

# 터보 압축기 다단 회전축계의 진동 및 안정성 연구

## Vibration and Stability Analysis of a Multi-stepped Shaft System of Turbo Compressor

서 정 석\* · 강 성 환\* · 박 상 윤\* · 안 창 기\* · 송 오 섭†

Jung-Seok Seo, Sung-Hwan Kang, Sang-Yoon Park, Chang-gi An and Ohseop Song

(Received April 15, 2014 ; Revised July 24, 2014 ; Accepted July 24, 2014)

**Key Words** : Rotordynamics(회전체동역학), Multi-stepped Shaft(다단 회전축), Divergence(발산), Turbo Compressor(터보 압축기)

### ABSTRACT

The mathematical modeling on the free vibration and stability of a multi-stepped shaft of turbo compressor is performed in this study. The multi-stepped shaft is modeled as a non-uniform Timoshenko beam supported by anisotropic bearings. It is assumed that the shaft is spinning with constant speed about its longitudinal axis and subjected to a conservative axial force induced by front and rear impellers attached to the shaft. The structural model incorporates non-classical features such as transverse shear and rotary inertia. A structural coupling between vertical and lateral motions is induced by Coriolis acceleration terms. The governing equations are derived via Hamilton's variational principle and the equations are transformed to the standard form of an eigenvalue problem. The implications of combined gyroscopic effect, conservative axial force, bearing stiffness and damping are revealed and a number of pertinent conclusions are outlined. In this study analytical results are compared with those from ANSYS finite element analysis and experimental modal testing.

### 1. 서 론

일반적으로 산업기계에 있어서 주종을 이루는 것은 그 내부에 회전체를 갖는 회전기계이다. 현대 산업기계의 고속화, 정밀화 추세에 따라 회전기계를 구성하는 회전축계의 진동은 기계의 성능과 수명에 커다란 영향을 끼치며 또한 작업자 및 주변 환경의 안전에 심각한 영향을 주게 된다. 이 연구의 대상인 터보 압축기는 고속으로 회전하는 임펠러에 유체(공기)를 통과시켜 회전축의 기계적

에너지를 유체의 운동에너지로 변환시킴으로써 기계의 압력과 속도를 높이는 회전기계로서 압축기체를 필요로 하는 산업 전반에 걸쳐 광범위하게 사용되고 있다. 압축기의 고속화 경향에 따라 압축기 운전속도가 불안정 영역을(임계속도) 통과하거나 그 부근에서 운전될 경우 소음, 진동 등의 문제가 발생하고 심각한 경우 압축기의 작동이 멈추거나 파손될 우려가 있다. 그러므로 회전기계 설계 시에 임계속도나 불안정 영역을 회피할 수 있는 동역학적 해석이 필수적이다.

회전체에 대한 문제는 Meirovitch<sup>(1)</sup>에 의해서 선

† Corresponding Author ; Member, Department of Mechanical Engineering, Chungnam National University  
E-mail : songos@cnu.ac.kr  
Tel : +82-42-821-5650, Fax : +82-42-822-5642

\* Dept. of Mechanical Engineering, Chungnam National University

‡ Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

도적으로 연구되었으며, Lagrange 방정식을 사용하여 회전좌표계에 대한 자이로스코픽 시스템의 운동 방정식을 유도하였으며 이를 회전하는 우주선에 적용하여 고유치문제 해석을 수행하였다. Lancaster<sup>(2)</sup>는 회전체의 비감쇠 고유치와 고유벡터가 순수한 복소쌍(pure imaginary complex conjugates)으로 이루어진다는 것을 밝혀냈다. Linkins<sup>(3)</sup>는 강체와 회전하는 강체에 부착된 유연 appendage로 이루어진 구조물에 대한 운동방정식을 유도하였으며, 이를 이용하여 Patel and Seltzer<sup>(4)</sup>가 일정한 각속도로 회전하는 구조물의 탄성변형이 고려된 고유치 문제를 풀 수 있는 컴퓨터 프로그램을 제시 하였다. Nelson<sup>(5)</sup>은 축방향 하중, 회전관성, 자이로스코픽 모멘트, 감쇠를 포함하지만 전단변형을 고려하지 않은 Timoshenko 보 유한요소 모델에 의한 해석결과와 고전적 Timoshenko 보 이론에 의한 해석 결과와 비교하였다. Kumar와 Rastogi<sup>(6)</sup>는 비대칭 two-rotor 시스템에 대하여 Lagrangian-Hamiltonian 방법을 사용하여 시스템을 모델링하고 로터의 질량 변화에 따른 진폭과 고유진동수 변화 경향을 고찰하였다. Chasalevris and Dohnal<sup>(7)</sup>은 대형 로터-베어링 시스템에 대하여 가변형상 저널베어링을 사용하는 경우에 기존의 원통 저널베어링을 사용하는 경우 보다 위험속도 영역에서 60~70%의 진동저감효과가 있음을 보였다.

다단 회전축계에 대한 국내 연구로서 Park 등<sup>(8)</sup>은 다단 회전축계를 Timoshenko 보로 모델링하고 복소좌표에 입각한 운동방정식을 유도하였으며 라플라스 변환법을 사용하여 임밀해를 구하고 이를 유한요소 해석 결과와 비교하였다. Chun<sup>(9)</sup>은 Timoshenko 보 이론과 자이로스코프 효과를 고려한 운동방정식을 유도하여 해를 구하고 이를 유한요소법과 비교하였다. 이 때 경계에서의 연속조건을 적용하는데 있어서의 제약조건을 일반화된 전달행렬로 표현하여 해결하였다. Koo<sup>(10)</sup>는 전단변형효과와 회전관성이 고려된 Timoshenko 보 모델에서 축 하중이 존재할 경우 축 하중이 Timoshenko 효과에 미치는 영향을 고찰하였다. Yang and Choi<sup>(11)</sup>는 회전축계 해석에서 유한 동적요소법 및 전달행렬법을 혼합한 하이브리드법을 제시하고 고유진동수와 모드를 구하였으며 이를 다른 방법과 비교하여 하이브리드 방법의 타당성을 확인하였다.

이 연구에서는 다단 형상의 회전축 양 단에 임펠러가 부착된 복잡한 회전축계에 대하여 불균일 단면 Timoshenko 보 이론에 기초한 수치해석 모델을 정립하여 결과를 산출하였고, 이를 3D ANSYS 유한요소 해석 결과 및 실험 결과와 비교하여 그 타당성을 검증하였다. 회전축계의 초기설계 단계에서 불균일 단면 Timoshenko 보 모델을 사용하여 설계변수를 자유자재로 변화시켜 가면서 해를 구할 수 있다면 유한요소법이나 실험에 비하여 많은 시간과 노력을 절감할 수 있을 것으로 판단된다. 그러나 중간설계 및 최종설계 단계로 진입하면 유한요소법과 실험을 통한 상세설계 및 모델 검증 작업이 이루어져야 할 것이다.

## 2. 회전축계의 운동방정식

### 2.1 좌표계

회전축계 모델링을 위하여 아래 그림과 같이 고정좌표계  $OXYZ$ 와 회전체에 부착된 회전좌표계  $Oxyz$ 를 사용하였다. 회전축계는 다단 형태를 가지며 양

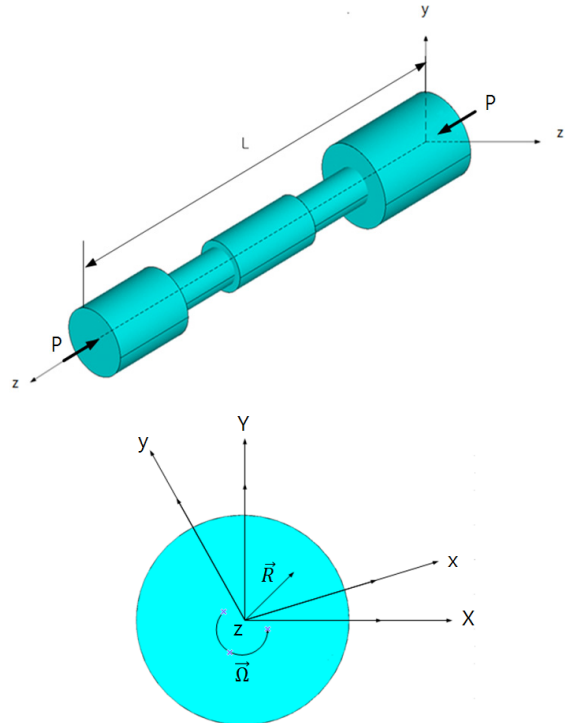


Fig. 1 Configuration of a non-uniform shaft

끝단에 임펠러가 부착된 불균일 단면 보로 모델링하였다. 길이가  $L$ 인 회전축은  $z$ 축 중심으로 일정한 회전속도  $\Omega$ 로 회전하며 임펠러에 의해 발생하는 축방향 압축하중  $P$ 를 받고 있다.

2.2 변위장

3D 탄성론 문제를 1D 보 문제로 변환시키기 위해 3D 변위장  $u, v, w$  를 다음과 같이 1D 변위요소로 표현한다<sup>(12)</sup>(Fig.2).

$$\begin{aligned} u(x, y, z; t) &= u_0(z; t) - y\phi(z; t) \\ v(x, y, z; t) &= v_0(z; t) + x\phi(z; t) \\ w(x, y, z; t) &= w_0(z; t) + y\theta_x(z; t) + x\theta_y(z; t) \\ &\quad - (F_w + na)\phi'(z; t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서  $u_0, v_0, w_0$ 는 각각  $x, y, z$ 축 방향의 병진변위를 의미하며,  $\theta_x, \theta_y, \phi$ 는  $x, y, z$  축 중심의 회전변위를 나타낸다.  $F_w, na$ 는 1, 2차 와핑함수를 나타내며 이 연구에서 단면이 원형이므로 와핑함수는 영이 된다.

변형된 보의 임의의 한 점  $M(x, y, z)$ 의 위치벡터, 속도벡터 그리고 가속도 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{R}(x, y, z; t) &= (x+u)\vec{i} + (y+v)\vec{j} + (z+w)\vec{k} \\ \vec{R}' &= [\dot{u} - \Omega(y+v)]\vec{i} + [\dot{v} + \Omega(x+u)]\vec{j} + \dot{w}\vec{k} \\ \vec{R}'' &= [\ddot{u} - 2\Omega\dot{v} - (x+u)\Omega^2]\vec{i} \\ &\quad + [\ddot{v} + 2\Omega\dot{u} - (y+v)\Omega^2]\vec{j} + \ddot{w}\vec{k} \end{aligned} \tag{2}$$

여기에서  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 는 각각  $x, y, z$  축 방향의 단위벡터이며,  $(\dot{\phantom{x}}) \equiv d(\phantom{x})/dt$  이다.

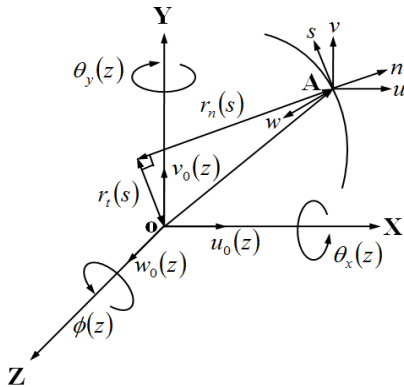


Fig. 2 Displacement and kinematic variables

3. 지배방정식 및 경계조건

3.1 해밀턴의 변분원리

회전하는 보의 운동방정식과 경계조건식을 유도하기 위하여 해밀턴의 변분원리 식을 이용하였다.

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} [\int_{\tau} \delta U - \delta K - \delta W - \delta D] dt = 0 \tag{3}$$

여기에서  $U, K, W, D$ 는 각각 탄성에너지, 운동에너지, 일, 감쇠함수(Rayleigh's dissipation function)이며 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\tau + \sum_{i=1}^N [\frac{1}{2} k_{ui} u_{0i}^2 + \frac{1}{2} k_{vi} v_{0i}^2] \tag{4}$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} d\tau \tag{5}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L P(u_0'^2 + v_0'^2) dz \tag{6}$$

$$D = \sum_{i=1}^N [\frac{1}{2} c_{ui} \dot{u}_{0i}^2 + \frac{1}{2} c_{vi} \dot{v}_{0i}^2] \tag{7}$$

여기에서  $\epsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 는 각각 변형률 및 응력 텐서를 나타내고  $k_i, c_i$  각각 베어링의 탄성계수 및 감쇠계수이다.

3.2 운동방정식 및 경계조건

해밀턴 원리 식 (3)으로부터 유도된 임의 단면 회전축계의 운동방정식과 경계조건식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & [k^2 GA(z)(u_0' + \theta_y)']' - Pu_0'' \\ &= m(z)\ddot{u}_0 - 2m(z)\Omega\dot{v}_0 - m(z)u_0\Omega^2 \\ &+ \sum_{i=1}^N [k_{ui}\delta(z-z_i)u_0 + c_{ui}\delta(z-z_i)\dot{u}_0] \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & [k^2 GA(z)(v_0' + \theta_x)']' - Pv_0'' \\ &= m(z)\ddot{v}_0 + 2m(z)\Omega\dot{u}_0 - m(z)v_0\Omega^2 \\ &+ \sum_{i=1}^N [k_{vi}\delta(z-z_i)v_0 + c_{vi}\delta(z-z_i)\dot{v}_0] \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & [EI(z)\theta_y']' - k^2 GA(z)(u_0' + \theta_y) \\ &= J(z)\theta_y \end{aligned} \tag{10}$$

$$[EI(z)\theta_x'] - k^2 GA(z)(v_0' + \theta_x) = \mathcal{J}(z)\ddot{\theta}_x \tag{11}$$

여기에서 불균일 단면의 전단강성 ( $k^2 GA$ )과 굽힘강성( $EI$ ), 그리고 단위 길이 당 질량 ( $m$ )과 관성( $\mathcal{J}$ )은 모두 회전축 방향  $z$ -좌표의 함수로서 다단 축의 경우에 다음과 같이 단위계단함수  $U(z)$ 로 표현할 수 있다.

$$(k^2 GA(z), EI(z)) = \sum_{i=1}^N (k^2 GA_i, EI_i)[U(z-z_i) - U(z-z_{i+1})] \tag{12}$$

$$(m(z), \mathcal{J}(z)) = \sum_{i=1}^N (m_i, \mathcal{J}_i)[U(z-z_i) - U(z-z_{i+1})] \tag{13}$$

압축기 회전축계의 경우에 양 끝단 ( $z=0, L$ )에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$k^2 GA(u_0' + \theta_y) - Pu_0' = 0 \tag{14}$$

$$k^2 GA(v_0' + \theta_x) - Pv_0' = 0 \tag{15}$$

$$EI\theta_x' = 0 \tag{16}$$

$$EI\theta_y' = 0 \tag{17}$$

운동방정식의 수치해석결과를 구하기 위해서 자유진동의 동기운동(synchronous motion)을 가정하면 변위 요소는 다음과 같이 표현된다.

$$(u_0(z,t), v_0(z,t), \theta_x(z,t), \theta_y(z,t)) = (U(z), V(z), X(z), Y(z))e^{\lambda t} \tag{18}$$

$$(U(z), V(z), X(z), Y(z)) = \sum_{j=1}^N (a_j u_j(z), b_j v_j(z), c_j x_j(z), d_j y_j(z)) \tag{19}$$

여기에서  $\lambda$ 는 복소 고유치이며, trial function  $u_j, v_j, x_j, y_j$ 는 구조물의 경계조건을 최대한 만족시킬 수 있는 admissible 함수이다.

확장된 Galerkin 방법(EGM: extended Galerkin method)을 적용하기 위해 식 (18)을 해밀턴 원리식 (3)에 대입한 후에  $z$ -좌표에 대하여 적분을 수행하면 다음과 같은 행렬식을 얻는다.

$$[\lambda^2 [M] + \lambda [C + G] + [K]]\{Q\} = \{0\} \tag{20}$$

$$\{Q\} = \{a_j, b_j, c_j, d_j\}^T$$

위 식에서  $\{Q\}$ 는  $(4N \times 1)$  상수벡터,  $[M]$ 은 질량행렬,  $[G]$ 는 gyroscopic 행렬,  $[C]$ 는 베어링 감쇠행렬, 그리고  $[K]$ 는 축과 베어링의 강성행렬로서 크기는 모두  $(4N \times 4N)$ 이다(부록 참조).

식 (20)으로부터 다음의 특성방정식을 구할 수 있으며, 여기에서 복소 고유치를 구할 수 있다.

$$\det([M]\lambda^2 + [C + G]\lambda + [K]) = 0 \tag{21}$$

### 4. 실험

Fig. 3은 실험에 사용된 실험 장치와 시편을 나타내며 재료의 물성치는 Table 1에 제시하였다.

시편을 스폰지 위에 놓고 0~5kHz의 가진변위를 갖는 충격 해머를 통해 5개 지점을 타격하였고 이때 발생한 진동신호 (시간의 함수)를 가속도계를 통



Fig. 3 Experiment setup and specimen

Table 1 Material properties

Model	SM45C	
Density	$\rho$	7850 kg/m <sup>3</sup>
Elastic modulus	E	2.05+E11 N/m <sup>2</sup>
Shear modulus	G	8.0+E10 N/m <sup>2</sup>
Poisson's ratio	$\nu$	0.29

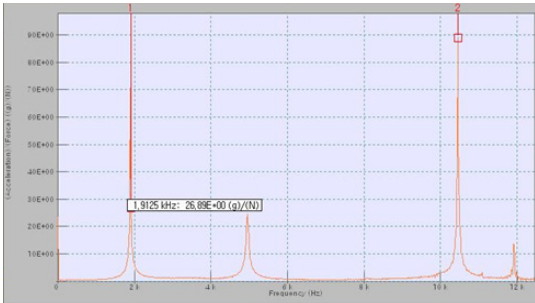


Fig. 4 Experiment result(frequency spectrum)

Table 2 Experiment results(natural frequencies)

Mode	Natural frequency
1st	1.9125 kHz
2nd	4.9625 kHz
3rd	10.45 kHz

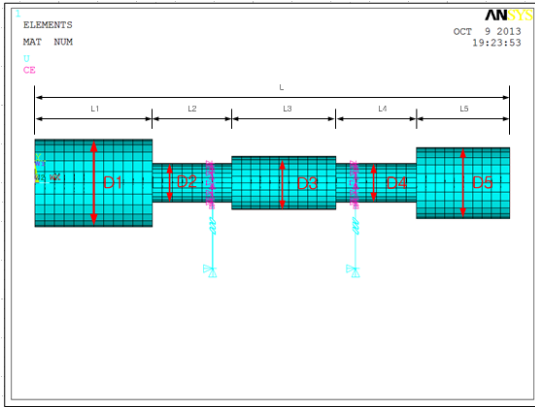


Fig. 5 ANSYS FEM model

하여 검출하였다. 이 시간신호를 FFT 과정을 거쳐 주파수 스펙트럼으로 변환한 실험결과를 Fig. 4 (frequency spectrum)와 Table 2(고유진동수)에 나타내었다.

### 5. 유한요소 해석

Fig. 5는 유한요소 해석에 사용된 해석 모델이다.

Tables 3, 4는 각각 베어링이 없는 경우와 있는 경우에 대하여 ANSYS 유한요소 모델로부터 구한 1, 2차 고유진동수와 모드형상을 나타내고 있다.

Table 3 Natural frequencies and mode shapes from FEM model(without bearing)

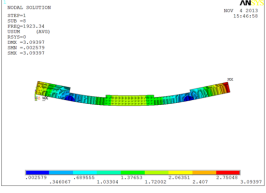
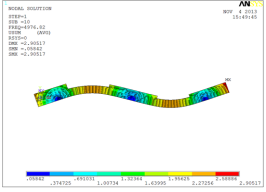
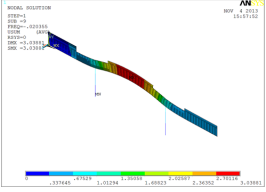
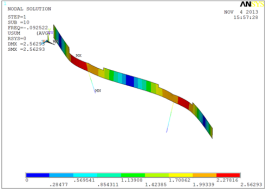
FEM model	
Mode number	1
Mode shape	
FEM	1923.34 Hz
Mode number	2
Mode shape	
FEM	4976.82 Hz

Table 4 Natural frequencies and mode shapes from FEM model(with bearing)

FEM model	
Mode number	1
Mode shape	
FEM	1553.6 Hz
Mode number	2
Mode shape	
FEM	1950.4 Hz

### 6. 결과비교

Tables 5,6,7에서  $\Omega = 0, P = 0$ 인 경우에 대한 free-

**Table 5** Comparison of natural frequencies(Hz) of a shaft without bearing

Mode	Experiment	TB model	Difference (%)	FEM	Difference (%)
1st	1912.50	1975.05	3.29 %	1923.30	0.57 %
2nd	4962.50	5130.84	3.32 %	4976.80	0.28 %
3rd	10450	10947.10	4.75 %	10555	1.00 %

**Table 6** Comparison of natural frequencies(Hz) of a shaft, bearing stiffness included ( $K_{xx} = 4.5 \times 10^8, K_{yy} = 2.5 \times 10^8$ )

Mode	TB model	FEM	Difference
1st B	1566.365	1520.1	3.02 %
1st F	1581.779	1534.4	3.06 %
2nd B	1760.031	1727.1	1.91 %
2nd F	1839.004	1800.8	2.16 %
3rd B	5642.092	5537.3	1.90 %
3rd F	6501.051	6359.9	2.23 %

**Table 7** Comparison of natural frequencies(Hz) of a shaft, bearing stiffness & damping included ( $K_{xx} = 4.5 \times 10^8, K_{yy} = 2.5 \times 10^8, C_{xx} = 5 \times 10^7, C_{yy} = 7 \times 10^7$ )

Mode	TB model	FEM	Difference
1st B	1598.553 Hz	1553.4 Hz	2.70 %
1st F	1598.553 Hz	1553.6 Hz	2.70 %
2nd B	1955.219 Hz	1950.4 Hz	0.25 %
2nd F	1955.219 Hz	1952.8 Hz	0.25 %
3rd B	7996.026 Hz	8081.3 Hz	1.05 %
3rd F	7996.026 Hz	8094.0 Hz	1.21 %

free 상태에서 베어링의 유무에 따른 1, 2, 3차 고유진동수를 비교하였고 베어링의 강성(N/m)과 감쇠(N\*sec/m)는 틸팅 패드 저널 베어링의 데이터를 참고하였다.

Table 5에서 베어링이 없는 경우에 대하여 Timoshenko 불균일 단면 보 모델(이하 TB 모델) 해석결과, 실험결과, 그리고 FEM 해석결과를 비교하였다. 표에서 알 수 있듯이 TB 모델로부터 구한 결과가 실험 및 FEM 해석결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Table 6은 베어링 강성만을 고려한 경우에 TB 모델과 FEM 해석결과를 비교하였으며

TB 모델은 FEM 해석결과와 매우 유사한 결과를 산출하였다. 그리고 베어링 강성의 이방성으로 인하여 forward frequency(F)와 backward frequency(b)가 분기되는 것을 확인할 수 있다. Table 7은 베어링의 강성과 감쇠를 모두 고려한 경우에 TB 모델과 FEM 해석결과를 비교하였다. 이 경우에도 TB 모델은 FEM 해석결과와 매우 유사한 결과를 산출하였으며 둘 사이의 차이가 오히려 감소하였다. 그리고 이 경우에도 베어링 강성 및 감쇠의 이방성으로 인하여 forward & backward frequency가 분기되는 것을 확인할 수 있다. 따라서 이 TB모델은 베어링의 강성과 감쇠도 상당히 정확하게 모사하고 있는 것으로 판단된다.

Figs. 6~8은 베어링의 강성 및 감쇠 계수 변화에 따른 무차원 회전속도( $\bar{\Omega} \equiv \Omega/\hat{\omega}$ )와 무차원 고유진동수( $\bar{\omega} \equiv \omega/\hat{\omega}$ )의 상관관계를 나타내고 있다. 여기에서  $\hat{\omega}$ 는  $P=0, \Omega=0$ 일 때의 고유진동수를 뜻한다. Fig. 6은 회전속도  $\bar{\Omega}$ 의 증가에 따른 고유진동수  $\bar{\omega}_i$ 의 변화에 대하여 보이고 있다<sup>(13)</sup>.

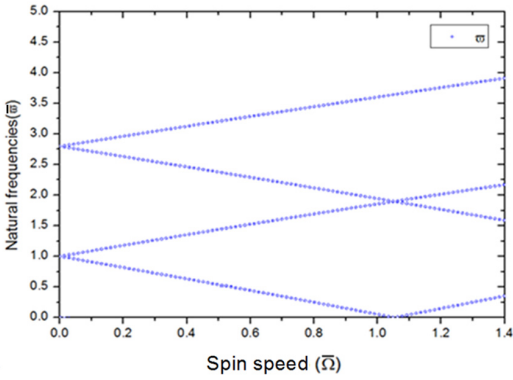
회전에 의한 코리올리 힘(식) 8, 9의 속도를 포함하고 있는 항)에 의하여 두 개의 가지(branches)가 나타나는 고유진동수 분기(bifurcation)가 발생한다.

이러한 고유진동수 가지 중에서 낮은 가지의 고유진동수가 0이 되는 최소의 회전속도를 임계회전속도(critical spinning speed)  $\bar{\Omega}_{cr}$ 라 하며 이 회전속도에서 whirling의 진폭이 시간에 따라 지수함수적으로 증가하는 정적불안정 현상인 다이버전스(발산, divergency instability)가 발생한다. Divergency instability는 고유치의 허수부가 영이 되고 실수부가 양수가 되어 변위가 시간에 따라 지수함수의 형태로 계속적으로 증가하는 불안정성을 의미한다.

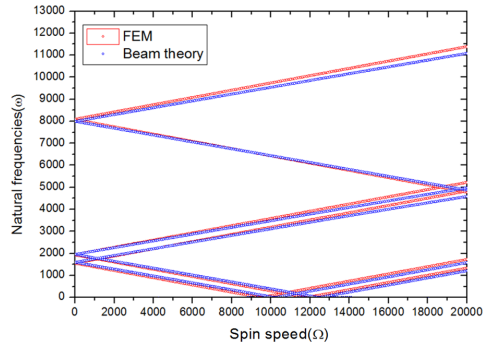
Fig. 7에서 베어링 강성비에 따른 고유진동수 변화를 도시하였다. 베어링의 수평방향 강성과 수직방향 강성의 비( $K = K_{xx}/K_{yy}$ )가 작아지면 고유진동수가 감소함을 알 수 있다<sup>(14)</sup>. 또한 강성비가 1에서 멀어질수록 다이버전스 불안정 영역이 증가함을 확인할 수 있으며 베어링 강성비  $K=1$ 일 때에는 단지 한 점의 불안정 회전속도가 존재한다.

Fig. 8에서 베어링 감쇠가 증가함에 따라 불안정 영역이 감소하는 것을 확인할 수 있다.

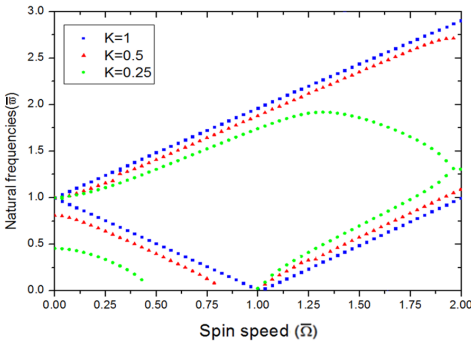
Fig. 9는 베어링 강성과 감쇠가 모두 고려된 경우에



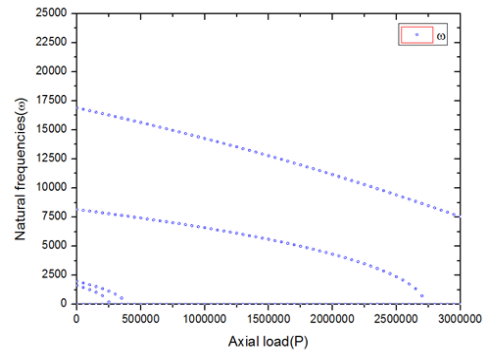
**Fig. 6** Non-dimensional natural frequencies vs. spin speed (without bearing)



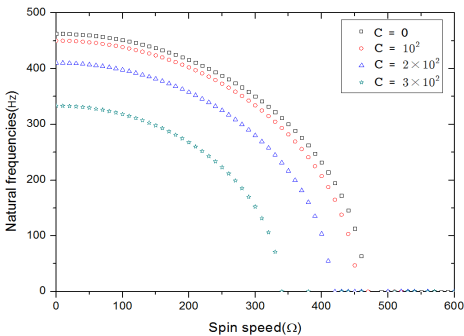
**Fig. 9** Comparison of natural frequencies vs. spin speed for TB model and FEM  
 $(K_{xx} = 4.5 \times 10^8, K_{yy} = 2.5 \times 10^8,$   
 $C_{xx} = 5 \times 10^7, C_{yy} = 7 \times 10^7)$



**Fig. 7** Non-dimensional natural frequencies vs. non-dimensional spin speed for different bearing stiffness ratios ( $K = K_{xx}/K_{yy}$ )



**Fig. 10** Natural frequencies vs. axial load  
 $(K_{xx} = 4.5 \times 10^8, K_{yy} = 2.5 \times 10^8,$   
 $C_{xx} = 5 \times 10^7, C_{yy} = 7 \times 10^7)$



**Fig. 8** Non-dimensional natural frequencies vs. non-dimensional spin speed for different bearing damping coefficients

TB 모델과 FEM 해석 결과 값이 상당히 유사함을 보이고 있으며, 따라서 이 논문에서 정립된 TB 모델의 신뢰도를 확인할 수 있었다.

Fig. 10은 축 하중  $P$ 의 증가에 따른 고유진동수의 변화를 보여주고 있으며, 축 하중이 증가함에 따라 고유진동수가 감소하며, 특정한  $P$ 값에서 고유진동수가 0으로 접근하게 되며 이때의  $P$ 를 임계하중 (critical axial load)이라 하며  $P_c$ 로 표현한다.

### 7. 결 론

다단 형상을 가지며 양단에 임펠러가 부착되어 축방향의 하중이 작용하는 복잡한 회전축계를 Timoshenko 보 이론에 입각하여 모델링하고 이를 실험과 유한요소 해석을 통하여 구한 결과와 비교함으로써 Timoshenko 보 모델의 신뢰성을 검증하였다.

이 연구를 통하여 베어링의 강성이 고려되면 시

시스템의 전체 강성이 증가하여(부록의  $K_{11}$ ,  $K_{22}$ 에 대한 식 참조) 고유진동수는 증가하고, 베어링의 감쇠에 의해 고유진동수 ( $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ )가 감소하는 사실을 확인 할 수 있었다. 베어링의 강성이 이방성인 경우에는 등방성인 경우와 달리 불안정 영역이 접이 아닌 영역(구간)으로 나타난다. 또한 이방성에 비례하여 불안정 영역이 증가하며, 베어링의 감쇠 값이 증가하면 불안정 영역이 감소한다.

회전에 따른 코리올리 가속도에 의해서 고유진동수 분기가 발생하며 이때의 backward whirling 고유진동수가 0이 되는 임계 회전속도 변화 경향을 고찰하였다. 축 하중  $P$ 가 증가함에 따라 고유진동수가 감소함을 확인하였고, 고유진동수가 0이 되는 임계하중(critical axial load)  $P_{cr}$ 를 확인하였다.

### 후 기

이 연구는 교육부와 한국연구재단의 지역혁신인력 양성사업으로 수행된 연구결과임(No.2012026181).

### References

(1) Meirovitch, L., 1974, A New Method of Solution of Eigenvalue Problems for Gyroscopic Systems, AIAA Journal, Vol. 12, pp. 1337~1342.  
 (2) Lancaster, P., 1972, Lambda-matrices and Vibration Systems, pergamon Press. Oxford, England, 7.7 Sec.  
 (3) Linkins, P. W., 1972, Finite Element Appedage Equations for Hybrid Coordinate Dynamic Analysis, International Journal of Solids and Structures, Vol. 8, Issue 5, pp. 709~731.  
 (4) Patel, J. S. and Seltzer, S. M., 1972, Complex Eigenvalue Analysis of Rotating Structures in NASTRAN ; User's Experiences NASA TMS-2637, pp. 197~234.  
 (5) Nelson, H. D., 1980, A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, Journal of Mechanical Design, Vol. 102, pp. 793~803.  
 (6) Kumar, C. and Rastogi, V., 2012, Vibration Analysis of Multi-rotor System through Extended Lagrangian Formalism, World Journal of Modelling and

Simulation, Vol. 8, pp. 103~110.

(7) Chasalevris, A. and Dohnal, F., 2014, Vibration Quenching in a Large Scale Rotor-bearing System Using Journal Bearings with Variable Geometry, Journal of Sound and Vibration, Vol. 333, pp. 2087~2099.  
 (8) Park, J.-H., Hong, S.-W., Lee, C. and Kim, J.-W., 1998, An Exact Modeling Method for Dynamic Analysis of Multi-stepped Rotor Systems, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 200~205.  
 (9) Jun, O. S., 2002, Using of Transfer Matrix for Shaft Element and Vibration Analysis, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 12, No. 2, pp. 161~169.  
 (10) Koo, K.-N., 2011, Effect of Axial Loads on Natural Frequencies of Timoshenko Beam, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 6, pp. 580~586.  
 (11) Yang, B. S. and Choi, W. H., 1992, A Hybrid Method for Vibration Analysis of Rotor System, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 2, No. 4, pp. 265~272.  
 (12) Song, O. S. and Seo, J.-S., 2013, Vibration Analysis of a Multi-stage Nonuniform Shaft, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 506~508.  
 (13) Kim, B. O., Lee, A. S. and Noh, M. K., 2007, A Rotordynamic Analysis of a Dry Vacuum Pump Rotor-bearing System for High-speed Operation, Journal of Fluid Machinery, Vol. 10, No. 3, pp. 47~54.  
 (14) Lee, C.-W., 1993, Vibration Analysis of Rotor, Kluwer Academic Publishers.

### 부 록

A.1 식 (20)의 행렬, 행렬 및 질량계수

$$M_N = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{bmatrix}$$

$$C_N = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$G_N = \begin{bmatrix} 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ G_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_N = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & K_{24} \\ K_{31} & 0 & K_{33} & 0 \\ 0 & K_{42} & 0 & K_{44} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \int_0^L m(z) u_i u_j dz$$

$$M_{22} = \int_0^L m(z) v_i v_j dz$$

$$M_{33} = \int_0^L m(z) y_i y_j dz$$

$$M_{44} = \int_0^L m(z) x_i x_j dz$$

$$G_{12} = \int_0^L -2\Omega m(z) v_j u_i dz$$

$$G_{21} = \int_0^L 2\Omega m(z) u_j v_i dz$$

$$C_{11} = \int_0^L C_{xx} \sum \delta(z - z_i) u_i u_j dz$$

$$C_{22} = \int_0^L C_{yy} \sum \delta(z - z_i) v_i v_j dz$$

$$K_{11} = \int_0^L [k^2 GA(z) u_i' u_j' - m(z) \Omega^2 u_i u_j] dz + \sum k_{xx} \delta(z - z_i) u_i u_j - P u_i' u_j'$$

$$K_{22} = \int_0^L [k^2 GA(z) v_i' v_j' - m(z) \Omega^2 v_i v_j + \sum k_{yy} \delta(z - z_i) v_i v_j - P v_i' v_j'] dz$$

$$K_{33} = \int_0^L EI(z) y_i' y_j' + k^2 GA(z) y_i y_j dz$$

$$K_{44} = \int_0^L EI(z) x_i' x_j' + k^2 GA(z) x_i x_j dz$$

$$K_{13} = \int_0^L k^2 GA(z) u_i y_j dz$$

$$K_{24} = \int_0^L k^2 GA(z) v_i x_j dz$$

$$K_{31} = \int_0^L k^2 GA(z) y_i u_j dz$$

$$K_{42} = \int_0^L k^2 GA(z) x_i v_j dz$$



**Jungseok Seo** received his B.S. and M.S. degree in Mechanical Engineering from Chungnam National University. His research interests encompass vibration and control of composite, rotor-dynamics.



**Ohseop Song** received his B.S. degree from the Dept. of Mechanical Design Engineering at Seoul National University and Master's degree in Mechanical Engineering at New Jersey Institute of Technology. His Ph.D.

degree was awarded by Virginia Polytechnic Institute & State University. He is currently a professor in the Dept. of Mechanical Engineering at Chungnam National University, Daejeon, Korea. His research interests encompass vibration and control of composite structures, instability of nanopipe, and rotordynamics.