성을 제외하면 컴퓨터에도 좋은 프로그램이 많은 것 같은데(H6-18).

위 진술에서 나타나듯이, 계산기 ClassPad 300 PLUS에는 몇 가지 제한점이 있었다. 학생들이 가장 많이 겪는 문제점중 하나는 바로 계산기가 표현하지 못했던 그래프들이었다. 이는 그래핑 계산기의 시스템에서 에러가 나는 상황으로, 해당 에러가 무엇을 의미하는지, 그리고 왜 그래프가 그려지지 않는지 알기 위해 공학도구에 대하여 공부해야 했다. 즉 수학에 그래핑 계산기를 활용하기 위해서 그래핑 계산기의 사용법을 심도있게 공부해야하는 상황이 되었다. 가장 많이 뜬 에러목록은 'invalid syntax' 와 'Domain'이 있었는데, 이는 각각 적용되려는 문법이 계산기에서 사용되는 문법에 적합하지 않은 경우와 적용되는 독립변수의 값이 지정된 정의역의 범위 밖에 있는 경우 나타났다. 'invalid syntax' 계산기 사용 중 계산기에서 제공하는 이차곡선의 형태인 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$형태에 계수부여를 하지 않고 직접 작성하는 경우 자주 일어났는데, 곱셈기호를 생략한 채로 붙여 써서 생기는 오류였다. 'Domain'의 경우 해당 정의역의 범위를 기기조작 중 범위지정을 해둔 경우이거나 두 개의 평행한 직선이 그려지는 경우에 발생하였다. 이러한 에러코드를 직접적인 설명서를 읽어보아도 찾아내기 힘들거나 찾아내어도 세밀한 설명이 부족하여 학생들이 나타난 에러에 대해 문의하는 경우가 생겼다. 특히 후자의 경우, 화면에서 픽셀로 처리되는 그래프의 표현에 따른 장애로 파악되었다. 이는 다른 도구인 '그래프이퀘이존'을 통해 다시 확인해보는 과정을 통해 문제점을 재확인할 수 있었다. 하지만 향후 계산기사용법에 조금씩 익숙해지면서 점차 문의하는 경우는 줄어들었고, 조별 내에서 해결하는 모습이 관찰되었다.

또한 그래핑 계산기의 x, y축의 구간 설정이 가능한데, 이는 y축의 변수는 고정이나 x축의 값에 따라 급격히 변하는 함수(예: $\frac{1}{x}sinx$)를 탐구할 때나 또는 이들 구간을 잘못 설정하였을 경우, 원의 개형이 타원으로 보이거나 타원이 원으로 보이는 등 잘못된 해법을 제공할 수도 있는 위험이 있었다. 이는 연구 전에 미리 공지된 것으로 학생들이 잘 인지하고 있었고, 연구가 진행되면서 대부분 많은 학생들이 지적한 부분은 정확하게 그래프가 그려지나, 그래핑 계산기가 그려지는 속도가 다소 답답하게 느껴진다는 것이었다.

<표 Ⅳ-3> 그래핑 계산기의 제한점

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$x^2-4xy+4y^2+2x-4y+1=$
$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$
$(D^2-4AF)=0$</td>
<td>$x^2-4xy+4y^2+2x-4y+2=$
$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$
$(D^2-4AF)<0$</td>
<td>$x^2-4xy+4y^2+2x-4y-2=$
$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$
$(D^2-4AF)>0$</td>
</tr>
</table>

위와 같이 그래핑 계산기가 직관적인 면에서 다소 떨어지는 수학적 충실도를 보이고 있으며 타 프로그램에서 그려지는 함수나 그래프가 본 기기에서 오류로 그려지지 않는 것에 관한 것이다. 이런 문제는 컴퓨터 화면에 계산기가 그대로 제시할 수 있기 때문에 대안적인 방법을 혼용하여 쓰면서 그 원인을 고찰해볼 수 있는데 교수자가 이런 기기의 특성을 잘 파악하고 있어야 한다.

2. 인지적 충실도

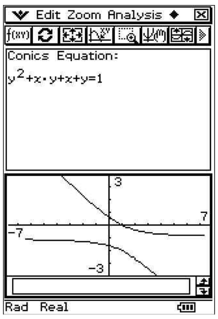
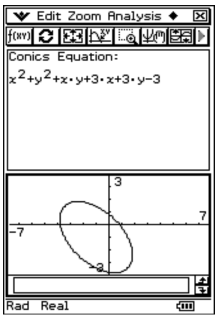
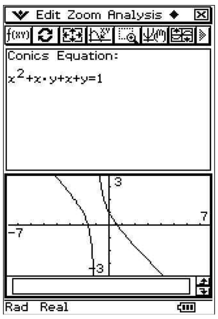
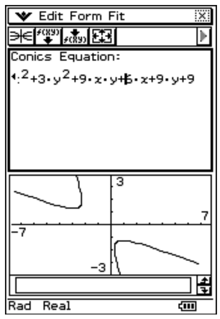
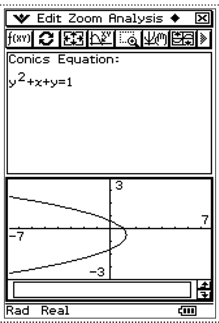
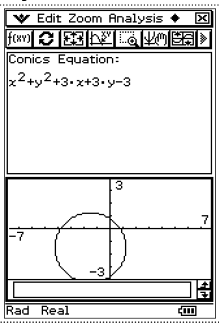
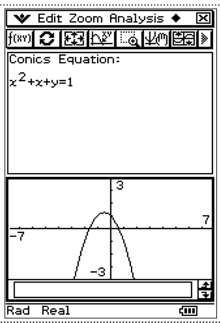
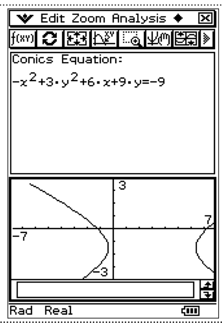
인지적 충실도는 앞서 서술했던바와 같이, 수학문제를 해결하는 과정에서 도구가 학생의 수학적 개념의 형성에 도움을 주는가에 관한 내용이다. 수학적 개념의 형성과정에 그래핑 계산기가 미친 영향을 문제제기에서 나타난 대표적 속성의 종류와 그 해결과정에 관해 조사되었다.

1) 문제제기 속성 1

가장 많이 제기된 문제제기의 속성은 xy항을 포함하고 있는 bxy에 관련된 문제제기와 이를 이용한 일반화였다. 수준 1에서 'bxy항을 포함한다.' 라는 사실을 제기한 뒤 what if not?을 통하여 $b=0$인경우로 해당 항을 소거하는 경우 고등학교 수준의 이차곡선에 관련된 일반화된 지식을 도출하였다.

이는 공학도구가 줄 수 있는 대표적인 인지적 충실도로서 문제제기-도구를 활용할 계획 수립-도구를 활용한 결과도출- 더 나은 수준에서의 문제제기의 과정을 보여준다.

<표 IV-4> xy항과 그래프 개형에 관한 적용

$AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0$ 을 가지고 what if not을 적용해보자.	
속성나열	교차항이 존재한다.
what if not	교차항이 존재하지 않는다?
문제제기	xy항의 유무에 따른 그래프 개형은?
문제분석	    <xy 항이 있을 때 여러 가지 그래프>    
	위에서 보는 것과 같이 교차항이 있을 때 그래프가 완전히 바뀌거나 기울어짐을 볼 수 있다. 그래프가 바뀌는 것은 이차항의 계수가 하나 없는 경우이므로 쌍곡선이 포물선이 되는 것이고, 축이 회전하는 것은 회전변환으로 설명이 가능하다.

그래핑 계산기를 사용함으로써 '교차항이 존재하지 않을 때의 계수와 그래프 개형의 관계성'에 관한 사용자 내면에서 가능한 것이 그래핑 계산기의 형태로 확인 가능한 역동적인 관계가 된 것을 확인할 수 있다. 이는 그래핑 계산기가 관찰 가능한 형태의 수학이 되며 개념이해를 돕는 매개체 역할을 수행한 것으로 보인다.

그러나 몇몇 학생들의 경우, 일반화된 수식인 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$에 관한 계획을 수립하기 어려워하여 계수를 대입한 식을 탐구한 결과를 내놓았다. 이는 속성나열이 제한적으로 시작하여 결과가 제한적으로 끝나기 때문에 인지적 측면의 향상이 아닌 단순한 확인작업에 그치는 경우가 나타났다.

2) 문제제기 속성 2

많은 조가 탐구하고자 했던 속성 중 하나는 고등학교 수학범위에 속하지 않았던 이차곡선의 회전변환에 관한 것이었다. 이는 기존의 x, y축을 기준으로 그려진 그래프에 관한 속성을 부정하여 bxy가 포함되어있는 이차곡선의 회전된 개형을 분석하기 위하여 회전된 새로운 x',y'축을 찾아 가는 과정에 대하여 탐구한 것이다.

<표 IV-5> 회전변화에 따른 이차곡선의 일반화

x축과 y축이 아닌 다른 축을 기준으로 한 이차곡선의 탐구: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 의 그래프를 그리기 위해 x,y축을 θ 만큼 회전변환시키면 $A'=A\cos^2\theta+B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta$ $B'=-2A\cos\theta\sin\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta$ $C'=A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta$ $D'=D\cos\theta+E\sin\theta$ $E'=-D\sin\theta+E\cos\theta$ $F'=F$ 라고 할 때 아래와 같이 나타낼 수 있다. $A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0$ 여기서 적절한 θ를 골라 $B'=0$이 되게 하면 $A'=0$ or $C'=0$ 즉 $A'C'=0$ 일 때 포물선이 그려지고 $A'C'>0$ 일 때 타원이 그려지고 $A'C'<0$ 일 때 쌍곡선이 그려진다. 그런데 $B^2-4AC=(B')^2-4A'C'=-4A'C'$ 이므로 $B^2-4AC=0$ 일 때 포물선이 그려지고 $B^2-4AC<0$ 일 때 타원이 그려지고 $B^2-4AC>0$ 일 때 쌍곡선이 그려진다. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 의 상수항들을 소거하기 위해서 x,y 을 p,q 만큼 평행이동하면 $Ax^2+Bxy+Cy^2+(2Ap+Bq+D)x+(Bp+2Cq+E)y+(Ap^2+Bpq+Cq^2+Dp+Eq+F)=0$ $-(Ap^2+Bpq+Cq^2+Dp+Eq+F)=S$라고 하고, $(2Ap+Bq+D)=0, (Bp+2Cq+E)=0$ 을 만족하는 적절한 p,q를 선택하면, $A(x+\frac{By}{2A})^2+\frac{-(B^2-4AC)}{4A}y^2=S$ 이므로 $B^2-4AC<0$일 때 $S<0$이면 만족하는 (x,y)가 존재하지 않고 $S=0$일 때는 $(0,0)$이

$S>0$ 일 때 첫 번째 결과에 의해서 타원이 그려진다.
$B^2-4AC>0$일 때
$S=0$일 때는 원점을 지나는 두 직선이, $S\neq 0$ 일 때 첫 번째 결과에 의해서 쌍곡선이 그려진다.
$B^2-4AC=0$ 일 때
$S<0$이면 만족하는 (x,y)가 존재하지 않고 $S=0$일 때는 $(0,0)$이
$S>0$ 일 때 평행한 두 직선이 그려진다.

여기서 $B^2-4AC=0$이면 첫 번째 결과에 의해서 포물선이 그려져야 하는데 어떠한 경우에도 포물선은 그려지지 않았다.

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 을
$A(x+\frac{By}{2A})^2+\frac{-(B^2-4AC)}{4A}y^2=S$ 으로 변환하기 위해서는
$(2Ap+Bq+D)=0$, $(Bp+2Cq+E)=0$ 을 만족하는 적절한 p,q를 선택해야 하는데
$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}\neq\frac{D}{E}$이면 $(2Ap+Bq+D)=0$, $(Bp+2Cq+E)=0$ 만족하는 p,q가 존재하지 않는다.
즉 $B^2-4AC=0$ 이면서 $\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}\neq\frac{D}{E}$ 인 그래프는
$A(x+\frac{By}{2A})^2+\frac{-(B^2-4AC)}{4A}y^2=S$으로 그래프의 개형의 판단할 수 없다.
$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$ 이면 $(2Ap+Bq+D)=0$, $(Bp+2Cq+E)=0$ 을 만족하는 p,q 가 무수히 많게 되는데 주어지 이차식을
$Ax^2+(By+D)x+(Cy^2+Ey+F)=0$의 방정식으로 보았을때
$x=\frac{-(By+D)\pm\sqrt{(By+D)^2-4A(Cy^2+Ey+F)}}{2A}$ 가 해가 되고
$\sqrt{(By+D)^2-4A(Cy^2+Ey+F)}$
$=\sqrt{(B^2-4AC)y^2+(2BD-4AE)y+(D^2-4AF)}$ $\quad(\because\ B^2-4AC=0,\ \frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E})$
$=\sqrt{(D^2-4AF)}$

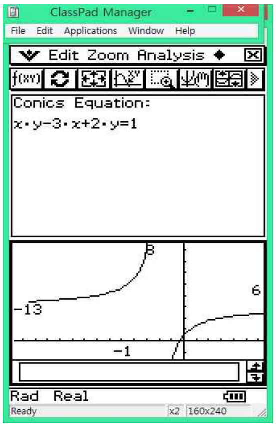
$(D^2-4AF)>0$ 일때 일차식의 곱으로 평행한 두직선
$(D^2-4AF)=0$ 일때 완전제곱식이므로 하나의 직선
$(D^2-4AF)<0$ 일때 만족하는 (x,y) 가 존재하지 않는다.

위 탐구활동을 진행한 조는 모두 12개조였는데 이들 중 일반화 및 적용까지 마무리 지은 조는 8 개조였다. 남은 4 개조는 일반화과정에서 몇 가지 반례가 존재하는 해법만을 제시하였으며 일반화 과정에 성공한 8 개조 중 6 개조는 대학수학과정인 선형대수학의 행렬을 이용한 변환에 관련하여 더 탐구해 나아갔다. 위 과정 이후에 실제로 추론한 것이 맞는가? 에 관하여 계산기를 활용하여 그래프 개형을 확인해보며 근거와 확신을 주는 모습을 확인 할 수 있었다. 탐구주제에 관하여 학생들이 작성한 계산과정과 노트를 참고해 볼 때, 계산기 활용이 이 속성에 대해 다양하게 고려 가능한 가설들과 이에 관한 근거를 제시할 수 있었으며 이를 통하여 확장된 사고수준으로 나아가도록 도움을 주었다고 사료된다.

3) 문제제기 속성 3

이차곡선의 일반식인 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$에서 이차식의 계수를 0으로 만들어 'x,y에 관한 이차식이 아니다.'에 관한 탐구를 진행한 경우도 있었다.

<표 IV-6> 분수함수에 대한 탐구

<table>
<tr>
<td>활동내용</td>
<td>
이차곡선 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$에 대해서 What if not? 전략 세우기
수준 1 <속성의 나열> : x,y에 대한 이차식이다.
수준 2 <WHAT IF NOT?> : x,y에 대한 이차식이 아니라면?
수준 3 <문제 제기> : x,y에 대한 일차식일 때 그래프가 어떻게 그려지는지 탐구해 본다.
수준 4 <제시한 문제에 대한 탐구와 분석> : a=0, c=0 일 때 그래프가 어떻게 그려지는지 탐구해보자.


$bxy+dx+ey+f=0$
$(bx+d)y=-dx-f$
$\therefore y=\frac{-dx-f}{bx+e}=-\frac{d}{b}+\frac{-f+\frac{eb}{d}}{bx+e}$
따라서 a=0, c=0 일 때의 그래프는 점근선이 $x=-\frac{e}{b}, y=-\frac{d}{b}$인 분수함수 그래프이다.
$xy-3x+2y-1=0$의 그래프를 통해 분수함수의 특성을 탐구하였다.
</td>
</tr>
</table>

위 탐구활동 전 이차곡선의 회전이동이 bxy에 관계되어있다고 직관적인 추측을 한 조들의 경우 이차항이 모두 삭제되었음에도 불구하고 그래프 개형이 회전 이동된 쌍곡선의 형태라고 가설을 세운 조들이 많았다. 그러나 그래핑 계산기에서 지원하는 초점 찾기 등의 이차곡선에 관련된 장, 단축, 초점과 점근선의 표기가 되지 않는 점과 가정된 수식을 정리하여 회전 이동된 형태의 쌍곡선이 아닌 분수함수형태임을 추론해나갔다. 이는 그래핑 계산기의 기능을 활용하여 직관적 추론을 논리적 추론으로 이끌어 낼 가능성으로 계산기가 이차곡선 탐구로부터 분수함수로의 변환으로써 낮은 수준의 접근일지라도 이차곡선과 분수함수의 차이점을 확인할 수 있으므로 인지적 충실도와 관련있다.

수업 후 대부분의 학생들이 본인이 계획한 탐구에 관하여 다양한 이야기를 나누었으며 더 심도있는 지식수준으로 나아가는 과정을 관찰할 수 있었다. 특히 그래핑 계산기를 활용한 문제해결과 새로운 문제제기에서 그래핑 계산기는 해당 탐구방향이나 가설이 올바르지 않은 방향으로 나아가는 것을 막아주었다. 왜냐하면 학생들의 가설에 관한 반례를 적절히 찾아보기 쉬웠으며 단순히 복잡한 계산을 대신해주는 것에 그치지 않고 심도있는 이해과정으로 넘어가는 것이 계산기의 활용으로 가능했기 때문이다. 이에 그래핑 계산기를 도구로써 활용하는 이차곡선의 탐구수업은 인지적 충실도가 높게 나타났다고 평가된다.

3. 교수적 충실도

그래핑 계산기를 활용하여 적절한 목표를 제시하고 해당목표에 대한 근거를 제시할 수 있는가에 관한 문제이다. 문제제기를 통하여 새로운 문제를 탐구해 나가며 높아진 이해수준을 통하여 해당 수준에 맞는 새로운 탐구나 문제를 제기하는 과정에서 그래핑 계산기가 도움을 준 정도에 해당한다.

Q: 그랬군요. 그럼 계산기의 사용이 문제를 탐구하는데 어떠한 도움을 주나요?

H7: 우선 복잡한 계산이 간단하게 이루어지죠. 계산의 간편함은 시간을 많이 줄여주고, 손으로 하는 것보다 더욱 정확한 값을 출력해주니까요. 그리고..

Q: 그리고..?

H7: (잠시 뜸을 들이더니) 아.. 그, 우선 문제를 이해하는데 도움을 줘요. 문제에 대해서 이것저것 시행해보면, 계산기가 없는 상태에서는 그 시도가 맞는지 틀리는지, 혹은 시도자체가 의미가 있는지 없는지 조차도 불분명할 때가 많아요. 지금 이걸 하고 있는게 목적달성으로 가고있는 게 맞나? 아닌가? 그런데 계산기가 있으면, 우선은 정확한지 아닌지부터 확인이 가능하고, 우리가 예상한것과 다르게 나온다면, 가정에 오류가 있는 거니까 다시 시도하거나 생각해보겠죠(H7-34~37).

에… (잠시 생각한다) 계산기가 없다면 그래프 형태를 정확히 확인할 수 없어서 이 식의 그래프가 어떻게 그려지는지 확인 할 수 없으니, 그래프가 그려지는 도구가 없다면 할 수 없는 탐구네요(H8-15).

위의 인터뷰에 응한 학생은 그래핑 계산기가 탐구과정에서 가정에 오류가 있는가에 관한 근거로서 작용한다고 하였으며 그래프 형태를 확인하기 어려운 경우 탐구의 진행이 어렵다고 답하였다. 대부분의 조들이 탐구를 통하여 이해수준이 향상된 이후, 이를 적용한 문제를 만들고 다시 작성하는 과정을 보여주었다. 다음은 이차곡선에 관하여 학생들이 제작한 문제와 이를 다시 계산기를 활용하여 풀이하는 과정이다.

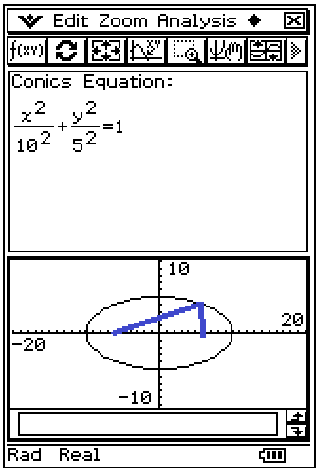
<표 IV-7> 문제제기에 의한 확장

□ 런던의 세인트 폴 대성당에 있는 속삭이는 화랑에 가면 한쪽 복도에서 벽에 대고 속삭이면 건너편 복도에서 뚜렷이 잘 들린다고 한다. 이에 대한 의문점을 이차곡선의 관점으로 해결해보자. <속성 나열하기> 세인트 폴 대성당은 타원형의 돔 모형의 구조이다. <what if not??> 만약 세인트 폴 대성당이 타원형의 구조가 아니라면 벽에 대고 속삭였을 때 건너편 복도까지 뚜렷이 들릴까? <문제 제기> $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ 의 이차방정식에서 타원형의 일반식은 $xy=0$ 이고 $\frac{(x-a)^2}{A}+\frac{(y-b)^2}{B}=1\,(A,B>0)$ 형태를 가진다. 만약 $A<0$ or $B<0$ 이라면 어떤 특징을 가지게 되고 정점에서의 소리는 어떻게 되는가? <문제 해결> 1. $\frac{(x-a)^2}{A}+\frac{(y-b)^2}{B}=1\,(A,B>0)$ 에서 변수를 제외한 문자에 임의 값을 정하자. 예를 들어,	한 마디로, 한 정점에서 빛이나 소리를 발생시키면 반대편에 위치한 정점에서 똑같은 빛이 보이거나 혹은 같은 소리가 들리게 되는 것이다. 그러므로 런던의 세인트 폴 대성당에서는 타원의 초점에 해당하는 곳에서 벽에 대고 작은 소리로 속삭이면 그 소리가 건너편 복도에서 또렷이 들리게 되는 것이다. 그러면 타원의 방정식 $\frac{(x-a)^2}{A}+\frac{(y-b)^2}{B}=1\,(A,B>0)$ 에서 $A<0$ or $B<0$ 이라면 어떤 특징을 갖는지 그래프를 그려보고 살펴보자. 2. $\frac{(x-a)^2}{A}-\frac{(y-b)^2}{B}=1\,(A,B>0)$ 일 때의 그래프 개형을 살펴보면 왼쪽 그림과 같이 쌍곡선의 그래프가 나오게 된다. 쌍곡선은 평면 위에 있는 임의의 두 정점으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합으로 만들어지는 곡선을 뜻한다. 즉, 임의의 두 정점에서 곡선 위의 한 점까지의 거리의 차를 10이라고 하자. 그 때 한 정점에서 그래프 위의 점까지의 거리가 15라고 하면 다른

<table>
<tr>
<td>

$A=16, B=9, a=2, b=5$ 라고 했을 때,

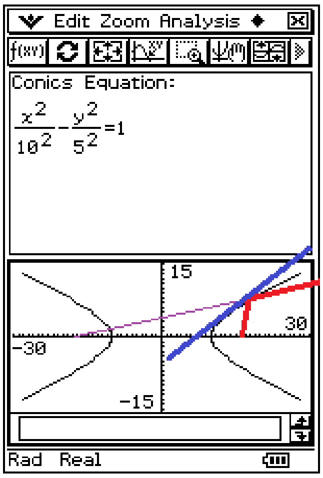
$\frac{(x)^2}{10}+\frac{(y)^2}{5}=1$ 이 나오고, 그래프의 개형은 왼쪽의 그림과 같이 나온다.



타원의 정의는 평면 위의 두 정점으로부터의 거리의 합이 일정한 점의 집합으로 만들어지는 곡선을 말한다. 즉, 임의의 두 정점에서 그래프의 위의 한 점까지의 거리의 합은 항상 일정하므로 그래프의 모든 점에서 성립하게 된다.

다른 관점에서 말하면, 소리나 빛은 파동이므로 반사와 굴절을 하며 뻗어나간다. 이 때, 타원의 초점에서 거리의 합을 a+b라고 하자! 한 정점에서 그래프의 임의의 점까지 빛을 쐈을 때, 그 때의 거리를 a라고 하면 그래프의 위의 점에서 다른 하나의 정점까지의 거리는 무조건 b가 되어야 하는 것이다.

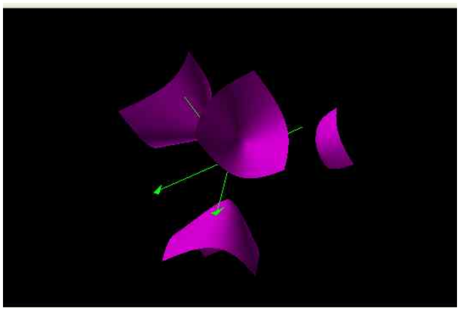
</td>
<td>



정점에서 그 점까지의 거리는 5가 되거나 혹은 25가 되어야 한다. 이러한 쌍곡선의 특징을 파동의 관점에서 살펴보게 되면 한 정점에서 곡선 위의 점까지 빛을 비추면 그 점의 접선을 반사면으로 하여 빛이 반사가 되는데 이때 반사된 빛이 다른 정점에서 나온 빛처럼 진행하게 된다.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$x^2+y^2+z^2+xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=0$



속성분석 : 변수가 2개이다.

what if not : 변수가 3개라면?

</td>
<td>

3개의 변수에 관하여 모두 양수로 설정한 경우, 곡면의 형태로 나타났다. 각각 xy, xz, yz평면으로 자를 경우 쌍곡선이 나타났으며 ‘이차곡면’에 관하여 타원이나 원 형태, 또는 포물면 형태가 나타나는 계수관계에 관하여 탐구과정에 있다.

</td>
</tr>
</table>

교수적 충실도 부분에서는 본 연구의 교수적 측면과 관련해서 문제제기 방법에 의하여 ‘확장된 영역에서의 새로운 문제제기’와 맞물려 긍정적인 효과를 보여주고 있었다. 각 조가 탐구활동 후 계산기의 새로운 기능과 이를 활용할 다양한 탐구주제를 다루며 더욱 확장된 방향으로의 탐구가 진행되었다. 그 예로, 실생활에 적용된 새로운 문제제기, 실수계수 외 복소계수인 경우 나타나는 복소평면상의 그래프 개형은 어떠한가?, 교차항을 포함한 이차곡선의 회전이동을 교과과정에 넣을 경우 어떠한 방법으로 교수하는 것이 적절한가? 등이 있었다. 아쉽게도 이후 수업차시에서 모두 다루기에 무리가 있어 학생들의 자유탐구로 남겨두었다. 물론 이후에도 조별로 학생들의 자율적인 탐구가 진행되었으며 계산기의 기능이 해당 탐구의 근거가 되면서 인지적 충실도로 진행되는 과정을 관찰할 수 있었다.

V. 결론

학교수학에서 공학적 도구를 활용하여 수학을 가르치는 방안에 관하여 지속적으로 다루어지고 있으며, 공학도구는 분명 중요한 학습 보조 도구가 될 수 있다는 점은 모두 동의하는 바이다. 그러나 실제 모든 수학 수업에서 공학도구를 사용해야한다는 뜻은 아니다. 교실 환경과 학생의 수준, 교사의 공학도구를 다루는 능력에 따라 공학도구의 사용은 득이 될 수도 있고 실이 될 수도 있기 때문이다. 지금껏 이러한 현장의 사정에 따라 공학도구의 사용을 적극적으로 행하지 못한 것도 사실이다. 본 연구는 이러한 관점에서 시작하여 수학교사의 양성과정에 있는 예비수학교사들의 공학도구의 활용효과를 경험하는 과정에서 어떻게 적절한 공학도구를 사용하는가에 관해 수학적, 인지적, 교수적 충실도를 조사하였다.

이차곡선의 탐구에서 그래핑 계산기 사용의 수학적 충실도는 그래프 개형확인과 식을 제공하여 쉽게 탐구할 수 있도록 도움을 준다는 점에서 수학적 충실도가 높게 평가되었으나, 직관적이지 못한 조작과 계산기상의 설정 오류로 인하여 기술적인 한계를 가지는 것으로 평가되었다. 이런 한계를 교사는 미리 숙지하고 계산기의 수학적 충실도의 장, 단점을 수업에 활용할 수 있어야 한다.

인지적 충실도는 각 조의 이차곡선에 관한 자유 탐구 주제에 따라 약간의 차이는 있었으나 개념을 이해하고 그에 따른 새로운 지식을 습득함에 있어 그래핑 계산기가 도움을 주었다는 풀이과정과 답변들이 많았다. 탐구되었던 속성으로는 첫째, 교차항이 존재하지 않는 경우, 둘째, x, y 축이 아닌 다른(회전된) x', y' 축인 경우, 그리고 셋째, 이차항이 존재하지 않는 경우로 조사되었는데 이는 표준식만 다루는 고교과정에서는 다뤄지지 않으며 또 대학의 선형대수 강좌에서 행렬적 접근만을 다루는 내용사이에서 다리의 역할로 다뤄질 수 있는 접근이다. 또한 명확하지 않았던 가설에 관한 반례와 해법을 제시하는 등의 직, 간접적인 도움으로 탐구과정에 없어서는 안 될 도구로서 사용되었기에 인지적 충실도가 몹시 높게 평가되었다.

교수적 충실도는 새로운 목표를 수립하고 이에 따른 결과에 대한 근거로서 그래핑 계산기

가 어느 정도 기여하느냐에 관해 학생들은 그래핑 계산기를 통하여 얻은 지식으로 다른 주제를 다시 탐구해 보았으며 계산기를 활용할 수 있는 새로운 문제를 제기하여 이에 대한 근거를 얻었다. 즉, 각 조별 스스로 문제해결을 해야 했기 때문에 학생들의 상호작용에 의한 탐구활동의 효과가 반영되어 문제제기가 그 본연의 역할이라고 할 수 있는 사고의 확장을 돕고 나아가 창의성으로 나아갈 수 있는 계기가 되었다.

수학적과 인지적 충실도는 서로 순환형태의 연관관계를 보였다. 수학적 충실도가 낮게 나오는 경우, 이는 해당 주제에 관한 수학적 표현을 적절하게 해줄 수 없다는 뜻이며, 적절하게 표현되지 못한 형태의 공학도구가 문제를 인지하고 이해하는데 큰 도움을 주기는 어렵다. 또한 문제를 이해하는데 큰 도움을 주지 못한 공학도구를 활용하여 새로운 목표에 대한 수학적 표현이 적절하지 못하면 새로운 문제를 생각하여 깊은 탐구로 나아가기 힘들 것이다. 반대로 수학적 충실도가 높게 나오는 경우, 원하는 수학적 지식의 표현을 통하여 역동적이고 시각적인 자료를 통한 인지구조의 발달을 촉진하며 이 인지발달을 기반으로 새로운 주제선정과 나아가 도구를 활용하여 문제를 해결하게 되는 순 순환구조를 가지게 되는 것을 알 수 있었다. 이러한 과정에서 그래핑 계산기를 활용한 학생 스스로 탐구하는 수업은 일반적인 수업 틀을 벗어나 적극적이고 역동적인 탐구를 수반하며 새로운 목표설정이 용이해지므로 이러한 교수적 충실도는 인지적 충실도를 더욱 자극하고 강화하여 사고의 확장의 활성화를 이끈다는 것을 교사는 잘 인지하고 자신의 수업에 활용할 필요가 있다.

그래핑 계산기는 최근에는 모바일 폰에 어플리케이션을 넣어 사용할 수 있고 컴퓨터와도 병행하여 활용할 수 있어 차츰 기기 간에 구분이 사라지고 있는 실정이다. 앞서 설명되었던 수업시수의 경감이나 난이도의 하향조정으로 다루지 못했던 수학내용을 대상으로 역동적 수학을 경험할 수 있는 기회를 가지게 하는 것은 사범대학시절 예비교사들의 수학적 사고를 확장하는데 필요하다. 이를 위해서 향후 다양한 수학적 도구들이 각 충실도 측면에 대해 어떻게 기여하는가에 관한 연구가 꾸준히 이루어져 교사들의 전문성 신장이 더욱 활발히 이루어지길 기대한다. 이와 더불어 이러한 연구를 통하여 교사들이 수업현장에서 공학도구를 적극적으로 사용할 수 있는 '수학교실의 공학도구 환경'이 현장 교실에 구축되어야할 것이다.

참고 문헌

교육인적자원부 (1997) 제 7차 수학과 교육과정. 교육인적자원부.

김남희(2011). 예비 수학 교사 교육에서 공학적 도구의 교육적 활용. 수학교육학연구, 21(4), 345-359.

김진호, 김경미, 권혁진(2009). 대수 문장제의 오류 유형과 문제 해결의 관련성 분석. 수학교육논문집, 23(3), 599-624.

박희정, 김경미, 황우형(2011). CAS 그래핑 계산기를 활용한 수학 수업에 관한 사례 연구, 수학교육논문집, 25(2), 403-430.

양은경, 황우형(2005). 수학 학습유형과 문제 해결 전략, 수학교육, 44(4), 565-586.

이승훈, 조완영(2013). 수학교사의 이차곡선에 대한 내용지식의 분석, 학교수학, 15(4), 995-1013

정은실 (1993). 문제.제기에 대한 고찰. 대한수학교육학회 논문집, 3(2), 37-46.

최상기, 목연하(2011). 2007년 개정 교육과정에 따른 교과서의 문제 만들기 문항: 수학7의 대수영역을 중심으로. 한국학교수학회논문집, 14(2), 163-178.

한세호, 장경윤(2009). 고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생. 학교수학, 11(3), 527-546.

한정민, 박만구(2010). 수학적 창의성 관점에서 본 교사의 발문 분석. 한국초등수학교육학회지, 14(3), 865-884.

Bos, B. (2008). Mathematical and Cognitive Fidelity, Technology Impacting Mathematical Achievement. In K. McFerrin et al. (Eds.), Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2008 (pp. 4404-4406). Chesapeake, VA: AACE.

Bos, B. (2009). Technology with Cognitive and Mathematical Fidelity: What It Means for the Math Classroom. Computers in the Schools, 26(2), 107-114.

Brown, S., & Walter, M. (2005). The Art of Problem Posing (3rd Edition). 조정수, 김진환 공역(2012), 문제제기의 기술. 서울: 경문사.

Choi, S. S. (1996). Students' Learning of Geometry Using a Computer. Unpublished Dissertation. University of Georgia. GA: Athens.

Dick, T. (2007). Keeping the faith: Fidelity in technological tools for mathematics education. I G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspective. Vol.2: Cases and Perspective (pp. 333-339). Greenwich, CT: Information Age.

Kieran & Drijvers, (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection : A Study of CAS use in secondary school algebra. International Journal of computers for mathematical Learning, 11, 205-263.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come form? In A. H. Schoenfeld(Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp. 123-147) Hillsdale, NJ: Lawerence Erlbaum Associates

Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research and Case Study Applications in Education. San Francisco: Jossey-Bass.

Moyer-Packenham, P.S., Salkind, G., & Bolyard, J.J. (2008). Virtual manipulatives used by K-8 teachers for mathematics instruction: Considering mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 8(3), 202-218.

National council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Author.

National council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for School Mathematics. Reston, VA: The Author.

Silver, E. A. (1993). On Mathematical Problem posing. PME Proceedings of the Seventeenth International Conference, Vol. I(pp. 66-85). Tsukuba, Japan.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. Mathematics Teaching, 77, 20-26.

Stohl, H. & Harper, S. R. (2005). Technology Tips: Fool Me Twice, Shame on Me. Mathematics Teacher, 98(8), 560-563.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3), 281-307.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G.W, Dick, T. P.(2007) Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age.

Mathematical, Cognitive, and Pedagogical Fidelities in Learning the Conic Section Using a Graphing Calculator

Choi-Koh Sang Sook[6]

Abstract

In learning the conic session, there is a gap between the curricula of the high school and the university level for the pre-service math teachers. So through the art of problem posing, 38 number of pre-service teachers worked in a pair to find fidelities in the environment of hand-held graphing calculator. We concluded that the cognitive fidelity showed three different properties using "what if not" strategy which the mathematical fidelity between the representations supported. Also, the exploration using a calculator in the pedagogical fidelity strongly helped them to apply and to expand their learning.

Key Words: Mathematical Fidelity, Cognitive Fidelity, Pedagogical Fidelity, Pre-service Teachers, Graphing Calculator.

Received February 12, 2014
Revised March 24, 2014
Accepted March 27, 2014

6) Dankook University (sangch@dankook.ac.kr),