Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 40, No. 4, pp. 424-427, August 2014.
ISSN 1225-0988 | EISSN 2234-6457
http://dx.doi.org/10.7232/JKIIE.2014.40.4.424

<Research Letter>

# 추후조달 배치생산을 위한 로트-사이징 문제에 대한 소고

강장하[1] · 김남기[2] · 최성용[3†]

[1]조선대학교 산업공학과 / [2]전남대학교 산업공학과 / [3]연세대학교 정경대학 경영학부

# Note : Lot-Sizing Problems with Backlogging for Batch Production

Jangha Kang[1] · Nam K. Kim[2] · Sungyong Choi[3]

[1]Department of Industrial Engineering, Chosun University
[2]Department of Industrial Engineering, Chonnam National University
[3]Division of Business Administration, College of Government and Business, Yonsei University

In this paper, we consider a production system in which the items are produced by batch. For a production planning of the system, we formulate a lot-sizing problem in which each production should be a multiple of a given unit batch and backlogging is allowed. We propose an optimal dynamic programming algorithm for the plan whose complexity is $O(T^2)$ where T is the maximum number of periods in a plan.

***Keywords:*** Batch Production, Lot-Sizing, Optimal Algorithm, Backlogging

## 1. 서 론

배치생산(Batch production)은 생산시스템의 규모의 경제를 실현하기 위하여 기계의 용량 단위로 생산하거나, 또는 제품을 여러 단위씩 같이 생산하지 않으면 안 되는 설비 조업조건일 경우에 많이 발생한다. 본 논문에서는 제품을 항상 배치단위로 생산하는 공장에서의 생산계획에 대해서 다루고자 한다. 생산계획을 위한 수리모델로 로트-사이징(lot-sizing) 모형을 많이 이용한다. Wagner and Whitin(1958)의 초기 연구 이후 이 분야에 대한 관심이 지속적으로 이어져 왔다. 특히, Federgruen과 Tzur(1991), Wagelmans *et al.*(1992), 그리고 Aggarwal and Park(1993)에서 로트-사이징 문제에 대한 보다 효율적인 알고리즘이 개발되었다. Wagner and Whitin(1958)의 연구를 확장하여 다양한 생산시스템에 대한 연구가 있었다. 특히 생산능력에 제약이 있는 경우에 대하여 Florian and Klein(1971) 및 Florian *et al.*(1980)의 결과가 있고, 여러 공장에 대한 생산계획에 대하여 Zangwill(1969)이 논하였다.

본 연구에서는 Wagner and Whitin(1958)의 연구결과를 활용하여 배치생산 시스템의 생산계획을 위한 알고리즘을 제시하고자 한다. 제 2장에서 문제를 정의하고, 제 3장에서 최적성 원리를 파악하고, 이에 기초한 알고리즘을 제시하고자 한다. 마지막으로 제 4장에서 결론을 제시하고자 한다.

## 2. 배치 로트-사이징 문제

전체 계획기간의 크기는 $T$라고 둔다. 또한 앞으로의 논리 전개를 쉽게 하기 위하여 배치의 크기는 1이라고 가정한다. 그러면 배치 로트-사이징 문제를 위한 파라미터와 변수는 다음과 같다.

- $d_t$ : 기간 $t$에서의 수요량; 각 기간 마다 수요량은 0보다 크다고 가정한다($d_t > 0$); 기간 $i$에서 $j$까지의 수요의 합을 $d_{ij}$로

이 논문은 2009년도 조선대학교 학술연구비의 지원을 받아 연구되었음.
† 연락저자 : 최성용 교수, 220-710 강원도 원주시 연세대길 1 연세대학교 정의관 443호, Tel : 033-760-2334, Fax : 033-760-2918, E-mail : sungyong.choi@yonsei.ac.kr
2014년 3월 25일 접수; 2014년 5월 13일 수정본 접수; 2014년 5월 26일 게재 확정.

두기로 한다. 즉, $d_{ij}=d_i+d_{i+1}+\cdots+d_j$ 그리고 $i>j$이면 $d_{ij}=0$ 으로 둔다.

- $f_t$ : 기간 $t$에서의 셋업(주문) 비용
- $p_t$ : 기간 $t$에서의 단위 생산 비용
- $h_t$ : 기간 $t$에서의 단위 재고유지 비용; 수요의 합 $d_{ij}$와 마찬가지로 $h_{ij}=h_i+h_{i+1}+\cdots+h_j$로 두기로 한다.
- $b_t$ : 기간 $t$에서의 단위 추후조달 비용; $b_{ij}=b_i+b_{i+1}+\cdots+b_j$로 두기로 한다.
- $x_t$ : 기간 $t$에서의 생산량; 배치의 크기는 1이므로 생산량은 항상 1의 배수 즉, 정수값을 갖는다.
- $y_t$ : 기간 $t$에서의 생산유무를 나타내는 이진 변수; 기간 $t$에서 생산이 있으면 $y_t=1$, 그렇지 않으면 $y_t=0$이다.
- $s_t$ : 기간 $t$에서의 기말 재고수준; $s_t\geq 0$이면, 기간 $t$에서의 재고가 있음을 뜻하고, $s_t<0$이면 추후조달(backlogging)이 있어야 함을 뜻한다. $s_t^+=\max(0,s_t)$로 두고, $s_t^-=\max(0,-s_t)$로 두기로 한다.

배치 로트-사이징 문제는 다음과 같은 정수계획법 문제로 모델링된다.

$$\min\sum_{t=1}^{T}\left(f_t y_t+p_t x_t+h_t s_t^+ +b_t s_t^-\right) \tag{1}$$

subject to

$$s_{t-1}+x_t=d_t+s_t \qquad t=1,2,\cdots,T \tag{2}$$

$$x_t\leq \lceil d_{t,T}\rceil y_t \qquad t=1,2,\cdots,T \tag{3}$$

$$s_0=0,\ s_T=\lceil d_{1,T}\rceil-d_{1,T} \tag{4}$$

$$x_t\in Z^+,\ y_t\in\{0,1\} \qquad t=1,2,\cdots,T \tag{5}$$

목적함수는 식 (1)에서와 같이 모든 기간의 셋업, 단위생산 및 재고비용 총합이다. 식 (2)는 생산물량, 재고량 그리고 수요 사이의 균형방정식(balance equation)을 나타내고, 식 (3)은 기간 $t$에 생산이 있으면, $y_t$가 0보다 큰 값을 갖도록 한다. 계획구간 T에서 초기재고는 0으로 가정한다. 모든 기간에서 생산량은 정수이므로 총 생산량은 $\lceil d_{1,T}\rceil$이어야 하고, 수요를 충족하고 남게 되는 최종 기간의 기말재고는 식 (4)에서와 같이 $s_T=\lceil d_{1,T}\rceil-d_{1,T}$가 된다. 마지막으로, 식 (5)에서와 같이 생산량은 모두 0 이상의 정수 ($Z^+$)이어야 한다.

## 3. 추후조달이 없는 배치생산 문제

이 장에서는 우선 추후조달이 없는 경우, 즉 모든 기간 $t$에서 $s_t\geq 0$의 조건이 성립하는 경우를 살펴보기로 한다. 추후조달이 없는 문제에 있어 재고수준에 대한 가장 기본적인 성질은 다음과 같다.

**정리 1 :** 어떤 최적의 생산계획에서 기간 $t$에서 생산이 있다고 가정하자. 그러면 기간 $t$의 기초 재고량은 $s_{t-1}=\lceil d_{1,t-1}\rceil-d_{1,t-1}$이다.

(증명)

모순을 유도하여 증명을 하고자 한다. 즉, 위 정리를 위배하는 생산이 발생한 최초의기간이 $t$이고, 이 기간에서의 기초 재고량이 $\lceil d_{1,t-1}\rceil-d_{1,t-1}$ 아니라고 하자. 우선 기간 $t$이전에 마지막으로 생산이 발생하지 않았다고 가정하다. 그러면 모든 기간에서의 수요가 0보다 크다고 했으므로, $d_1>0$이다. 따라서 기간 1에서 생산이 일어나야 함으로 t = 1임을 알 수 있다. 기초재고량이 0이므로 ($s_{t-1}$=0), $s_{t-1}=\lceil d_{1,t-1}\rceil-d_{1,t-1}$이 성립함을 알 수 있다. 다음으로 기간 t 이전에 생산이 있는 경우를 살펴보자. 그리고 기간 $t$ 이전에 마지막으로 생산이 기간 $i\geq 1$에서 발생하였다고 가정한다. 만약, 기간 $i$에서 생산하여 기간 $t$의 수요를 만족하는 비용이 기간 $t$에서의 비용보다 작다면 $(p_i+h_{i,t-1}<p_t)$ 기간 $t$에서 생산할 물량을 모두 기간 $i$에서 생산하는 것이 더 저렴하다. 이는 본 정리의 앞선 가정에 위배된다. 따라서 기간 $t$에서의 비용이 더 저렴하여야 한다. 기간 $i$ 및 $t$에 대한 가정에 따라 우리는 다음과 같이 둘 수 있다:

$$s_{i-1}=\lceil d_{1,i-1}\rceil-d_{1,i-1}\ \text{그리고}\ s_{t-1}\neq\lceil d_{1,t-1}\rceil-d_{1,t-1}.$$

i) 우선 $s_{t-1}<\lceil d_{1,t-1}\rceil-d_{1,t-1}$라고 가정하자. 아래의 균형 방정식으로부터

$$s_{i-1}+x_i=d_{i,t-1}+s_{t-1}$$

다음의 부등식을 얻는다 :

$$\lceil d_{1,i-1}\rceil+x_i<\lceil d_{1,t-1}\rceil.$$

즉, 기간 1에서 $i$까지의 총 생산량이 $\lceil d_{1,t-1}\rceil$보다 작아야 함을 나타낸다. 그런데 모든 기간에서의 생산량은 정수 값을 가져야 하므로 구간 1에서 $i$까지의 총 생산량이 많아야 $\lceil d_{1,t-1}\rceil-1$임을 알 수 있다. 그런데 $\lceil d_{1,t-1}\rceil-1<d_{1,t-1}$이므로 현재의 생산계획은 실행불가능이다.

ii) 따라서 $s_{t-1}>\lceil d_{1,t-1}\rceil-d_{1,t-1}$인 경우만 가능하다. 기간 $t$의 기초재고가 $\lceil d_{1,t-1}\rceil-d_{1,t-1}$보다 커야 하므로 기간 1에서 $i$까지의 총 생산량은 $\lceil d_{1,t-1}\rceil$보다 커야 한다. 그런데 모든 기간에서의 생산량은 정수 값이라는 조건에 의하여 기간 1에서 $i$까지의 총 생산량이 $\lceil d_{1,t-1}\rceil+1$ 이상이어야 한다. 따라서 기간 $t$의 기초재고는 배치 사이즈 1보다 크다. 그런데 기간 $i$에서 생산하는 것보다 기간 $t$에서의 비용이 더 저렴하므로 기간 $i$에서 1배치를 줄이고, 기간 $t$에서 1배치 늘려도 실행 가능한 계획이며, 비용이 줄어든다. 이는 기존의 계획이 최적이 아님을 뜻한다. 따라서 모순에 직면하므로 이 정리는 참이다. □

다음으로 두 기간 $i$와 $t+1$에서 연속적으로 생산이 일어난다고 가정할 때, 기간 $i$에서의 생산량을 살펴보자. 정리 1에 의하여 기간 $i$의 기초재고는 $s_{i-1}=\lceil d_{1,i-1}\rceil-d_{1,i-1}$이고, 기간 $t$의 기말재고는 $s_t=\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,t}$이다. 균형방정식 $s_{i-1}+x_i=d_{i,t}+s_t$에 의하여

$$\begin{aligned} x_i &= d_{i,t}+s_t-s_{i-1} \\ &= d_{i,t}+(\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,t})-(\lceil d_{1,i-1}\rceil-d_{1,i-1}) \\ &= \lceil d_{1,t}\rceil-\lceil d_{1,i-1}\rceil \end{aligned}$$

따라서 다음의 결과가 성립한다.

**정리 2 :** 어떤 최적의 생산계획에서 기간 $i$와 $t+1$에서 연속적으로 생산이 있다고 가정하자. 그러면 기간 $i$의 생산량은 $x_i=\lceil d_{1,t}\rceil-\lceil d_{1,i-1}\rceil$ 이다.

$G(t+1)$를 기간 $t+1$에 생산이 있다는 가정 하에서 기간 1에서 $t$까지의 수요를 충족시키는 최저비용이라고 두자. 이 때, 기간 $t$의 기말재고량은 $\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,t}$이다. $G(t+1)$를 계산하기 위하여 기간 $i$에서 마지막 생산이 일어났다고 가정하자($i\le t$). 그러면 정리 2에 의하여 기간 $i$에서의 생산량은 $x_i=\lceil d_{1,t}\rceil-\lceil d_{1,i-1}\rceil$이고, 관련 비용은

$$f_i+p_i(\lceil d_{1,t}\rceil-\lceil d_{1,i-1}\rceil)+\sum_{k=i}^{t}h_k(\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,k})$$

이다. 식을 단순화시키기 위하여 $H_{i,t}$를 다음과 같이 두자 :

$$H_{i,t}=\sum_{k=i}^{t}h_k(\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,k}).$$

$H_{i,t}$ 값들은 $O(T^2)$ 시간 내에 모두 구할 수 있다. 그러면 다음의 동적계획법으로 배치-로트사이징 문제를 해결할 수 있다 :

$$\begin{aligned} &G(0)=0 \\ &G(t+1)=\min_{0\le i\le t}\left\{\begin{aligned}&G(i)+f_i+\\ &p_i(\lceil d_{1,t}\rceil-\lceil d_{1,i-1}\rceil)+H_{i,t}\end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

최적의 해는 $G(T+1)$을 계산하여 얻을 수 있다. 식 (2)에서 사용된 값 $H_{i,t}$는 모두 계산되었다고 가정하자. 그러면 $G(t+1)$ 값들은 식 (2)에 따라 $O(T^2)$ 시간에 모두 계산될 수 있다.

## 4. 추후조달이 있는 배치생산 문제

이 장에서는 우선 추후조달이 있는 경우, 기간 $t$에서 재고수준이 음이 될 수 있는 경우($s_t<0$)에 대하여 최적 알고리즘을 제시하고자 한다.

기간 $t$에서 생산이 발생한다는 것은 그 물량으로 t 이전 기간의 추후조달 요구를 수용하고 $t$ 이후 기간에서의 수요를 충족하기 위한 것이다. 이에 따라 본 연구에서는 다음과 같은 가정을 두기로 한다.

**가정 1** : 기간 $t$에서 생산이 있을 경우, t 이전 기간으로부터의 재고와 t 이후 기간으로부터의 추후조달은 없다. 다시 말해서 $s_{t-1}^{+}=0$이고, $s_t^{-}=0$이다.

이 가정으로부터 앞장의 정리 1과 유사하게 다음의 최적성을 증명할 수 있다.

**정리 3** : 어떤 최적의 생산계획에서 기간 i와 t에서 연속적으로 생산이 있다고 가정하자. 그러면 기초 재고량이 $\lceil d_{1,j-1}\rceil-d_{1,j-1}$이거나, 기말 재고량이 $\lfloor d_{1,j}\rfloor-d_{1,j}$인 기간 $j$가 $i$와 $t$사이에서 존재한다($i\le j\le t$).

(증명)

기간 j를 기준으로 재고에 의한 충족과 추후조달에 의한 충족의 두 구간으로 나뉜다고 가정하자. 즉, 기간 i에서 j-1까지는 추후조달이 없는 대신 재고만 있고, 기간 j에서 t-1까지는 추후조달만 있고, 재고는 없다고 가정하자(만약 이러한 기간 j가 없으면 생산 기간 i 또는 t가 가정 1에 위배된다). 모든 기간에서의 생산량은 정수 값이라는 조건에 의하여 기간 1에서 j-1까지의 총 생산량이 정수이고, 그 기간 동안의 생산으로 기간 1에서 j-1까지의 수요를 모두 충족하여야 하므로, 총 생산량은 $\lceil d_{1,j-1}\rceil$이거나 $\lfloor d_{1,j}\rfloor$이어야 한다. 만약, 생산량이 $\lceil d_{1,j-1}\rceil$이면, 기간 j의 기초재고량이 $\lceil d_{1,j-1}\rceil-d_{1,j-1}$이 되고, 생산량이 $\lfloor d_{1,j}\rfloor$이면, 기간 j의 기말재고량이 $\lfloor d_{1,j}\rfloor-d_{1,j}$이어야 한다. □

만약 기간 t이전에 생산기간이 없다고 하자. 기간 t의 생산으로 기간 1에서 j-1까지의 수요를 충족한다고 두자. 그러면 기간 t에서의 생산량은 $\lceil d_{1,j-1}\rceil$이거나 $\lfloor d_{1,j}\rfloor$이어야 한다. 따라서 이때에도 정리 3에서 가정하는 기간 j가 존재함을 알 수 있다.

함수 $F_1(t)$를 기간 1에서 t까지의 총생산량이 $\lceil d_{1,t}\rceil$일 때의 최저비용, 그리고 $F_0(t)$를 기간 1에서 t까지의 총생산량이 $\lfloor d_{1,t}\rfloor$일 때의 최저비용으로 두자. 또한 $F(t)$는 기간 t에서 생산이 있다는 가정 하에서 기간 1에서 t-1까지의 수요를 충족시키기고 기간 $t$의 수요의 일부를 위해 $\lfloor d_{1,t}\rfloor$의 양을 생산하는데 소요되는 최소비용으로 둔다. 따라서 (가정 1에 의하여) 기간 t에서 $d_{1,t}-\lfloor d_{1,t}\rfloor$에 해당하는 추가 생산이 있어야 한다.

우선 $F_1(t)$를 계산하는 방법에 대하여 알아보자. 1에서 t까지의 기간 중 가장 최근에 생산이 일어난 기간을 i라 두자. 기간 i에서 t까지의 수요량 $d_{i,t}$와 함께 기간 t의 재고 $\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,t}$

를 위하여 기간 i에 $d_{i,t}+\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,t}$의 물량을 확보하여야 한다. 따라서 기간 $i$에서 t-1까지의 재고비용은 다음과 같다 :

$$\sum_{k=i}^{t-1}h_k(\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,i-1}-d_{i,k}).$$

기간 i에서 기간 t까지의 수요량과, 기간 t의 재고물량 $\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,t}$을 위하여 $\lceil d_{1,t}\rceil-\lfloor d_{1,i}\rfloor$만큼 생산하였다고 가정하자(기간 t의 나머지 생산물량은 F(i)를 계산할 때 고려될 것이다). 그러면 기간 1에서 $i$까지의 나머지 생산량은 $\lfloor d_{1,i}\rfloor$가 되고, 기간 i에서의 기말 재고량은 $\lfloor d_{1,i}\rfloor-d_{1,i}$이다. 따라서 기간 1에서 기간 i까지의 비용은 $F(i)$로 둘 수 있다. 지금까지 고려한 모든 비용 요소로부터 우리는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다:

$$F_1(0)=0$$
$$F_1(t)=\min_{1\le i\le t-1}\left\{\begin{matrix}F(i)+f_i+p_i(\lceil d_{1,t}\rceil-\lfloor d_{1,i}\rfloor)+\\ \sum_{k=i}^{t-1}h_k(\lceil d_{1,t}\rceil-d_{1,i-1}-d_{i,k})\end{matrix}\right\}$$

$F_0(t)$도 $F_1(t)$와 유사한 방법으로 구해지며, 그 식은 다음과 같다 :

$$F_0(0)=0$$
$$F_0(t)=\min_{1\le i\le t-1}\left\{\begin{matrix}F(i)+f_i+p_i(\lfloor d_{1,t}\rfloor-\lfloor d_{1,i}\rfloor)+\\ \sum_{k=i}^{t-1}h_k(\lfloor d_{1,t}\rfloor-d_{1,i-1}-d_{i,k})\end{matrix}\right\}$$

다음으로 $F(t)$에 대한 식을 구하기로 한다. 기간 t 이전에 가장 최근에 추후조달이 없었던 기간을 i-1이라 두자. 즉, 기간 i부터 t-1까지는 추후조달이 발생하였다고 가정하자. 만약, 기간 1에서 i-1까지의 생산량이 $\lceil d_{1,t-1}\rceil$이면 그 기간 동안의 비용은 정의에 의하여 $F_1(i-1)$이고, 그렇지 않고 생산량이 $\lfloor d_{1,i}\rfloor$이면 그 비용은 $F_0(i)$이다.

우선 기간 1에서 i-1까지의 생산량이 $\lceil d_{1,t-1}\rceil$라고 두자. 그러면 기간 i의 초기의 재고는 $\lceil d_{1,t-1}\rceil-d_{1,i-1}$이며(정리 3), 기간 i에서 t-1까지의 수요를 위하여 다음의 물량이 필요하며 $d_{i,t-1}-(\lceil d_{1,i-1}\rceil-d_{1,i-1})$, 이에 대한 생산비용은

$$p_t(\lfloor d_{1,t}\rfloor-\lceil d_{1,i-1}\rceil)$$

이다. 또한 기간 i에서 t-1까지의 추후조달 비용은 다음과 같다 :

$$\sum_{k=i}^{t-1}b_k(d_{1,t-1}-\lceil d_{1,i-1}\rceil-d_{k+1,t-1}).$$

따라서 $F(t)$는 다음과 같이 계산된다 :

$$F(t)=\min_{1\le i\le t}\left\{\begin{matrix}F_1(i-1)+p_t(\lfloor d_{1,t}\rfloor-\lceil d_{1,i-1}\rceil)+\\ \sum_{k=i}^{t-1}b_k(d_{1,t-1}-\lceil d_{1,i-1}\rceil-d_{k+1,t-1})\end{matrix}\right\}.$$

기간 1에서 i-1까지의 생산량이 $\lfloor d_{1,i}\rfloor$인 경우도 위와 비슷한 방법으로 계산할 수 있으며, 다음과 같은 식이 유도된다 :

$$F(t)=\min_{1\le i\le t-1}\left\{\begin{matrix}F_0(i)+p_t(\lfloor d_{1,t}\rfloor-\lfloor d_{1,i}\rfloor)+\\ \sum_{k=i}^{t-1}b_k(d_{1,t-1}-\lfloor d_{1,i}\rfloor-d_{k+1,t-1})\end{matrix}\right\}.$$

위 식들에서 재고 및 추후조달 비용은 전처리로 $O(T^2)$ 시간 내에 모두 구할 수 있다. 그러한 값들이 모두 구하여지면 $F_0(t)$, $F_1(t)$ 그리고 $F(t)$들도 모두 $O(T^2)$ 시간 내에 구할 수 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서 배치생산을 하는 공장의 생산계획 문제를 다루었다. 이 문제를 로트-사이징 문제로 모델링하고, 최적성 원리를 도출한 후 최적 알고리즘을 개발하였다. 최적성 원리에서 중요한 성질은 현재 생산이 발생할 경우 이 기간에서의 기초 재고는 배치의 크기보다 항상 작아야 한다는 것이다. 이 성질에 기초하여 $O(T^2)$ 시간이 소요되는 최적 알고리즘이 가능하였다. 그러나 추후조달이 있는 문제에서는 생산량이 배치 크기의 배수라는 사실로부터 연속한 두 생산기간 사이의 특정 기간이 갖는 재고량 그리고 추후조달의 양의 조건으로부터 최적의 알고리즘을 구하였다.

현재의 연구에서 추후조달 알고리즘은 생산이 발생한 기간에서는 이전 기간으로부터의 재고가 없고, 이후 기간으로부터의 추후조달이 없다는 가정 하에서 구하였다. 따라서 향후의 연구에서는 이 가정이 없는 경우에 대한 연구가 중요 과제가 될 것이다.

## 참고문헌

Aggarwal, A. and Park, J. K. (1993), Improved algorithms for economic lot-size problems, *Operations Research*, **41**, 549-571.

Federgruen, A. and Tzur, M. (1991), A simple forward algorithm to solve general dynamic lot-sizing models with n periods in O(n log n) or O(n) Time, *Management Science*, **37**, 909-925.

Florian, M. and Klein, M. (1971), Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints, *Management Science*, **18**, 12-20.

Florian, M., Lenstra, J. K., and Rinnooy-Kan, A. (1980), Deterministic replenishment planning : algorithms and complexity, *Management Science*, **26**, 669-679.

Wagelmans, A. P. M., Van Hoesel, S., and Kolen, A. (1992), Economic lot sizing : an O(n log n) algorithm that runs in linear time in the Wagner-Whitin case, *Operations Research*, **40**, S145-S156.

Wagner, H. M. and Whitin, T. M. (1958), Dynamic version of the economic lot-size model, *Management Science*, **5**, 89-96.

Zangwill, W. I. (1969), A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size transportation system-a network approach, *Management Science*, **15**, 506-527.