Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 40, No. 4, pp. 396-403, August 2014.
ISSN 1225-0988 | EISSN 2234-6457
http://dx.doi.org/10.7232/JKIIE.2014.40.4.396

<Original Research Paper>

일반 다중선택 다분할 선형계획 배낭문제

원 중 연†

경기대학교 산업경영공학과

The Generalized Multiple-Choice Multi-Divisional Linear Programming Knapsack Problem

Joong-Yeon Won

Department of Industrial and Management Engineering, Kyonggi University, Suwon

The multi-divisional knapsack problem is defined as a binary knapsack problem where each mutually exclusive division has its own capacity. In this paper, we present an extension of the multi-divisional knapsack problem that has generalized multiple-choice constraints. We explore the linear programming relaxation (P) of this extended problem and identify some properties of problem (P). Then, we develop a transformation which converts the problem (P) into an LP knapsack problem and derive the optimal solutions of problem (P) from those of the converted LP knapsack problem. The solution procedures have a worst case computational complexity of order $O(n^2 \log n)$, where n is the total number of variables. We illustrate a numerical example and discuss some variations of problem (P).

Keywords: The Multi-Divisional Knapsack Problem, Generalized Multiple-Choice Constraints, Computational Complexity

1. 서 론

본 논문에서는 다음과 같이 표현되는 선형계획 문제 (P)를 연구한다.

$$\text{(P)}\quad \text{Maximize}\quad \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j \in N_i} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{subject to}\quad \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j \in N_i} a_{ij} x_{ij} \le b_0, \tag{2}$$

$$\Sigma_{j \in N_i} a_{ij} x_{ij} \le b_i,\ i \in I = \{1,\ 2, \cdots, m\}, \tag{3}$$

$$\Sigma_{j \in N_i} x_{ij} \le k_i,\ i \in I, \tag{4}$$

$$0 \le x_{ij} \le 1,\ j \in N_i = \{1, 2, \cdots, n_i\},\ i \in I. \tag{5}$$

여기서, 모든 $a_{ij},\ c_{ij},\ b_0,\ b_i$는 양수, k_i는 정수, $1 \le k_i \le n_i$, $b_0 \le \Sigma_{i \in I} b_i$ 이고, 집합 N_i 는 서로 중복적이지 않다.

문제 (P)에 정수조건이 부가된 정수계획 문제 (K)를 고려하자. 문제 (K)에서는 제약식 (5)가 $x_{ij} \in \{0,\ 1\}$, $j \in N_i = \{1,\ 2, \cdots, n_i\}$, $i \in I$, 로 표현된다. 이 문제에서는 독립적으로 분할된 각 부서 i 가 과제 j 를 수행하는 데 소요되는 비용은 a_{ij} 이고, 수행되면 c_{ij} 의 이익이 발생한다. 부서 i 에서 계획하고 있는 여러 과제에 할당 가능한 최대 예산은 b_i 이며, 부서 i 가 수행할 수 있는 최대 과제 수는 k_i 로 제한된다. 문제 (K)는 총 $\Sigma_{i \in I} n_i$ 개 과제들에 투자할 예산 b_0 의 제약 하에 모든 부서에 걸쳐 얻을 수 있는 이익이 최대가 되도록 각 부서별로 수행할 과제들을 선택하는 문제이다. 우리는 문제 (K)를 일반 다중선택 다분할 배낭문제(generalized multiple-choice multi-divisional knapsack problem)라 부른다.

문제 (K)는 기존에 연구된 다분할 배낭문제(Won and Chung, 1991)의 확장문제라 할 수 있다. 즉 문제 (K)에서 부서별로 수행할 수 있는 최대 과제수 k_i 가 모두 n_i 가 되는 문제는 다분할 배낭문제와 동일한 문제가 된다. Won and Chung(1991)은 다분할 배낭문제를 제시하고, 다분할 배낭문제의 LP 완화문제인

† 연락저자 : 원중연 교수, 443-760 경기도 수원시 영통구 광교산로 154-42 경기대학교 산업경영공학과, Tel : 031-249-9750, Fax : 031-244-3534, E-mail : jywon@kgu.ac.kr
2014년 4월 15일 접수; 2014년 5월 22일 수정본 접수; 2014년 6월 26일 게재 확정.

다분할 선형계획 배낭문제(LMK)를 연구하였다. 문제(LMK)는 다분할 배낭문제의 최적해를 찾기 위한 분지한계법의 한계전략으로 사용될 수 있으므로, 문제(LMK)의 최적해를 신속하게 찾는 해법이 중요하게 된다. 이 논문에 제시된 해법의 계산 복잡도는 $O(n)$ 으로 분석되었다.

문제 (K)에서 일반 다중선택 제약식 (4)가 등식이 되고 모든 우변상수 k_i 가 1이 되는 특수문제는 Armstrong *et al*.(1982)이 제시한 다중선택 중첩 배낭문제(multiple-choice nested knapsack problem)의 한 유형으로 볼 수 있다. 다중선택 중첩 배낭문제는 각 제약식이 여러 다중선택 집합 N_i 에 대해 중첩 형태를 이루면서 발생하고, 각 집합 N_i 마다 다중선택 제약식 $\Sigma_{j\in N_i} x_{ij}=1$ 이 존재하는 문제이다. 그들은 다중선택 중첩 배낭문제의 LP 완화문제를 고려하고, 문제의 중첩 제약구조와 다중선택 제약구조에 의해 발생하는 특성들을 활용하여 LP 완화문제의 최적해를 구하는 해법을 제시하였다.

본 논문에서는 문제 (K)의 LP 완화문제인 선형계획 문제 (P)에 대해 연구한다. 우리는 이 문제 (P)를 일반 다중선택 다분할 선형계획 배낭문제라 부른다. 문제 (P)는 정수문제 (K)의 분지한계법을 위한 한계전략으로 사용될 수 있다. 또한 문제 (P)는 다분할 제약구조와 일반 다중선택 제약구조를 가진 문제이므로, 두 제약구조의 특성을 파악하고 이를 활용한 효율적 해법의 개발이 가치가 있는 문제이다.

제 2장에서는 주 제약식을 완화시켰을 때 발생하는 여러 독립적인 부서별 문제를 고려하고, 각 부서별 문제에서 일반 다중선택 제약구조에 의해 성립하는 모수분석적 최적해 특성을 파악하고 정리한다. 이 특성은 새로운 선형계획 배낭문제를 생성하는 과정에 활용된다. 제 3장에서는 생성된 선형계획 배낭문제의 쉽게 구해지는 최적해로부터 문제 (P)의 최적해를 유도하는 방법을 보인다. 아울러 이러한 모든 해법 과정에 따른 계산 복잡도를 분석한다. 제 4장에서는 수치예제를 통해 해법의 적용 과정을 보인다.

2. 이차원 선형계획 배낭문제

문제 (P)에서 주 제약식 (2)는 모든 선택집합 N_i 와 연결되어 있으나, 제약식 (3) 및 (4)는 각 선택집합 N_i 마다 독립적이다. 또한 제약식 (2) 및 (3)의 우변상수는 $b_0 \le \Sigma_{i\in I} b_i$ 인 관계가 성립한다. 이 점을 활용하여 문제 (P)의 최적해를 구하는 해법을 개발한다. 먼저 주 제약식 (2)를 완화시키면, 문제 (P)는 다음과 같이 서로 독립적인 부서별 부문제 (SPi), $i\in I$, 로 분할된다.

$$\text{(SP}i\text{)}\quad \text{Maximize}\quad \Sigma_{j\in N_i} c_{ij}x_{ij} \tag{6}$$

$$\text{subject to}\quad \Sigma_{j\in N_i} a_{ij}x_{ij} \le b_i, \tag{7}$$

$$\Sigma_{j\in N_i} x_{ij} \le k_i, \tag{8}$$

$$0 \le x_{ij} \le 1,\ j\in N_i=\{1, 2, \cdots, n_i\}. \tag{9}$$

부문제 (SPi)는 부등식 형태의 일반 다중선택 제약을 가진 이차원 선형계획 배낭문제이다. 특히 부문제 (SPi)에서 제약식 (8)이 등식이 되어서 $\Sigma_{j\in N_i} x_{ij}=k_i$ 으로 표현되는 문제는 선수제약 선형계획 배낭문제(C : cardinality constrained LP knapsack problem)라 부른다. 이 문제 (C)는 Campello and Maculan(1987), Dudzinski(1989)에 의해 연구되었다. Campello and Maculan (1987)은 문제 (C)의 기저가능해가 갖는 특성으로서 두 변수가 동시에 분수값을 갖고, 그 합은 항상 1이 된다는 것을 보였다. 이들은 문제 (C)의 쌍대문제를 고려하고, 쌍대 최적해는 계산 복잡도 $O(n_i^3)$에 구할 수 있음과 이로부터 문제 (P)의 최적해를 선형 시간 안에 도출할 수 있음을 언급하였다. Dudzinski(1989)는 제약식 (8)이 등식으로 성립한다는 점을 이용, 목적함수 (6)과 제약식 (7)에 각 변수 x_{ij} 를 치환하여 문제 (C)를 n_i 개 선형계획 배낭문제로 변환하고, 각 변환된 문제들의 최적 목적함수값을 비교함으로써 최적해를 구하는 $O(n_i^2)$ 의 해법을 제시하였다.

부문제 (SPi)에서는 제약식 (8)이 부등식의 형태로서 해공간은 문제 (C)보다 더 커진다. 이러한 부문제 (SPi)에서는 문제 (C)와는 달리 최적해에서 분수값을 갖는 변수의 수가 다음 정리 1에서 보는 바와 같이 1개가 되거나 또는 정리 2에서 보는 바와 같이 두 개가 되고 그 합은 1이 될 수 있다.

부문제 (SPi)에서 특히 제약식 (8)의 우변상수 k_i 가 실수가 되는 문제는 Won(2011)에서 그 특성 및 해법이 연구되었다. 그러나 k_i 가 정수인 부문제 (SPi)에서는 최적 기저의 특성이 다음 정리 1 및 2에서 보는 바와 같이 실수인 경우와는 다르게 나타난다.

먼저 필요한 기호를 정의한다. 각 부문제 (SPi)에서 임의의 두 지수 j_1, j_2가 $j_1<j_2$이면 $a_{ij_1} \le a_{ij_2}$이 되도록 변수들이 재배열된 것으로 가정한다. 부문제의 한 기저가능해를 $\bar{x}_i \equiv (\bar{x}_{i1}, \cdots, \bar{x}_{in_i})$라 하고, 이 해의 우변상수 값을 $\bar{b}_i=\Sigma_{j\in N_i} a_{ij}\bar{x}_{ij}$, 목적함수 값을 $z_i(\bar{b}_i)=\Sigma_{j\in N_i} c_{ij}\bar{x}_{ij}$, 지수집합 J_i 를 $J_i \equiv \{j\,|\,\bar{x}_{ij}=1,\ j\in N_i\}$이라 정의하자. 제약식 (7) 및 (8)에 해당하는 두 기저변수의 지수를 각각 j_1, j_2라 하고, 축소 기저행렬 B는 두 기저변수에 해당하는 제약식 (7) 및 (8)의 열로 구성된 2×2 행렬로 정의한다. 우변상수가 $\bar{b}_i$ 에서 Δb_i 만큼 더 증가할 때 최적 목적함수 값의 변화는 다음의 두 형태로 발생한다. 먼저 j_1, j_2가 모두 $j_1\in N_i$, $j_2\in N_i$ 인 경우에는 다음 식 (10)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} z_i(\bar{b}_i+\Delta b_i) &= z_i(\bar{b}_i)+\Delta b_i c_B B^{-1} e \\ &= z_i(\bar{b}_i)+\Delta b_i (c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1}) \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $c_B=(c_{ij_1},\ c_{ij_2})$, $e=(1,0)^t$ 이다. 위 식에서 $a_{ij_2}=a_{ij_1}$ 인 경우에는 $\theta_i(j_1,\ j_2)\equiv\infty$ 로 정의한다. 다음으로 어느 하나의 j_2 만이 $j_2\in N_i$ 인 경우에는 다음의 식 (11)과 같이 표현된다.

$$z_i(\bar{b}_i + \Delta b_i) = z_i(\bar{b}_i) + \Delta b_i c_B B^{-1} e \qquad (11)$$
$$= z_i(\bar{b}_i) + \Delta b_i (c_{ij_2} / a_{ij_2})$$

여기서 $c_B = (c_{ij_2},\ 0)$이다. $j_1 \not\in N_i$인 경우, $j_1 = 0$으로 표현하고, $c_{ij_1} = a_{ij_1} \equiv 0$으로 정의하자. 그러면 식 (10) 및 식 (11)에서의 증가 비율은 다음과 같이 하나의 식 (12)로 표현할 수 있으며, 이를 $\theta_i(j_1,\ j_2)$로 표기한다.

$$\theta_i(j_1,\ j_2) = (c_{ij_2} - c_{ij_1}) / (a_{ij_2} - a_{ij_1}) \qquad (12)$$

부문제 (SPi)의 우변상수를 b라고 할 때, 목적함수 $z_i(b)$는 b가 0에서 b_i까지 증가함에 따라 위로 볼록한 조각적 선형함수(piecewise linear concave function)의 형태를 이룬다. 식 (12)의 증가비율 $\theta_i(j_1,\ j_2)$는 이 선형함수의 기울기를 형성한다. 다음 정리 1 및 2에서 우변상수 $\bar{b}_i$는 편의상 $z_i(b)$의 한 절점(break point)이라 하자. 다음 정리 1은 k_i가 정수인 경우에 $|J_i| < k_i$를 만족하는 모든 기저가능해 $\bar{x}_i$에 대해 성립하고 있다.

정리 1 부문제 (SPi)에서 $|J_i| < k_i$인 한 기저가능해 $\bar{x}_i$의 우변상수 값을 $\bar{b}_i$라 하자. 우변상수가 $\bar{b}_i$에서 증가함에 따라 발생하는 새로운 기저변수의 지수 f_1, f_2와 최적 목적함수의 증가 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\theta_i^*(f_1,\ f_2) = \max_{j \in N_i \setminus J_i} \{\theta_i(0,\ j)\}$$

(증명) 부문제 (SPi)에서 우변상수가 $\bar{b}_i$이면 $\bar{x}_i$는 최적해이다. 가정에 의해 현재 J_i는 $|J_i| < k_i$이므로 우변상수가 $\bar{b}_i$에서 충분히 작은 양 Δb_i만큼 더 증가한다면 최적을 유지하기 위한 새로운 기저 변화는 다음의 두 형태로 발생 가능하다. 1) 현재 0의 값을 가지는 한 변수 x_{ij} ($j \in N_i \setminus J_i$) 만이 증가해서 분수값을 갖는 기저변수가 된다. 이 경우 최적 목적함수의 증가 비율은 식 (11)과 같이 $\theta_i(0,\ j) = (c_{ij}/a_{ij})$이다. 2) 현재 1의 값을 가지는 한 변수 $x_{ij_1}(j_1 \in J_i)$이 1에서 감소하고, 0의 값을 가지는 다른 변수 $x_{ij_2}(j_2 \in N_i \setminus J_i,\ j_2 > j_1)$가 증가하여 동시에 두 변수가 분수값을 갖고 그 합은 1이 된다. ($j_2 > j_1$이므로 $a_{ij_2} \geq a_{ij_1}$이다.) 이 경우 최적 목적함수의 증가 비율은 식 (10)과 같이 $\theta_i(j_1,\ j_2) = (c_{ij_2} - c_{ij_1}) / (a_{ij_2} - a_{ij_1})$이다. 여기서 $J_i = \varnothing$이면 현재 1의 값을 가진 변수가 존재하지 않으므로 2)의 경우는 발생하지 않는다. 다음으로 $J_i \neq \varnothing$이라 하자. 2)의 경우가 발생하려면 어느 한 변수 x_{ij_1}(단, $j_1 \in J_i$)은 이미 1의 값을 가지고 있어야 한다. 여기서 $|J_i| < k_i$이므로, $j_1 \in J_i$이라는 것은 $\theta_i(0,\ j_1) \geq \theta_i(0,\ j_2)$, $j_2 \in N_i \setminus J_i$을 의미하며, 따라서 $\theta_i(0,\ j_1) \geq \theta_i(j_1,\ j_2)$가 성립한다(Won, 2011, 정리 1 참조). 즉, 경우 1)의 목적함수 증가 비율인 $\theta_i(0,\ j_1)$가 경우 2)의 목적함수 증가 비율인 $\theta_i(j_1,\ j_2)$보다 항상 크거나 같다. 따라서 경우 2)와 같은 기저변화는 발생하지 않는다. 이상으로부터 $|J_i| < k_i$이면 여러 비율 $\theta_i(0,\ j)$, $j \in N_i \setminus J_i$, 중에서 가장 큰 비율을 갖는 변수가 최적 기저로 결정된다. 따라서 정리가 성립한다. ■

정리 2 부문제 (SPi)에서 $|J_i| = k_i$인 한 기저가능해 $\bar{x}_i$의 우변상수 값을 $\bar{b}_i$라 하자. 우변상수가 $\bar{b}_i$에서 증가함에 따라 발생하는 새로운 기저변수의 지수 f_1, f_2와 최적 목적함수의 증가 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\theta_i^*(f_1,\ f_2) = \max_{j_1 \in J_i} \max_{j_2 \in N_i \setminus J_i,\ j_2 > j_1} \{\theta_i(j_1,\ j_2)\}$$

(증명) 가정에 의해 $|J_i| = k_i$이므로, 우변상수가 $\bar{b}_i$에서 작은 양 Δb_i만큼 더 증가하더라도 제약식 (8)은 항상 등식으로 만족된다. 따라서 우변상수가 Δb_i만큼 더 증가하게 되면, 현재 1을 취하는 한 변수 x_{ij_1} ($j_1 \in J_i$)이 1에서 감소하고, 0의 값을 취하고 있는 다른 변수 x_{ij_2}($j_2 \in N_i \setminus J_i$, $j_2 > j_1$)가 증가하여 두 변수는 동시에 분수값을 갖고 그 합이 1이 될 수밖에 없다. 이 경우 최적 목적함수의 증가비율은 식 (10)과 같이 발생한다. 따라서 최대로 증가하는 목적함수의 비율은 정리와 같이 결정된다. ■

정리 1에서 선택된 기저변수 x_{if_2}는 0에서 1까지 변동 가능하므로 ($f_2 \in N_i \setminus J_i$), 이 기저가 최적으로 유지되는 우변상수의 최대 변동값($= \Delta b_i$)은 a_{if_2}이다. 정리 2에서 선택된 기저변수인 x_{if_1}이나 x_{if_2}도 0부터 1까지 변동 가능하고 $x_{if_1} + x_{if_2} = 1$이 유지되므로, 이 기저가 최적으로 유지되는 우변상수의 최대 변동값은 $a_{if_2} - a_{if_1}$이다. 따라서 정리 1 및 정리 2에서 구한 기저가 최적으로 유지되는 우변상수의 최대 변동값은 $a_{if_2} - a_{if_1}$으로, 이때 목적함수의 최대 변동값은 $c_{if_2} - c_{if_1}$으로 표기할 수 있다.(여기서 $f_1 = 0$ 이면 $c_{if_1} = a_{if_1} \equiv 0$이다.) 또한 기저변수 x_{if_2}의 최대 변동값은 1이다. 이들 값을 다음과 같은 기호로 설정하자. 이 값들은 제 3장에서 새로이 생성할 선형계획 배낭문제의 계수들을 형성한다.

$$w_i(f_1,\ f_2) = a_{if_2} - a_{if_1}, p_i(f_1,\ f_2) = c_{if_2} - c_{if_1}, u_i(f_1,\ f_2) = 1$$

반면에 부문제 (SPi)의 우변상수가 최종적으로 b_i가 될 때 발생하는 최적 기저는 b_i의 값에 따라 분수해를 가질 수도 있다. 최적 기저변수 x_{if_2}가 분수해 q를 가지면, 이 기저가 최적으로 유지되는 x_{if_2}의 최대 변동값은 q이다. 이 경우 $u_i(f_1,\ f_2)$는 다음

과 같이 설정한다.

$$u_i(f_1,\ f_2) = q$$

다음 변환해법은 각 부문제 (SPi)에 정리 1 및 정리 2를 적용하여 우변상수가 0에서 b_i에 이르기까지 발생하는 모든 최적 기저들을 찾고, 각 최적기저에 대응되는 $p_i(f_1,\ f_2)$, $w_i(f_1,\ f_2)$, $u_i(f_1,\ f_2)$를 계산한다. 이 계수들에 해당하는 변수를 $y_i(f_1,\ f_2)$로 설정하고 구해지는 순서대로 변수목록 R_i에 저장한다.

변환해법

1. $J_i \leftarrow \varnothing,\ L_i \leftarrow \varnothing,\ R_i \leftarrow \varnothing,\ \bar{b}_i \leftarrow b_i$
2. 다음 식에 의해 모든 비율 $\theta_i(j_1,\ j_2)$를 계산한다. ($j_1 = 0$인 경우, $c_{ij_1} = a_{ij_1} \equiv 0$ 이다.)
   $\theta_i(j_1,\ j_2) = (c_{ij_2} - c_{ij_1}) / (a_{ij_2} - a_{ij_1}),\ j_1 < j_2,$
   $j_1 \in N_i \cup \{0\},\ j_2 \in N_i.$
   계산된 비율들을 크기의 비증가 순으로 후보비율 목록 L_i에 정리한다. 여기서 비율 값이 음수이거나 ∞ 이면 미리 제거한다.
3. 비율목록 L_i에서 첫 번째 위치한 가장 큰 비율을 선택한다. 이 비율을 $\theta_i(f_1,\ f_2)$ 라 하자.
4. $|J_i| = k_i$ 이면, 단계 5로 간다.
   $|J_i| < k_i$ 이고 $f_1 = 0$ 이면, 다음을 수행하고 단계 6으로 간다.
   $p_i(f_1,\ f_2) = c_{if_2},\ w_i(f_1,\ f_2) = a_{if_2},$
   $J_i \leftarrow J_i \cup \{f_2\},\ R_i \leftarrow R_i \cup \{y_i(f_1,\ f_2)\}$
   아니면, 단계 7로 간다.
5. $f_1 \in J_i,\ f_2 \not\in J_i$ 이면, 다음을 수행하고 단계 6으로 간다.
   $p_i(f_1,\ f_2) = c_{if_2} - c_{if_1},\ w_i(f_1,\ f_2) = a_{if_2} - a_{if_1},$
   $J_i \leftarrow J_i \cup \{f_2\} \setminus \{f_1\},\ R_i \leftarrow R_i \cup \{y_i(f_1,\ f_2)\}$
   아니면, 단계 7로 간다.
6. $\bar{b}_i \le w_i(f_1,\ f_2)$ 이면, 다음을 실행하고 과정을 끝낸다.
   $u_i(f_1,\ f_2) = \bar{b}_i / w_i(f_1,\ f_2)$
   $\bar{b}_i > w_i(f_1,\ f_2)$ 이면, 다음을 실행하고 단계 7로 간다.
   $\bar{b}_i \leftarrow \bar{b}_i - w_i(f_1,\ f_2),\ u_i(f_1,\ f_2) = 1$
7. $L_i \leftarrow L_i \setminus \{\theta_i(f_1,\ f_2)\}$ 라 한다.
   $L_i = \varnothing$ 이면 과정을 끝낸다. 아니면, 단계 3으로 간다.

위 변환해법의 단계 3에서 동일한 크기의 비율이 여러 개 존재하면, 어느 비율을 먼저 선택하는 가에 따라 서로 다른 $p_i(f_1,\ f_2)$, $w_i(f_1,\ f_2)$가 얻어질 수 있다. 이러한 경우에 문제 (P)에는 대안 최적해가 발생한다. 제 4장 수치예제에서 구체적인 예를 보인다.

3. 선형계획 배낭문제

각 부문제에 제 2장의 변환해법을 적용하면 새로운 변수목록 R_i와 새 변수에 대응하는 계수 $p_i(f_1,\ f_2)$, $w_i(f_1,\ f_2)$와 상한치 $u_i(f_1,\ f_2)$가 얻어진다. 이들을 사용하여 다음과 같이 우변상수가 b_0인 선형계획 배낭문제 (LP)를 생성한다.

(LP) Maximize $\Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{y_i(j_1,\ j_2) \in R_i} p_i(j_1,\ j_2)\, y_i(j_1,\ j_2)$

subject to $\Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{y_i(j_1,\ j_2) \in R_i} w_i(j_1,\ j_2)\, y_i(j_1,\ j_2) \le b_0,$

$0 \le y_i(j_1,\ j_2) \le u_i(j_1,\ j_2),$

$\forall\, y_i(j_1,\ j_2) \in R_i,\ i \in I.$

문제 (LP)는 선형계획 배낭문제이므로 최적해는 쉽게 구해진다. 변수가 n개인 선형계획 배낭문제의 최적해는 Balas and Zemel(1980)의 선형시간 해법을 적용하면 $O(n)$에, 일반적인 분류(sorting) 해법을 적용하면 $O(n \log n)$에 찾을 수 있다. 문제 (LP)의 최적해를 $y_i^*(j_1,\ j_2)$라 하고, 이 최적해의 목록을 R_i^*라 하자. ($i \in I$)

다음에 제시하는 해법은 문제 (P)의 최적해를 구하는 해법이다. 단계 1에서는 제 2장의 변환해법을 적용하여 선형계획 배낭문제 (LP)의 각 계수 및 상한치를 구한다. 단계 2에서는 생성된 문제 (LP)로부터 최적해 $y_i^*(j_1,\ j_2)$를 구한다. 단계 3부터 나머지 단계에서는 $y_i^*(j_1,\ j_2)$로부터 문제 (P)의 최적해 x_{ij}^*를 유도한다.

해법

0. $R_i^* \leftarrow \varnothing,\ i \in I.$
1. 각 부문제 (SPi)에 변환해법을 적용하여 변수목록 R_i와 각 변수에 대응되는 계수 $p_i(j_1,\ j_2)$, $w_i(j_1\ j_2)$, $u_i(j_1,\ j_2)$을 구한다. ($i \in I$)
2. 구해진 계수들과 b_0을 사용하여 선형계획 배낭문제 (LP)를 생성하고, 최적해 $y_i^*(j_1,\ j_2)$와 최적해의 목록 R_i^*를 구한다.
3. $i := 1, \cdots,\ m$에 대해 다음의 과정을 수행한다. $i > m$ 이면 과정을 끝낸다.
4. 각 목록 R_i^*로부터 첫 번째에 위치한 $y_i^*(j_1,\ j_2)$를 선택한다.
   $R_i^* = \varnothing$ 이면, $i \leftarrow i+1$로 설정하고 단계 3으로 간다.
5. $y_i^*(j_1,\ j_2) > 0$ 이면, 단계 6으로 간다.
   아니면, $i \leftarrow i+1$로 설정하고 단계 3으로 간다.
6. $j_1 = 0$ 이면, $x_{ij_2}^* \leftarrow y_i^*(j_1,\ j_2),\ R_i^* \leftarrow R_i^* \setminus \{y_i^*(j_1,\ j_2)\}$로 설정하고 단계 4로 간다.
   아니면, 단계 7로 간다.
7. $x_{ij_2}^* \leftarrow y_i^*(j_1,\ j_2),\ x_{ij_1}^* \leftarrow 1 - x_{ij_2}^*,\ R_i^* \leftarrow R_i^* \setminus \{y_i^*(j_1,\ j_2)\}$로 설정하고 단계 4로 간다.

위 해법을 적용한 결과로 얻어지는 x_{ij}^*와 함께, 이 외에 모든 변수 x_{ij}의 값을 0으로 설정하면, 이 해는 최종적으로 문제 (P)의 최적해가 된다.

다음으로 위 해법이 최악 상황에서 최적해를 구하는데 소요되는 계산 복잡도를 분석한다. 위 해법의 단계 1에서는 각 부문제에 변환해법을 적용한다. 변환해법의 단계 1은 상수회에 계산된다. 변환해법의 단계 2에서 모든 비율을 계산하는 데 $O(n_i^2)$의 계산이, L_i를 작성하기 위해 이 비율들을 비증가 순으로 정리하는 데에는 $O(n_i^2 \log n_i)$의 계산이 소요된다. 변환해법의 주 회전 단계인 3, 4, 5, 6, 7의 계산은 각각 상수회이고, 주 회전 단계의 회전수는 비율의 최대 개수인 $O(n_i^2)$ 이하이므로, 주 회전단계의 계산은 $O(n_i^2)$이다. 여기서 변환해법의 단계 2 및 주 회전단계의 복잡도를 비교하면 $O(n_i^2) \le O(n_i^2 \log n_i)$이므로, 한 부문제 (SP$i$)로부터 필요한 계수들을 구하는데 소요되는 시간은 최대 $O(n_i^2 \log n_i)$이다. 따라서 해법의 단계 1에서 모든 부문제에 변환해법을 적용하여 새로운 선형계획 배낭문제의 계수들을 얻는 데 소요되는 계산은 $\Sigma_{i=1}^m O(n_i^2 \log n_i) \le O(n^2 \log n)$이다. 다음으로 해법의 단계 2에서 생성된 선형계획 배낭문제 (LP)의 변수의 수는 최대로 n^2개 이하이다. 따라서 문제 (LP)의 최적해 $y_i^*(j_1, j_2)$를 구하는 데 일반적 분류해법을 적용하면 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 문제 (P)의 최적해 x_{ij}^*를 구하는 과정인 단계 3, 4, 5, 6에서는 각 단계마다 상수회의 계산이 소요된다. 목록 R_i^*의 $y_i^*(j_1, j_2)$ 개수는 n^2개 이하이므로 주 회전단계 3, 4, 5, 6에 소요되는 계산은 $O(n^2)$ 이하이다. 이상의 각 단계 1, 2, 및 주 회전단계로부터 문제 (P)의 최적해를 구하는데 소요되는 계산 복잡도는 최대 $O(n^2 \log n)$이다.

4. 수치예제

다음과 같은 일반 다중선택 다분할 선형계획문제에 해법을 적용하여 최적해를 구한다.

$$\begin{aligned}
\text{Maximize } & \Sigma_{i=1}^3 \Sigma_{j\in N_i} c_{ij} x_{ij} \\
\text{subject to } & \Sigma_{i=1}^3 \Sigma_{j\in N_i} a_{ij} x_{ij} \le 55, \\
& \Sigma_{j\in N_1} a_{1j} x_{1j} \le 26,\ \Sigma_{j\in N_2} a_{2j} x_{2j} \le 12, \\
& \Sigma_{j\in N_3} a_{3j} x_{3j} \le 27,\ \Sigma_{j\in N_1} x_{1j} \le 2, \\
& \Sigma_{j\in N_2} x_{2j} \le 1,\ \Sigma_{j\in N_3} x_{3j} \le 2, \\
& 0 \le x_{ij} \le 1,\ \forall j\in N_i,\ i\in I=\{1, 2, 3\}
\end{aligned}$$

여기서, $N_1=\{1, 2, 3\}$, $N_2=\{1, 2, 3\}$, $N_3=\{1, 2, 3, 4\}$, $b_0=55, b_1=26, b_2=12, b_3=27, k_1=2, k_2=1, k_3=2$이다. 또한, 각 목적함수의 계수 c_{ij} 및 제약식의 계수 a_{ij}는 다음 표와 같다.

i	1			2			3			
$c_{ij},\ a_{ij}$ \ j	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4
c_{ij}	9	13	15	8	11	14	6	8	11	14
a_{ij}	10	13	18	7	9	16	5	8	12	17

<1회>

0. $R_i^* \leftarrow \varnothing,\ i\in I.$

1. 위 예제는 3개의 독립적인 부문제로 분할된다. 먼저 부문제 (SP1)에 변환해법을 적용하여 각 계수를 도출한다.

$$\begin{aligned}
\text{(SP1) Maximize } & 9x_{11}+13x_{12}+15x_{13} \\
\text{subject to } & 10x_{11}+13x_{12}+18x_{13} \le 26, \\
& x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 2, \\
& 0 \le x_{1j} \le 1,\ j=1, 2, 3.
\end{aligned}$$

(1회)

(1) $J_1 \leftarrow \varnothing$, $L_1 \leftarrow \varnothing$, $R_1 \leftarrow \varnothing$, $\bar{b}_1 \leftarrow b_1$

(2) $L_1=\{\theta_1(1,2)=1.33, \theta_1(0,2)=1.00, \theta_1(0,1)=0.90, \theta_1(0,3)=0.83, \theta_1(1,3)=0.75, \theta_1(2,3)=0.40\}$

(3) $\theta_1(1, 2)=1.33$ 선택 ($f_1=1,\ f_2=2$)

(4) $|J_1|<2,\ f_1\ne 0$ 이므로 단계 7로 간다.

(7) $L_1 \leftarrow L_1 \setminus \{\theta_1(1,2)\}$, 단계 3으로 간다.

(2회)

(3) $\theta_1(0, 2)=1.00$ 선택 ($f_1=0,\ f_2=2$)

(4) $|J_1|<2,\ f_1=0$ 이므로, $p_1(0, 2)=13$, $w_1(0, 2)=13$, $J_1=\{2\}$, $R_1=\{y_1(0, 2)\}$, 단계 6으로 간다.

(6) $\bar{b}_1 > w_1(0, 2)$이므로, $\bar{b}_1=26-13=13$, $u_1(0, 2)=1$, 단계 7로 간다.

(7) $L_1 \leftarrow L_1 \setminus \{\theta_1(0, 2)\}$, 단계 3으로 간다.

(3회)

(3) $\theta_1(0, 1)=0.90$ 선택 ($f_1=0, f_2=1$)

(4) $|J_1|<2,\ f_1=0$ 이므로, $p_1(0, 1)=9$, $w_1(0, 1)=10$, $J_1=\{1, 2\}$, $R_1=\{y_1(0, 2),\ y_1(0, 1)\}$, 단계 6으로 간다.

(6) $\bar{b}_1 > w_1(0, 1)$이므로, $\bar{b}_1=13-10=3$, $u_1(0, 1)=1$, 단계 7로 간다.

(7) $L_1 \leftarrow L_1 \setminus \{\theta_1(0, 1)\}$, 단계 3으로 간다.

(4회)

(3) $\theta_1(0, 3)=0.83$ 선택 ($f_1=0,\ f_2=3$)

(4) $|J_1|=2$ 이므로, 단계 5로 간다.

(5) $f_1 \not\in J_1$ 이므로, 단계 7로 간다.

(7) $L_1 \leftarrow L_1 \setminus \{\theta_1(0,\ 3)\}$, 단계 3으로 간다.

(5회)
(3) $\theta_1(1,\ 3) = 0.75$ 선택 $(f_1 = 1,\ f_2 = 3)$
(4) $|J_1| = 2$ 이므로, 단계 5로 간다.
(5) $f_1 \in J_1,\ f_2 \not\in J_1$ 이므로, $p_1(1,\ 3) = 6,\ w_1(1,\ 3) = 8,$
$J_1 = \{2,\ 3\},\ R_1 = \{y_1(0,\ 2),\ y_1(0,\ 1),\ y_1(1,\ 3)\}$,
단계 6으로 간다.
(6) $\bar{b}_1 < w_1(1,\ 3)$ 이므로, $u_1(1,\ 3) = 3/8$, 과정을 끝낸다.

부문제 (SP1)에 변환해법을 적용한 결과는 다음과 같다.

$R_1 = \{y_1(0,\ 2),\ y_1(0,\ 1),\ y_1(1,\ 3)\}$
$p_1(0,\ 2) = 13,\ w_1(0,\ 2) = 13,\ u_1(0,\ 2) = 1,$
$p_1(0,\ 1) = 9,\ w_1(0,\ 1) = 10,\ u_1(0,\ 1) = 1,$
$p_1(1,\ 3) = 6,\ w_1(1,\ 3) = 8,\ u_1(1,\ 3) = 3/8$

마찬가지로, 부문제 (SP2)와 (SP3)에 변환해법을 적용한 결과는 다음과 같다.

$L_2 = \{\theta_2(1,\ 2) = 1.50,\ \theta_2(0,\ 2) = 1.22,\ \theta_2(0,\ 1) = 1.14,$
$\theta_2(0,\ 3) = 0.88,\ \theta_2(1,\ 3) = 0.67,\ \theta_2(2,\ 3) = 0.43\}$
$R_2 = \{y_2(0,\ 2),\ y_2(2,\ 3)\}$
$p_2(0,\ 2) = 11,\ w_2(0,\ 2) = 9,\ u_2(0,\ 2) = 1,$
$p_2(2,\ 3) = 3,\ w_2(2,\ 3) = 7,\ u_2(2,\ 3) = 3/7$

$L_3 = \{\theta_3(0,\ 1) = 1.20,\ \theta_3(0,\ 2) = 1.00,\ \theta_3(0,\ 3) = 0.92,$
$\theta_3(0,\ 4) = 0.82,\ \theta_3(2,\ 3) = 0.75,\ \theta_3(1,\ 3) = 0.71,$
$\theta_3(1,\ 4) = \theta_3(1, 2) = \theta_3(2,\ 4) = 0.67,$
$\theta_3(3,\ 4) = 0.60\}$
$R_3 = \{y_3(0,\ 1),\ y_3(0,\ 2),\ y_3(2,\ 3),\ y_3(1,\ 4)\}$
$p_3(0,\ 1) = 6,\ w_3(0,\ 1) = 5,\ u_3(0,\ 1) = 1,$
$p_3(0,\ 2) = 8,\ w_3(0,\ 2) = 8,\ u_3(0,\ 2) = 1,$
$p_3(2,\ 3) = 3,\ w_3(2,\ 3) = 4,\ u_3(2,\ 3) = 1,$
$p_3(1, 4) = 8,\ w_3(1,\ 4) = 12,\ u_3(1,\ 4) = 5/6$

2. 새로운 선형계획 배낭문제 (LP)는 다음과 같이 생성된다.

$$\begin{aligned}
\text{(LP)}\quad \text{Maximize}\quad & \Sigma_{i=1}^{3} \Sigma_{y_i \in R_i}\ p_i(j_1,\ j_2)\ y_i(j_1,\ j_2) \\
\text{subject to}\quad & \Sigma_{i=1}^{3} \Sigma_{y_i \in R_i}\ w_i(j_1,\ j_2)\ y_i(j_1,\ j_2) \le 55, \\
& 0 \le y_i(j_1,\ j_2) \le u_i(j_1,\ j_2), \\
& \forall\ y_i(j_1,\ j_2) \in R_i,\ i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

여기서 변수들의 계수 및 상한치는 다음의 표와 같다.

계수 \ 변수	$y_1(0,2)$	$y_1(0,1)$	$y_1(1,3)$	$y_2(0,2)$	$y_2(2,3)$	$y_3(0,1)$	$y_3(0,2)$	$y_3(2,3)$	$y_3(1,4)$
$p_i(j_1,\ j_2)$	13	9	6	11	3	6	8	3	8
$w_i(j_1,\ j_2)$	13	10	8	9	7	5	8	4	12
$u_i(j_1,\ j_2)$	1	1	3/8	1	3/7	1	1	1	5/6

위 선형계획 배낭문제 (LP)의 최적해는 다음과 같이 쉽게 구해진다.

목록	R_1^*			R_2^*		R_3^*			
변수	$y_1^*(0,2)$	$y_1^*(0,1)$	$y_1^*(1,3)$	$y_2^*(0,2)$	$y_2^*(2,3)$	$y_3^*(0,1)$	$y_3^*(0,2)$	$y_3^*(2,3)$	$y_3^*(1,4)$
최적해	1	1	0.375	1	0	1	1	1	0.25

3. $i = 1$ 로 설정한다.
4. $y_1^*(0, 2)$를 선택한다.
5. $y_1^*(0, 2) > 0$이므로, 단계 6으로 간다.
6. $j_1 = 0$이므로, $x_{12} \leftarrow 1$, $R_1^* \leftarrow R_1^* \setminus \{y_1^*(0, 2)\}$,
단계 4로 간다.

<2회>
4. $y_1^*(0, 1)$를 선택한다.
5. $y_1^*(0, 1) > 0$이므로, 단계 6으로 간다.
6. $j_1 = 0$이므로, $x_{11} \leftarrow 1$, $R_1^* \leftarrow R_1^* \setminus \{y_1^*(0, 1)\}$,
단계 4로 간다.

<3회>
4. $y_1^*(1, 3)$를 선택한다.
5. $y_1^*(1, 3) > 0$이므로, 단계 6으로 간다.
6. $j_1 \neq 0$이므로, 단계 7로 간다.
7. $x_{13} \leftarrow 0.375$, $x_{11} \leftarrow 1 - 0.375 = 0.625$, $R_1^* \leftarrow R_1^* \setminus$
$\{y_1^*(1, 3)\}$, 단계 4로 간다.

<4회>
4. $R_1^* = \varnothing$ 이므로, $i = 2$로 설정하고 단계 3으로 간다.

<5회>
3. $i = 2$에 대해 다음 과정을 수행한다.
4. $y_2^*(0, 2)$를 선택한다.
5. $y_2^*(0,\ 2) > 0$ 이므로, 단계 6으로 간다.
6. $j_1 = 0$ 이므로, $x_{22} \leftarrow 1$, $R_2^* \leftarrow R_2^* \setminus \{y_2^*(0,\ 2)\}$,
단계 4로 간다.

<6회>
4. $y_2^*(2,\ 3)$를 선택한다.
5. $y_2^*(2,\ 3) = 0$ 이므로, $i = 3$으로 설정하고 단계 3으로 간다.

<7회>

3. $i=3$ 에 대해 다음 과정을 수행한다.
4. $y_3^*(0,1)$를 선택한다.
5. $y_3^*(0,1)>0$이므로, 단계 6으로 간다.
6. $j_1=0$ 이므로, $x_{31}\leftarrow 1$, $R_3^*\leftarrow R_3^*\setminus\{y_3^*(0,1)\}$, 단계 4로 간다.

<8회>

4. $y_3^*(0,2)$를 선택한다.
5. $y_3^*(0,2)>0$이므로, 단계 6으로 간다.
6. $j_1=0$ 이므로, $x_{32}\leftarrow 1$, $R_3^*\leftarrow R_3^*\setminus\{y_3^*(0,2)\}$, 단계 4로 간다.

<9회>

4. $y_3^*(2,3)$를 선택한다.
5. $y_3^*(2,3)>0$이므로, 단계 6으로 간다.
6. $j_1\neq 0$이므로, 단계 7로 간다.
7. $x_{33}\leftarrow 1$, $x_{32}\leftarrow 0(=1-1)$, $R_3^*\leftarrow R_3^*\setminus\{y_3^*(2,3)\}$, 단계 4로 간다.

<10회>

4. $y_3^*(1,4)$를 선택한다.
5. $y_3^*(1,4)>0$이므로, 단계 6으로 간다.
6. $j_1\neq 0$이므로, 단계 7로 간다.
7. $x_{34}\leftarrow 0.25$, $x_{31}\leftarrow 0.75(=1-0.25)$, $R_3^*\leftarrow R_3^*\setminus\{y_3^*(1,4)\}$, 단계 4로 간다.

<11회>

4. $R_3^*=\varnothing$ 이므로, $i=4$ 로 설정하고, 단계 3으로 간다.

<12회>

3. $i>3$ 이므로 과정을 끝낸다.

이상의 과정을 통해서 구해진 최적해는 다음과 같다.

$x_{11}^*=0.625,\ x_{12}^*=1,\ x_{13}^*=0.375,$
$x_{21}^*=0,\ x_{22}^*=1,\ x_{23}^*=0,$
$x_{31}^*=0.75,\ x_{32}^*=0,\ x_{33}^*=1,\ x_{34}^*=0.25$

본 장에 제시한 수치예제에는 대안 최적해가 존재한다. <1회>의 단계 1에서 부문제 3에 대한 비율목록 L_3 에는 동일한 값을 갖는 비율 $\theta_3(1,4)=\theta_3(1,2)=\theta_3(2,4)=0.67$이 발생한다. 수치예제에서는 비율 $\theta_3(1,4)$를 먼저 선택하여 결과를 보였다. 그러나 $\theta_3(1,4)$ 대신에 $\theta_3(1,2)$를 선택한다면, 달라지는 결과는 다음과 같다. 이 외의 결과는 수치예제와 동일하다.

$R_3=\{y_3(0,1),\ y_3(0,2),\ y_3(2,3),\ y_3(1,2),\ y_3(2,4)\}$
$p_3(0,1)=6,\ w_3(0,1)=5,\ u_3(0,1)=1,$
$p_3(0,2)=8,\ w_3(0,2)=8,\ u_3(0,2)=1,$
$p_3(2,3)=3,\ w_3(2,3)=4,\ u_3(2,3)=1,$
$p_3(1,2)=2,\ w_3(1,2)=3,\ u_3(1,2)=1,$
$p_3(2,4)=6,\ w_3(2,4)=9,\ u_3(2,4)=7/9$
$y_3^*(0,1)=1,\ y_3^*(0,2)=1,\ y_3^*(2,3)=1,$
$y_3^*(1,2)=1,\ y_3^*(2,4)=0$

이로부터 유도된 문제 (P)의 대안 최적해는 다음과 같이 구해진다. 이외의 최적해 값은 위 수치예제 결과와 동일하다.

$x_{31}^*=0,\ x_{32}^*=1,\ x_{33}^*=1,\ x_{34}^*=0$

5. 결론 및 토의

본 논문에서는 기존의 다분할 배낭문제(Won and Chung, 1991)에 부등식 형태의 일반 다중선택 제약을 고려함으로써 활용범위가 더 커진 일반화된 모형을 제시하고, 이 모형의 최적해를 구하기 위한 분지한계법의 한계전략으로서 선형계획 완화된 문제를 연구하였다.

제시된 일반화된 모형은 독립적인 여러 부서에서 요구되는 예산 제약뿐만 아니라, 부서별로 선택될 과제 수에 대한 제약도 조정할 수 있으므로 좀 더 유연하게 전체 예산을 배정할 수 있다. 우리는 이 문제를 일반 다중선택 다분할 배낭문제라 부른다. 이 문제의 선형계획 완화문제에 대한 효율적인 해법의 개발을 위하여 다분할 제약구조의 특성과 일반 다중선택 제약구조의 최저기저 특성을 파악하고 활용하였다. 제시된 해법의 계산 복잡도는 효율적인 $O(n^2\log n)$으로 분석된다. 여기서 n은 모든 변수의 개수이다.

본 논문에 제시한 일반 다중선택 제약은 상황에 따라 변형되어 적용될 수 있다. 한 부서에서 정확히 k_i 개의 과제들을 선택해야 하는 상황이면 $\Sigma_{j\in N_i}x_{ij}=k_i$ 를 적용할 수 있다. 한 부서에서 선택할 과제들의 수에 범위를 설정한다면 즉, 적어도 l_i 개 이상의 과제를 선택하고 최대 k_i 개까지로 제한하는 상황이면 $l_i\le\Sigma_{j\in N_i}x_{ij}\le k_i$ 을 적용할 수 있다.

본 논문에서 연구한 일반 다중선택 다분할 선형계획 배낭문제에서 일반 다중선택 제약의 우변상수는 선택의 의미를 갖는 정수값을 갖는다. 선형계획의 이론적 측면에서 볼 때 일반 다중선택 제약의 우변상수가 실수값을 가지는 더 확장된 문제를 고려할 수 있다. 이 경우 부문제로서 발생하는 실수 우변의 이차원 선형계획 배낭문제의 특성은 본 논문에서 고려된 정수 우변의 이차원 선형계획 배낭문제와 그 특성이 다르게 나타나고 있다. 실수 우변의 이차원 선형계획 배낭문제에 대해서는 Won(2011)에서 이미 연구된 바 있다. 이 연구 결과는 실수 우

변의 다중선택 제약을 갖는 다분할 선형계획 배낭문제에 적절하게 적용될 수 있다.

본 논문은 LCD 모듈라인의 생산계획 수립을 위한 수리적 모형화(Suh, 2012)나, 물류센터의 최적 위치 결정을 위한 수리적 모형화의 초기단계(Sim *et al*., 2013)에 활용할 수 있다.

참고문헌

Armstrong, R. D., Sinha P., and Zoltners, A. A. (1982), The multiple-choice nested knapsack model, *Management Science*, **28**(1), 34-43.

Balas, E. and Zemel, E. (1980), An algorithm for large zero-one knapsack problem, *Operations Research*, **28**(5), 1130-1154.

Campello, R. E. and Maculan, N. F. (1987), Lagrangean relaxation for a lower bound to a set partitioning problem with side constraints : properties and algorithms, *Discrete Applied Mathematics*, **18**, 119-136.

Dudzinski, K. (1989), On a cardinality constrained linear programming knapsack problem, *Operations Research letters*, **8**, 215-218.

Sim, S. B., Jang, J. H., Jung, H. S., and Jeong, B. J. (2013), Military logistics consolidation center location problem : modeling and analysis, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **39**(6), 587-598.

Suh, J. D. (2012), A multistage metaheuristic scheduling algorithm in LCD module lines composed of processes, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **38**(4), 262-275.

Won, J. Y. and Chung, S. J. (1991), The multi-divisional linear knapsack problem, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **17**(1), 127-130.

Won, J. Y. (2011), On a two dimensional linear programming knapsack problem with the generalized GUB constraint, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **37**(3), 258-263.