신뢰성응용연구
제14권, 제4호. pp.220-224, 2014

와이불 수명분포를 갖는 제품에 대한 베이지안 신뢰성 입증시험 설계*

권 영 일†

청주대학교 산업공학과

Design of Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstration Test for Products with Weibull Lifetime Distribution

Young Il Kwon†

Department of Industrial Engineering, Cheongju University

A Bayesian zero-failure reliability demonstration test method for products with Weibull lifetime distribution is presented. Inverted gamma prior distribution for the scale parameter of the Weibull distribution is used to design the Bayesian test plan and selecting a prior distribution using a prior test information is discussed. A test procedure with zero-failure acceptance criterion is developed that guarantee specified reliability of a product with given confidence level. An example is provided to illustrate the use of the developed Bayesian reliability demonstration test method.

Keywords: Bayesian reliability demonstration test(베이지안 신뢰성 입증시험), Weibull distribution(와이불분포), inverted gamma distribution(역감마분포), zero-failure acceptance test(무고장시험), consumer’s risk(소비자위험), confidence level(신뢰수준)

1. 서 론

오늘날 자동차, 가전제품, 산업용 설비 등 대부분의 내구제품에 대한 소비자 선택기준에 있어 신뢰성이 가장 중요한 항목의 하나로 부상되고 있으며, 상업용 또는 군수용 제품이나 장비, 부품의 구매계약 규정에도 신뢰성 요구사항을 포함시키는 것이 일반화 되고 있다. 통상 신뢰성 요구조건을 입증하기 위한 시험(reliability demonstration test)에는 오랜 시간과 많은 비용이 소요된다. 그에 반해 제품이나 부품의 수명주기가 갈수록 짧아짐에 따라 신뢰성 입증시험에 소요되는 시간의 단축 필요성은 더욱 증가하고 있다. 이러한 상황에서 생산자위험(producer’s risk)과 소비자위험(consumer’s risk) 모두를 만족하는 시험방식 대신 시료수와 시험시간의 단축을 위해 소비자위험만을 보증하고, 무고장 합격기준을 적용하는 시험방식(zero-failure acceptance test)이 선호되고 있다.

만약 시험 대상제품이나 부품의 신뢰성에 대한 사전정보를 구할 수 있다면, 이 정보를 사전분포(prior distribution)로 활용한 베이지안 시험방법을 적용함으로써 시료수나 시험시간을 추가로 단축할 수 있다. Martz and Waller(1979)는 수명이 지수분포를 따르는 제품에 대해, 고장률의 사전분포로서 감마분포(gamma distribution)를 사용하여 소비자위험만을 보증하는 무고장 신뢰성 입증시험방식을 개발하였으며, 생산자와 소비자 위험을 모두 보증하는 다양한 베이지안 시험방식들에 대한 연구결과들을 소개하고 있다. Kwon(1996)은 보증정책 하에 판매되는 제품에 대해 보증비용과 시험비용을 고려한 경제적인 베이지안 수명시험방식을 개발하였으며, 수명이 지수분포를 따르는 제품에 대해 설계수명 신뢰도의 사전분포로서 베타분포를 적용한 무고장 신뢰성 입증시험방식과 그 활용방안을 제시하였다(2013). 그리고 다수의 부품으로 구성된 시스템의 신뢰도 입증을 위한 시험설계를 위해 부품의 신뢰성 정보나 시험정보로부터 시스템 신뢰도의 사전정보를 도출하고, 이 사전정보를 시스템 신뢰성 입증시험

* 이 논문은 2014-2016학년도에 청주대학교 산업과학연구소가 지원한 학술연구조성비(특별연구과제)에 의해 연구되었음.
† yikwon@cju.ac.kr
2014년 9월 3일 접수; 2014년 10월 26일 수정본 접수; 2014년 10월 30일 게재 확정.

설계에 활용하는 베이지안 시험방법들이 Martz and Waller(1988, 1990), Coolen *et al*.(2005), Rahrouh(2005), 그리고 Guo *et al*.(2010) 등에 의해 연구되었다.

본 연구에서는 형상모수(shape parameter)가 알려진 와이불 수명분포를 따르는 제품에 대한 신뢰성 입증시험 설계문제를 다룬다. 먼저 대상 제품에 대한 사전시험정보를 활용하여 와이불 분포의 척도모수(scale parameter)에 대한 사전분포를 도출하고, 이 사전정보를 활용한 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험방식을 설계한다. 척도모수에 대한 사전분포로서 공액사전분포(conjugate prior distribution)인 역감마 분포(inverted gamma distribution)를 사용하였으며, 특정 설계수명(design life)을 규정된 신뢰수준(confidence level)으로 보증하는 입증시험방식을 설계하고 적용사례를 제시하였다.

2. 비 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험

본 연구에서는 수명이 와이불분포를 따르는 제품이나 부품의 신뢰도 입증을 위해, 설계수명 t_d에서 요구되는 신뢰도 r_d를 신뢰수준 CL로 보증하는 무고장 신뢰성 시험방식을 다룬다. 와이불 수명분포를 따르는 제품에 대한 신뢰성 입증시험의 설계에 있어서 일반적으로 형상모수 m은 대상부품에 대한 과거의 사용경험이나 시험자료로부터 추정하여 사용할 수 있다. 통상 신뢰성 입증시험에서와 같이 시료수가 매우 적거나 고장이 거의 관측되지 않는 상황에서 형상모수 값이 미지인 와이불 분석을 수행할 경우 결과의 불확실성(uncertainty)이 크고 의미 있는 분석이 불가능할 수도 있다. 이와 같은 경우에는 시험부품의 특성이나 과거 경험으로부터 도출된 형상모수 값의 추정치를 사용하여 분석하는 것이 일반적이며, 분석결과의 불확실성을 크게 감소시키는 것으로 알려져 있다(Abernethy, 2000). 따라서 본 연구에서는 와이불분포의 형상모수 m값을 알고 있다고 가정한다. 참고로 Bloch and Geitner (1997), 그리고 Barringer and Associates(2010)에서 다양한 부품들에 대한 고장모드별 형상모수 값에 대한 자료를 제시하고 있다.

비 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험(non-Bayesian zero-failure reliability demonstration test)에서는 크기 n의 샘플로 동시에 시험을 시작하여 시간 t_u동안 고장이 없으면 합격시키고, 고장이 하나 이상 발생하면 불합격시키는 판정기준을 사용한다. 수명이 와이불 분포를 따를 때 설계수명 t_d에서 요구되는 신뢰도 r_d를 신뢰수준 CL로 보증하는 무고장 시험의 시료수 n과 시험시간 t_u의 관계는 다음과 같이 구해진다(Abernethy, 2000).

$$t_u = t_d\left[\frac{\ln(1-CL)}{n\times \ln r_d}\right]^{1/m} \tag{1}$$

3. 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험

3.1 사전분포의 선택

본 연구에서는 일반적인 무고장 신뢰성 입증시험에서와 같이 와이불 수명분포의 형상모수는 알고 있다고 가정한다. 형상모수가 m, 척도모수가 η인 와이불 분포에서 $\theta=\eta^m$으로 두면 수명 T의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(t) = \frac{mt^{m-1}}{\theta}e^{-\frac{t^m}{\theta}}, \quad t>0 \tag{2}$$

베이지안 시험방식 설계를 위해 모수 θ에 대한 사전분포로서 공액사전분포(conjugate prior distribution)인 역감마 분포를 사용한다. 모수가 α, β인 역감마 분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$g(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{\beta}{\theta}}, \quad \theta>0. \tag{3}$$

Waller *et al*.(1977)은 감마 사전분포의 모수들을 선택하는 방법들을 제시하고 있다. 모수 θ에 대한 사전분포로서 역감마 분포를 사용하는 것은 $\lambda=1/\theta$에 대해 감마 사전분포를 적용하는 것과 동일하다. Waller *et al*.의 방법을 적용하여 역감마 사전분포의 모수를 결정하기 위해서는 서로 다른 두 확률값 p_1, p_2에 대해 $P(\Theta<\theta_1)=p_1$, $P(\Theta<\theta_2)=p_2$인 θ_1, θ_2 값에 대한 정보를 필요로 한다. θ_1, θ_2에 대한 가용한 정보를 적용하여 위 두 식을 만족하는 α, β를 결정함으로써 역감마 사전분포의 모수 값들을 구할 수 있다.

만약 대상 부품의 무고장 사전시험 정보가 존재한다면, 이들 정보를 이용하여 이 모수들을 구할 수도 있다. n_0개의 제품이 시간 t_0까지 고장 없이 사용 또는 시험되었다는 사전정보가 있을 경우, 이 정보와 신뢰수준 CL, 그리고 θ의 $100\times CL$ %신뢰하한과의 관계로부터 다음의 관계식이 성립한다(Guo *et al*., 2010).

$$[P(T>t_0)]^n = e^{-\frac{n_0t_0^m}{\theta}} = \Pr\{\Theta<\theta\} = 1-CL \tag{4}$$

따라서 Θ의 분포함수와 확률밀도함수는 각각

$$G(\theta) = e^{-\frac{n_0t_0^m}{\theta}}, \ \theta>0' \tag{5}$$

$$g(\theta) = \frac{dG(\theta)}{d\theta} = \frac{n_0t_0^m}{\theta^2}e^{-\frac{n_0t_0^m}{\theta}}, \ \theta>0. \tag{6}$$

가 되어, Θ는 모수가 $\alpha=1$, $\beta=n_0t_0^m$인 역감마 분포를 따름을 알 수 있다.

3.2 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험 설계

수명이 식(2)의 와이불분포를 따르는 경우, 설계수명 t_d에서 요구되는 신뢰도 r_d를 신뢰수준 CL로 보증하기 위한 무고장 신뢰성 입증시험의 시료수 n과 시험시간 t_u의 관계는 식(1)과 같다.

여기서는 위와 동일한 시험방법을 사용하는 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험을 설계한다. 수명이 식(2)의 와이불분포를 따르는 경우, n개의 시료를 t_u동안 시험하는 수명시험에서 하나의 시료가 t_u동안 정상적으로 작동할 확률 r'은 다음과 같다.

$$r' = e^{-\frac{t_u^m}{\theta}} \tag{7}$$

n개의 시료 중 시간 t_u동안 고장 나는 시료 수 X는 모수가 $n,\ 1-r'$인 이항분포를 따르고 그 확률밀도함수는

$$h(x|\theta) = \binom{n}{x}(1-e^{-\frac{t_u^m}{\theta}})^x e^{-\frac{(n-x)t_u^m}{\theta}},\ x=0,1,\ \cdots,\ n \tag{8}$$

이 된다.

식(3)과 식(8)로부터 Θ의 사후분포(posterior distribution)는 다음과 같은 확률밀도함수를 갖게 된다.

$$\begin{aligned} g(\theta|x) &= \frac{h(x|\theta)g(\theta)}{\int_0^\infty h(x|\theta)g(\theta)d\theta} \\ &= \frac{\theta^{-(\alpha+1)}(1-e^{-\frac{t_u^m}{\theta}})^x e^{-\frac{\beta+(n-x)t_u^m}{\theta}}}{\int_0^\infty \theta^{-(\alpha+1)}(1-e^{-\frac{t_u^m}{\theta}})^x e^{-\frac{\beta+(n-x)t_u^m}{\theta}}d\theta},\ \theta>0. \end{aligned} \tag{9}$$

무고장 합격시험의 경우 $x=0$이므로

$$g(\theta|x=0) = \frac{(\beta+nt_u^m)^\alpha\theta^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{\beta+nt_u^m}{\theta}},\ \theta>0 \tag{10}$$

이 되어, Θ의 사후분포는 모수가 $\alpha,\ \beta+nt_u^m$인 역감마분포를 따름을 알 수 있다.

설계수명 t_d에서의 요구신뢰도 r_d를 신뢰수준 CL로 만족하는 조건은

$$P[R(t_d)>r_d] \ge CL \tag{11}$$

이며 이를 Θ에 대한 조건으로 표현하면

$$P[\Theta>\theta_d] \ge CL, \tag{12}$$

에서

$$\theta_d = \frac{t_d^m}{-\ln r_d} \tag{13}$$

이 된다. 따라서

$$\int_{\theta_d}^\infty g(\theta|x=0)d\theta = \int_{\theta_d}^\infty \frac{(\beta+nt_u^m)^\alpha\theta^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha)} \times e^{-\frac{\beta+nt_u^m}{\theta}}d\theta = CL \tag{14}$$

이 성립하는 nt_u^m 값을 구하여 그 값을 s^*라 하면 베이지안 무고장 시험방식 $(n,\ t_u)$는

$$nt_u^m = s^* \tag{15}$$

를 만족하는 관계식으로 부터 구해진다.

여기서 사전시험정보도 무고장 정보($x_0=0$)라고 가정하면, $\alpha=1,\ \beta=n_0t_0^m$ 이 되어 식(14)는

$$1-e^{-\frac{n_0t_0^m+nt_u^m}{\theta_d}} = CL \tag{16}$$

로 표현되고, 이로부터 시료수 n과 시험시간 t_u의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$nt_u^m = \frac{t_d^m\ln(1-CL)}{\ln r_d} - n_0t_0^m \tag{17}$$

만약 사전시험정보가 없다면, $n_0=0$ 가 되어 식(17)은 비베이지안 무고장 시험에서의 결과인 식(1)과 일치함을 알 수 있다.

한편 신뢰성 입증시험에서 시험시간의 단축을 위해 가속시험을 적용할 수 있다. 가속계수(acceleration factor)가 AF인 가속시험에서의 시험시간을 t_a라 하면, $t_a=t_u/AF$이므로 식(15)에서 시료수 n과 무고장 가속시험시간 t_a의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$nt_a^m = \frac{s^*}{AF^m} \tag{18}$$

또한 사전시험정보도 무고장 정보인 경우 식(17)에서 n과 t_a의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$nt_a^m = \left(\frac{t_d}{AF}\right)^m\frac{\ln(1-CL)}{\ln r_d} - n_0\left(\frac{t_0}{AF}\right)^m \tag{19}$$

4. 적용예제

형상모수가 $m=1.5$인 와이불 수명분포를 따르는 한 부품에 대해 설계수명 $t_d=1{,}000$시간에서의 요구신뢰도 $r_d=0.95$

를 신뢰수준 $CL=0.9$로 입증하고자 한다. 먼저 비 베이지안 무고장 시험에서 시료수 n과 시험시간 t_u의 관계는 식 (1)에서 다음과 같이 구해진다.

$$nt_u^m = t_d^m\left[\frac{\ln(1-CL)}{\ln r_d}\right] = 1{,}000^{1.5}\times\frac{\ln(1-0.9)}{\ln 0.95} = 1{,}419{,}564$$

$n=30$개의 시료로 시험한다면 시험시간은 $t_u=1{,}308.2$ 시간이 된다. 즉 $n=30$개의 시료로 동시에 시험을 시작하여 30개 시료 모두 $t_u=1{,}308.2$시간 동안 고장없이 작동하면, 설계수명 $t_d=1{,}000$시간에서의 요구신뢰도 $r_d=0.95$를 신뢰수준 $CL=0.9$로 보증할 수 있다.

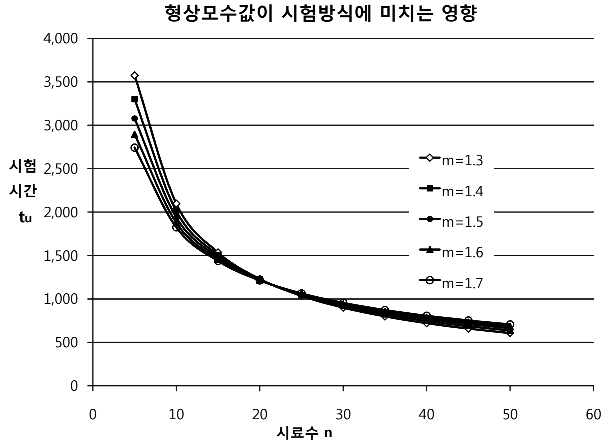
이 부품에 대해 $n_0=25$개의 부품이 $t_0=800$동안 고장 없이 작동했다는 사전정보가 있는 경우, 이 정보를 활용하여 베이지안 무고장 시험방식을 설계할 수 있다. 무고장 사전시험 정보를 활용한 베이지안 시험방식인 식(17)에 의해, 동일한 신뢰도를 동일한 신뢰수준으로 보증하는 베이지안 방식의 시료수 n과 시험시간 t_u의 관계는

$$nt_u^{1.5} = 1{,}000^{1.5}\times\frac{\ln(1-0.9)}{\ln 0.95} - 25\times 800^{1.5} = 853{,}879$$

이 된다.

비 베이지안 무고장 시험방식에서와 동일하게 $n=30$개의 시료로 시험한다면 시험시간은 $t_u=932.2$시간이 되어, 사전정보가 없는 시험방식에 비해 시험시간이 376시간(28.7%) 단축됨을 볼 수 있다. 또한 비 베이지안 시험방식에서와 동일한 시험시간 $t_u=1{,}308.2$를 사용하면 시료수는 $n=18$개가 되어 비 베이지안 시험방식에서의 시료수 $n=30$개에 비해 대폭 감소함을 볼 수 있다.

한편 여기서 구한 베이지안 시험방식은 형상모수 값을 알고 있는 상황을 다루고 있다. 다음 <그림 1>과 <표 1>은 형상모수 값의 변화에 따른 시험방식$(n,\ t_u)$를 나타내고 있다.



〈그림 1〉 와이불 수명분포 형상모수 값이 시험방식에 미치는 영향

<그림 1>에서 형상모수 값의 작은 변화에 대해서는 시험방식이 민감하게 변하지는 않는 것을 볼 수 있다. <표 1>에서 형상모수 값의 가능한 범위가 1.3에서 1.7인 경우, 전반적으로 시료수가 커질수록 형상모수 값의 변화가 시험시간에 미치는 영향이 작아짐을 볼 수 있다. 또한 시료수가 21개 이하 일 때는 형상모수가 커질수록 시험시간은 작아지고, 시료수가 22개 이상일 때는 반대로 형상모수가 커질수록 시험시간은 미세하게 증가함을 볼 수 있다. 따라서 본 예제에서 정확한 형상모수 값을 알 수 없고 가능한 형상모수 값의 범위가 1.3에서 1.7인 경우, $n=21$개 이하의 시료를 사용한다면 형상모수 값으로 1.3을 채택하고 $n=22$개 이상의 시료를 사용하는 경우는 1.7을 선택하는 것이 실제 범위 내의 정확한 형상모수 값에 대해 필요한 시험시간에 미달되지 않도록 하는 보수적인 시험방식이 될 것이다.

〈표 1〉 형상모수값 m과 시료수 n에 따른 시험시간 t_u

n	m = 1.3	m = 1.4	m = 1.5	m = 1.6	m = 1.7
1	12,325.9	10,417.3	9,000.4	7,917.0	7,067.7
2	7,232.0	6,349.4	5,669.9	5,133.6	4,701.1
3	5,294.2	4,752.8	4,327.0	3,984.4	3,703.6
4	4,243.2	3,870.0	3,571.8	3,328.7	3,127.0
5	3,573.9	3,299.8	3,078.1	2,895.4	2,742.3
6	3,106.3	2,896.9	2,725.8	2,583.6	2,463.5
7	2,758.9	2,594.8	2,459.6	2,346.3	2,249.9
8	2,489.6	2,358.8	2,250.1	2,158.4	2,079.9
9	2,274.0	2,168.5	2,080.2	2,005.2	1,940.7
10	2,096.9	2,011.3	1,939.1	1,877.4	1,824.1
11	1,948.7	1,878.9	1,819.7	1,768.9	1,724.6
12	1,822.5	1,765.7	1,717.2	1,675.2	1,638.6
13	1,713.7	1,667.6	1,627.9	1,593.5	1,563.2
14	1,618.8	1,581.6	1,549.5	1,521.4	1,496.5
15	1,535.1	1,505.5	1,479.8	1,457.2	1,437.0
16	1,460.7	1,437.7	1,417.5	1,399.5	1,383.5
17	1,394.2	1,376.8	1,361.3	1,347.5	1,335.0
18	1,334.2	1,321.7	1,310.4	1,300.2	1,290.9
19	1,279.9	1,271.6	1,264.0	1,257.0	1,250.5
20	1,230.3	1,225.9	1,221.5	1,217.4	1,213.3
21	1,185.0	1,183.9	1,182.5	1,180.8	1,179.0
22	1,143.4	1,145.2	1,146.3	1,147.0	1,147.1
23	1,104.9	1,109.4	1,112.9	1,115.5	1,117.5
24	1,069.3	1,076.2	1,081.7	1,086.3	1,089.9
25	1,036.3	1,045.3	1,052.7	1,058.9	1,064.1
26	1,005.5	1,016.4	1,025.5	1,033.2	1,039.8
27	976.7	989.4	1,000.0	1,009.2	1,017.0
28	949.8	964.0	976.1	986.5	995.4
29	924.5	940.1	953.5	965.1	975.1
30	900.7	917.6	932.2	944.8	955.8

5. 결 론

본 연구에서는 수명이 와이불분포를 따르는 제품에 대한

베이지안 무고장 신뢰성 입증시험방법을 제시하였다. 베이지안 시험방식 설계를 위해 사전분포로서 공액 사전분포인 역감마 분포를 사용하여, 설계수명에서 규정된 신뢰도를 주어진 신뢰수준으로 보증하는 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험방식을 개발하였다. 예제를 통해 신뢰도 입증시험 설계에 사전정보를 활용함으로써 시험 시료수와 시험 시간을 크게 단축시키는 효과를 확인할 수 있었으며, 정확한 형상모수 값을 알 수 없는 경우 가능한 형상모수 값의 범위 내에서 보수적으로 형상모수 값을 선택하는 방안을 제시하였다. 현재 기계, 자동차, 전기 부품 등 다양한 부품과 제품의 신뢰성 입증을 위해 널리 사용되고 있는 비 베이지안 무고장 시험에서 예기치 않은 사고로 시험이 중도에 중단 된 경우에도, 본 연구의 결과를 그대로 적용하여 최초 보증하고자 했던 동일한 신뢰도를 동일한 신뢰수준으로 보증하는 추가시험을 설계할 수 있다.

참고문헌

[1] 권영일 (2013), 베이지안 신뢰성입증시험 설계와 활용, 신뢰성응용연구, 제13권, 제1호, pp. 1-10.

[2] Abernethy, R. B. (2000), *The New Weibull Handbook*.

[3] Barringer and Associates (2010), *Weibull Database*, http://www.barringer1.com.

[4] Bloch, H. P. and Geitner, F. K. (1997), *Machinery Failure Analysis and Troubleshooting*, Gulf Publishing Company, Houston, Texas.

[5] Coolen, F. P. A., Coolen-Schrijner, P. and Rahrouh, M. (2005), Bayesian Reliability Demonstration for Failure-Free Period, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 88, pp. 81-91.

[6] Guo, H., Honecker, S., Mettas, A. and Ogden, D. (2010), Reliability Estimation for One-Shot Systems with Zero Component Test Failures, *IEEE Reliability and Maintainability Symposium*, pp. 25-28.

[7] Kwon, Y. I. (1996), A Bayesian Life Test Sampling Plan for Products with Weibull Lifetime Distribution Sold Under Warranty, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 53, pp. 61-66.

[8] Martz, H. F. and Waller, R. A. (1979), A Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstration Testing Procedure, *Journal of Quality Technology*, Vol. 11, No. 3, pp. 128-138.

[9] Martz, H. F. and Waller, R. A. (1990), Bayesian Reliability Analysis of Complex Series/Parellel Systems of Binomial Subsystems and Component, *Technometrics*, Vol. 32, No. 4, pp. 407-416.

[10] Martz, H. F., Waller, R. A., and Fickas, E. T. (1988), Bayesian Reliability Analysis of Series Systems of Binomial Subsystems and Component, *Technometrics*, Vol. 30, No. 2, pp. 143-154.

[11] Rahrouh, M. (2005), *Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstration*, Phd. Thesis, Department of Mathematical Science, University of Durham England, UK.

[12] Waller, R. A., Johnson, M. M., Waterman, M. S., and Martz, H. F. (1977), Gamma Prior Distribution Selection for Bayesian Analysis of Failure Rate and Reliability, *Nuclear Systems Reliability Engineering and Risk Assessment*, Vol. 10, pp. 584-606.